

MORBIDITÉ, MORTALITÉ : problèmes de mesure, facteurs d'évolution, essai de prospective.

Colloque international de Sinaia (2-6 septembre 1996)



ASSOCIATION INTERNATIONALE DES DÉMOGRAPHES DE LANGUE FRANÇAISE

AIDELF

La rectangularisation de la courbe des survivants

Michel Louis LEVY

Institut National d'Études Démographiques, Paris, France

La courbe des survivants tend, dans les tables de mortalité des pays développés et à mesure que s'accroît l'espérance de vie, vers un rectangle. Il est tentant dans ces conditions de passer à la limite : que signifierait une courbe de survivants rectangulaire ? Comment affiner cette approximation ? Quel rapport a ce passage à la limite avec le concept démographique de l'âge limite ?

1. Plus ou moins rectangulaire ?

Dans une population dont la courbe de survivants serait rectangulaire, toutes les personnes nées vivantes vivraient jusqu'à l'âge moyen au décès et toutes mourraient à cet âge moyen, confondu avec l'espérance de vie à la naissance ou vie moyenne. La distribution des décès se réduirait à un pic de 100% pour cet âge moyen, la fréquence des décès à tous les autres âges étant nulle. La dispersion de cet âge au décès, et les indicateurs de dispersion, tels qu'écart-type et variance, seraient également nuls.

On pourrait avoir l'idée de caractériser la proximité du rectangle et de la courbe des survivants en comparant la « surface sous la courbe » à celle d'un « rectangle plein ». Mais, par définition de la vie moyenne, cette surface est égale à celle du rectangle limité à cette vie moyenne. Le rapport des surfaces est donc égal à celui de l'espérance de vie à la naissance à l'âge pris pour « âge limite » du rectangle plein. Si on prend 100 ans pour âge limite, et si l'espérance de vie est de 80 ans, le rapport des surfaces est de 80%. Si on prend 120 ans, il est de $80/120 = 66,7\%$.

Il est plus judicieux de caractériser la rectangularisation par l'écart-type de l'âge au décès. Pour neutraliser la dispersion introduite par la mortalité infantile, on s'est limité à la partie croissante des quotients de mortalité, en ne considérant que les décès au delà de 10 ans, que nous appellerons pour simplifier les *décès adultes*. Voici pour quatre tables féminines, deux de moment, deux de génération, ayant une cinquantaine d'années d'écart [1], l'âge modal au décès, la moyenne et l'écart-type des âges des décès adultes.

Tables féminines	Moment 38 (années)	Génération 39 (années)	Moment 92 (années)	Génération 89 (années)
Espérance de vie naissance	61,99	76,38	81,27	89,53
Âge modal au décès	78	92	88	94
10+e10 (amda)	67,79	84,16	81,92	90,28
Écart-type (âge d.>10)	17,8	14,3	13,0	10,5

Entre les deux cas extrêmes, l'écart-type a diminué de 7,3 ans tandis que l'âge modal au décès augmentait de 16 ans et l'âge moyen des décès adultes de 22,49 ans. En extrapolant linéairement sur ces deux cas, il vient que l'écart-type s'annulera quand l'âge modal au décès sera de 117 ans et quand l'âge moyen des décès adultes sera de 123 ans. En notant l'écart-type éc.t et l'âge moyen des décès adultes amda , égal dans une table de mortalité avec notre définition à $10+e10$, on trouve en arrondissant :

- d'une part : $\text{éc.t} = 40 - 13 \times \text{amda} / 40$
- d'autre part : $\text{amda} = 123 - 3,1 \times \text{éc.t}$

Nous avons dit que les courbes de survivants tendent vers un rectangle « à mesure que s'accroît l'espérance de vie » vers un rectangle. C'est évidemment abusif et l'interpolation calculée ci-dessus est approximative. Voici ce que donne l'ajustement de l'écart-type en ajoutant à nos quatre tables féminines les tables masculines correspondantes et en classant par amda croissant.

	amda	éc.-t	Valeur ajustée
Hommes année 1938	62,46	17,7	19,7
Femmes année 1938	67,79	17,8	17,8
Hommes année 1992	73,90	15,6	16,0
Hommes génération 1939	75,63	16,7	15,4
Femmes année 1992	81,92	13,0	13,4
Hommes génération 1989	82,52	15,5	13,2
Femmes génération 1939	84,16	14,3	12,6
Femmes génération 1989	90,28	10,5	10,6

Une autre piste pour caractériser le degré de rectangularisation est de repérer le « coin » de la courbe des survivants. Regardons l'âge où l'accroissement du nombre de décès de la table est maximal. Il ne correspond pas à l'âge modal au décès, qui correspond au maximum de la pente négative (et au point d'inflexion de la courbe des survivants). Dans les quatre tables de génération considérées (les tables du moment sont irrégulières), cet accroissement est maximal de quatre à six ans avant l'âge modal au décès. Admettons que la droite qui joint l'origine à ce « coin » est la diagonale du rectangle limite; en la prolongeant jusqu'à l'âge où elle coupe l'ordonnée 100% de survivants, on obtient une estimation de l'âge limite. Dans la table la plus favorable étudiée, celle de la génération féminine née en 1989, la proportion de survivants à l'âge du « coin », soit 90 ans, est 65%. Cela donne un âge limite de 35% supérieur, soit 121,5 ans, estimation satisfaisante.

Inversement, on peut se donner un âge limite, 120 ans par exemple, et regarder l'âge où la courbe des survivants croise la diagonale montante. Dans les tables de générations féminines 1939 et 1989, cette rencontre se fait pour 84 et 89 ans. Si la courbe des survivants coïncidait avec la diagonale descendante, ce serait le degré zéro de la rectangularisation, et l'âge de croisement serait 60 ans. On peut donc parler d'un « degré de rectangularisation » de 40 et 48,3% ($24/60=40\%$). Mais on est tenté de faire ce calcul dans un rectangle plus court.

Une autre recherche pourrait porter sur la pente de la courbe des survivants. Parce que cela se lit directement, nous avons regardé à quel âge il y a exactement 100 décès pour 100000 nés vivants, c'est-à-dire 1 pour 100 ? Cela arrive deux fois, une fois avant, une fois après l'âge modal. En se limitant d'abord à l'âge antérieur à l'âge modal, dans les quatre tables féminines considérées, on va de 57/58 ans (moment 38) à 81/82 (génération 89). Il se trouve, dans cette dernière table, que ces 999 décès de 81 à 82 ans font passer les survivants de 90 489 à 89 490, sous 90 000. C'est une bonne estimation du « coin », mais pas de l'âge limite : la diagonale correspondante atteindrait 100% à 10% au dessus, soit 8 ans plus tard, soit 90 ans. Une autre piste serait de regarder le nombre de survivants à l'âge postérieur où il y a aussi 1000 décès et d'approcher la partie penchée de la courbe des survivants, non plus par une verticale, mais par une oblique. Ce serait la trapèzification de la courbe des survivants.

Privilégions maintenant une autre interprétation de la courbe des survivants, à savoir le profil de la population stationnaire.

2. De la pyramide à la grande arche

Si la table de mortalité est fixe et le nombre de naissances indéfiniment constant, la population devient " stationnaire " et sa pyramide des âges a pour profils les courbes de survivants, hommes et femmes, tournées dans le bon sens - et avec une éventuelle symétrie ! - d'un quart de tour. Si la courbe de survivants devient rectangulaire, la pyramide, ainsi nommée à l'origine en raison de sa forme triangulaire, devient rectangulaire, comme la Grande Arche de la Défense répond à la Pyramide du Louvre.

Remplacer les pyramides des âges réelles par leur approximation rectangulaire a des vertus pédagogiques, parce que s'introduit ici un nombre d'habitants en général connu des lecteurs ou auditeurs. Il faut évidemment expliquer que dans une population stationnaire, le nombre annuel de décès est égal à celui des naissances, invariable par définition. Avec les chiffres INSEE de la population de la France 1995, on trouve :

- 58 027 000 habitants / 708 000 naissances = 82,0 ans
- 58 027 000 habitants / 520 000 décès = 111,6 ans

Gardons 708 000 naissances - 344 525 naissances de filles et 363 474 naissances de garçons - et donc 708 000 décès. Avec les espérances de vie calculées par l'INSEE - 81,8 ans et 73,6 - on trouve :

- 344 525 x 81,8 = 28 182 145 « habitants » de sexe féminin
- 363 474 x 73,6 = 26 751 686 « habitants » de sexe masculin.

L'écart est 1,4 millions au lieu de 1,5 dans la population réelle. Mais, 28 182 145 + 26 751 686 = 54 933 831 habitants. Manquent 3 millions d'habitants.

Calculons maintenant les indicateurs usuels de vieillissement, la proportion de moins de 20 ans et de plus de 65 ans. Dans une pyramide rectangulaire **les proportions d'effectifs des tranches d'âge sont proportionnels aux différences d'âges correspondantes**, ce qui permet de calculer des ordres de grandeur tout à fait vraisemblables. Les moins de 20 ans représentent $20 / 78 = 25,6\%$ au lieu de 26,1% dans la réalité. Les 65 ou plus $13/78 = 1/6 = 16,6\%$ au lieu de 15,0%. Par sexe, on obtient pour les hommes $20/74 = 27,0\%$ et $9/74 = 12,2\%$. Pour les femmes $20/82 = 24,4\%$ - $17/82 = 20,7\%$.

Dans une pyramide limitée à 80 ans, les groupes 0-19ans, 20-39 ans, 40-59 ans et les 60-79 ans représentent chacun un quart (25%) de la population.

Ici aussi, on peut perfectionner cette approximation en remplaçant les verticales par des obliques. La pyramide des âges de la France, où le nombre annuel de naissances a été peu variable, peut être approchée par un rectangle surmonté d'un triangle, par exemple 80% de la population de 0 à 80 ans, et les derniers 20% dans le triangle 80-120 ans. Le problème est de savoir où placer la discontinuité.

Aux âges où la mortalité est nulle (\neq très faible), l'espérance de vie diminue de un an par an et $x+e_x$ ne varie pas avec x . dans la table de la génération féminine 1989, $10+e_{10}$ est 90 ans, à 30 ans de l'âge limite 120 ans. A 60 ans, $e_{60} = 31,65$ ans donc l'âge moyen au décès est 91,65 ans peu différent de 90 et il y a 96,3% de survivants et même 97,1% par rapport aux vivants à 10 ans. La population stationnaire totale, avec une racine de 100 000 personnes, est proche de 9 millions de personnes (8 953 000). L'approcher par un rectangle de $60 \times 100\ 000$ personnes, soit 6 millions, au dessous de 60 ans et un triangle de 3 millions, allant de 60 à 120 ans ($60 \times 100\ 000 / 2$) paraît raisonnable .

3. Estimations de l'Âge limite

Nous avons suggéré de nouvelles pistes pour estimer l'âge limite, fondées sur la courbe des survivants. Les estimations classiques se font par extrapolation de la loi de Gompers, selon laquelle la partie croissante de la courbe des quotients est une droite sur graphique logarithmique, c'est-à-dire, dont le taux de croissance relative est constant avec l'âge.

Dans la table de mortalité INSEE 1990-1993 des femmes, le quotient double en 8-11 ans, quadruple en 16-22 ans (en 100 000 èmes 26-104 de 16 à 38 ans - 125-500 de 40 à 59 ans - 404-1622 de 56 à 72 ans). En partant de 25 000 atteint à 95 ans, cela donne une fourchette 111-117 ans pour le quotient annuel 100%. Mais Pressat ([2], p. 8-11) nous apprend de ne pas confondre *quotient annuel* q_a et *quotient instantané* q_i [$q_a = 1 - \exp(-q_i)$]. Le quotient instantané double en environ 7 ans, et atteint 100% si q_a atteint $1 - 1/e = 0,632$. Pressat cite une étude de 1988 [3] aboutissant ainsi à des âges limites de 110 ans pour les femmes et 109 ans pour les hommes. Une étude récente fondée sur un perfectionnement de la loi de Gomperts et une table de génération éteinte [4] aboutit à une fourchette, à 95% d'intervalle de confiance, de 113-124 ans.

Décidément le cas de Madame Jeanne Calmant ne change rien et l'âge limite de 120 ans, tel que le fixe l'Éternel en *Genèse* 6,3 peut être conservé.

RÉFÉRENCES

- [1] Michel Louis LEVY, 1996. Les cinquante ans du Baby-boom, *Population et Sociétés*, INED n°311, 4 p., mars 1996.
- [2] Roland PRESSAT, 1995. *Éléments de démographie mathématique*, AIDELF, 279 p.
- [3] V. KANNISTO, 1988. *Population Studies*, nov. 1988.
- [4] Karin AARSEN et Laurens de HAAN, 1994. On the maximal life span of Humans. *Mathematical Population Studies*, 4/1994, p.259-281.