L'Actualité économique

Un test des propriétés de courbure de la demande agrégée : le Canada vs le Québec
A Test of Aggregate Demand Curvature Properties: Canada vs Québec

Lisette Dubreuil and Pierre Ouellette

Volume 70, Number 3, septembre 1994

URI: https://id.erudit.org/iderudit/602146ar
DOI: https://doi.org/10.7202/602146ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Dubreuil, L. & Ouellette, P. (1994). Un test des propriétés de courbure de la demande agrégée : le Canada vs le Québec. *L'Actualité économique*, *70*(3), 271–288. https://doi.org/10.7202/602146ar

Article abstract

Using quarterly data for Canada and the Province of Québec, we estimate a complete demand system based on the AIDS model. We present a test of the negative semi-definiteness of the matrix of compensated price effects and of the negative quasi-definiteness of the matrix of uncompensated price-effects. This test allows us to evaluate two alternative characterizations of aggregate demand systems: first, that they behave like individual demand functions, and the second, that they respect the properties implied by the assumptions proposed by Hildenbrand (1983) and Grandmont (1984 and 1987). Our results confirm our intuition. First, we cannot reject that the aggregate demand system in the Province of Québec behaves like individual demand functions. This resuit is compatible with a set of consumers which are relatively homogeneous. Second, we reject that the aggregate demand system for Canada behaves like individual demand functions, but we cannot reject that it respects the properties implied by the Hildenbrand/Grandmont's assumption. This result is compatible with a set of consumers which are less homogeneous than the consumers in Québec

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 70, no 3, septembre 1994

UN TEST DES PROPRIÉTÉS DE COURBURE DE LA DEMANDE AGRÉGÉE : LE CANADA VS LE QUÉBEC*

Lisette DUBREUIL
Pierre OUELLETTE
Département des sciences économiques
Université du Québec à Montréal

RÉSUMÉ — En utilisant des données trimestrielles pour le Canada et le Québec, nous estimons un système complet de demandes à l'aide du modèle AIDS. Nous présentons les résultats de deux tests : nous testons si la matrice des effets-prix compensés est semi-définie négative et nous testons si la matrice des effets-prix non-compensés est quasi-définie négative. Ces tests permettent d'évaluer deux caractérisations alternatives du système de demandes agrégées : la première, qu'il se comporte à la manière d'un système de demandes individuelles, et la seconde, qu'il respecte les propriétés découlant des hypothèses formulées par Hildenbrand (1983) ou Grandmont (1987). Nous ne pouvons rejeter l'hypothèse que le système de demandes agrégées pour le Québec se comporte comme des fonctions de demande individuelle. Un tel résultat est compatible avec un groupe de consommateurs relativement homogène. Au contraire, nous rejetons que le système de demandes agrégées canadien se comporte comme des fonctions de demande individuelle, mais nous ne pouvons rejeter qu'il respecte les propriétés découlant de l'hypothèse de Hildenbrand/Grandmont. Ce résultat suppose que les consommateurs canadiens forment un groupe moins homogène que les consommateurs québécois.

ABSTRACT — *A Test of Aggregate Demand Curvature Properties: Canada vs Québec.* Using quarterly data for Canada and the Province of Québec, we estimate a complete demand system based on the AIDS model. We present a test of the negative semi-definiteness of the matrix of compensated price effects and of the negative quasi-definiteness of the matrix of uncompensated price-effects. This test allows us to evaluate two alternative characterizations of aggregate demand systems: first, that they behave like individual demand functions, and the second, that they respect the properties implied by the assumptions proposed by Hildenbrand(1983) and Grandmont(1984 and 1987). Our results confirm our intuition. First, we cannot reject that the aggregate demand system in the Province of Québec behaves like individual demand functions. This result is compa-

* Nous remercions S. Korenman et J. Wooldridge pour leurs commentaires lors de l'élaboration de cette étude.

tible with a set of consumers which are relatively homogeneous. Second, we reject that the aggregate demand system for Canada behaves like individual demand functions, but we cannot reject that it respects the properties implied by the Hildenbrand/Grandmont's assumption. This result is compatible with a set of consumers which are less homogeneous than the consumers in Québec

INTRODUCTION

Dans cette étude, nous estimons un système complet de demandes en utilisant la forme fonctionnelle du modèle AIDS (*Almost Ideal Demand System)* et des données trimestrielles pour le Canada et le Québec. Ce modèle est maintenant d'utilisation courante chez les économètres de la demande. Grâce à certaines découvertes récentes en théorie économique, nous testons, pour chaque ensemble de données, deux genres de propriétés de courbure qui peuvent caractériser un système complet de demandes : la matrice des effets-prix compensés est semi-définie négative, ou alors la matrice des effets-prix (non compensés) est quasi définie négative [1].

Chacune de ces propriétés de courbure est rattachée à une hypothèse particulière concernant l'agrégation des demandes individuelles. Si les fonctions de demande agrégée se comporte comme des fonctions de demande individuelle, alors la matrice des effets-prix compensés est semi-définie négative et symétrique. D'autre part, si la distribution des revenus (respectivement, des préférences) est conforme à l'hypothèse formulée par Hildenbrand (1983) (respectivement, Grandmont, 1987), alors la matrice des effets-prix non compensés est quasi définie négative (mais non nécessairement symétrique). Ainsi donc, un test des propriétés de courbure aidera peut-être à établir quelle hypothèse concernant les demandes agrégées devrait être choisie.

Dans la première section, nous résumons les deux caractérisations alternatives des demandes agrégées moyennes et nous dérivons les équations à estimer. Dans la deuxième section, nous élaborons notre test économétrique et nous l'utilisons dans le cas des propriétés de courbure citées plus haut. Le test économétrique que nous utilisons a été développé par Korenman *et al.* (1988). Il présente l'avantage de ne pas exiger que la matrice à tester soit symétrique comme c'est le cas avec le test basé sur la décomposition de Cholesky de façon à assurer l'existence d'une solution à valeur réelle pour les coefficients à estimer. De plus, l'imposition de la symétrie serait incompatible avec les hypothèses de Hildenbrand/Grandmont. D'autres considérations militent aussi en faveur de ce test. Il n'est pas nécessaire de procéder à une transformation des coefficients avant l'estimation. Ainsi, un modèle linéaire dans ses paramètres ne deviendra pas non linéaire comme c'est le cas avec la décomposition de Cholesky et les paramètres estimés gardent toute leur signification d'un point de vue économique.

1. La matrice A est quasi définie négative si $z'Az < 0$ pour tout $z \neq 0$. De plus, si A est symétrique ($A = A'$), alors on dit de A qu'elle est semi-définie négative.

La troisième section résume une application empirique du test en utilisant des données trimestrielles de 1961 à 1989 pour le Canada et le Québec. À notre connaissance, ce sera la première fois que l'hypothèse de Hildenbrand/ Grandmont sera testée. Nous ne pouvons rejeter l'hypothèse selon laquelle le système de demandes agrégées pour le Québec se comporte comme une fonction de demande individuelle. Un tel résultat reflète le comportement d'un groupe de consommateurs relativement homogènes. Au contraire, nous rejetons l'hypothèse selon laquelle le système de demandes agrégées pour le Canada se comporte comme des demandes individuelles, mais nous ne pouvons rejeter qu'il respecte les propriétés découlant de l'hypothèse de Hildenbrand/ Grandmont. Ce résultat est compatible avec l'idée que dans l'ensemble, les consommateurs canadiens sont moins homogènes que les consommateurs québécois. Les résultats de notre application peuvent intéresser le lecteur de plus d'un point de vue. Bien entendu, ils nous renseignent sur la nature des groupes de consommateurs à la base des deux banques de données que nous avons utilisées. Certains pourraient être tentés de leur donner une dimension politique : une hétérogénéité de la population peut être vue comme un argument en faveur d'une décentralisation politique. La validité que l'on peut prêter à un tel argument dépend naturellement de nos propres convictions. D'une façon moins spéculative, on peut voir nos résultats comme une alternative à l'hypothèse que la demande agrégée se comporte comme la demande individuelle. Cette hypothèse est fréquemment rejetée par les tests économétriques ce qui nous laisse avec la seule propriété d'homogénéité. Il en résulte une importante perte de caractérisation à moins que l'on ne dispose d'hypothèses alternatives qui permettent de préciser la nature de la demande agrégée. L'hypothèse de Hildenbrand/Grandmont constitue une porte de sortie dont l'intérêt est démontré par nos résultats. Enfin, la cinquième section présente la conclusion.

1. LA DEMANDE AGRÉGÉE MOYENNE

Nous supposons que les préférences des consommateurs sont représentables par des fonctions d'utilité fortement quasi concaves, monotones et deux fois continûment différentiables[2]. Selon cette hypothèse, les courbes d'indifférence sont convexes et suffisamment lisses pour assurer l'existence de fonctions de demandes différentiables $x_i(p, y_i)$, où x_i est un vecteur de demandes, p est le vecteur de prix correspondants et y_i représente le revenu pour chaque consommateur. La différentielle totale peut s'écrire comme suit :

$$dx_i = K_i dp + k_i \, [dy_i - x_i' dp] \text{ , ou} \tag{1}$$

$$= K_i dp + k_i \, [p' dx_i]. \tag{2}$$

2. Soit $U_i(x_i)$ la fonction d'utilité du consommateur i. U_i est fortement quasi concave si $dx' DU_i \, dx < 0$, pour $dx \neq 0$ et $DU_i' dx = 0$; U_i est monotone si $DU_i > 0$; U_i est deux fois continûment différentiable si $U \in C^2$.

Le terme qui apparaît entre crochets est la différentielle du revenu réel pour le consommateur i. Le premier terme de droite représente l'impact d'une variation de prix lorsque le revenu réel demeure constant, de telle sorte que K_i est la matrice des effets de substitution et k_i est le vecteur des effets-revenus. On peut facilement démontrer (voir, par exemple, Barten et Böhm, 1982) que les coefficients K_i et k_i de cette différentielle satisfont les propriétés suivantes :

$$p'K_i = 0' \text{ et } p'k_i = 1, \text{(additivité)} \tag{3}$$

$$K_i p = 0, \text{(homogénéité)} \tag{4}$$

$$K_i = K'_i, \text{(symétrie)} \tag{5}$$

$$\theta' K_i \theta < 0 \text{ pour } \theta \neq \alpha p,\ \alpha \in \Re. \text{(négativité)} \tag{6}$$

Les deux propriétés d'additivité sont également connues comme les agrégations de Cournot et Engel (concernant les biens). Ce groupe de propriétés a l'avantage particulier de représenter un ensemble de restrictions qui peuvent être utilisées pour augmenter les degrés de liberté lors de l'estimation. Malheureusement, il arrive souvent que seules des données agrégées (concernant les consommateurs) soient disponibles. Dans ce cas, les observations sur les demandes agrégées moyennes se définissent comme suit :

$$x = (1/n)\sum_i^n x_i(p, y_i), \tag{7}$$

$$= x(p, (y_{1,\dots,}y_n)), \tag{8}$$

où n est le nombre total de consommateurs dans l'économie.

Si la distribution complète des revenus était disponible, nous pourrions alors utiliser les propriétés individuelles (3 à 6) pour restreindre le modèle économétrique. Malheureusement, nous observons généralement seulement

$$x = x(p, (1/n)\sum_i^n y_i), \tag{9}$$

de telle sorte que les demandes agrégées moyennes dépendent du vecteur de prix et du revenu agrégé moyen. Évidemment, l'analyse peut se faire en utilisant des valeurs totales au lieu de valeurs moyennes. La différentielle totale de l'équation (9) peut s'écrire comme suit :

$$dx = Kdp + k[p'dx] \tag{10}$$

où $K = (1/n)\left[\sum_i^n K_i - \Phi\sum_i^n K_i\right]$ et $k = (1/n)\left[\sum_i^n k_i - \Phi\sum_i^n k_i\right]$ (voir l'appendice A pour les détails). La matrice Φ est reliée à la matrice de covariance des effets-revenus et du revenu réel provenant de la distribution des revenus et des préférences de tous les consommateurs. Il est facile de démontrer que $p'\Phi = 0$ et qu'ainsi, les propriétés d'additivité et d'homogénéité restent valides au niveau agrégé :

$$p'K = 0 \text{ et } p'k = 1, (\text{additivité des demandes agrégées}) \tag{11}$$

$$Kp = 0, (\text{homogénéité des demandes agrégées}) \tag{12}$$

La propriété d'additivité des demandes moyennes (11) découle du fait que si, pour chaque consommateur, les dépenses équivalent à son revenu total, alors il en est de même pour une agrégation de consommateurs. La propriété d'homogénéité de la demande moyenne découle du fait que la sommation de fonctions homogènes est homogène.

Par contre, en raison de la présence du terme $\Phi\, \Sigma_i^n\, K_i$ dans la matrice de substitution K, les propriétés de symétrie et de négativité des demandes moyennes ne sont plus nécessairement respectées (Debreu, 1974; Sonnenschein, 1974 et Mantell, 1974). Toutefois, en posant certaines hypothèses concernant la distribution des revenus ou des préférences, c'est-à-dire concernant la matrice Φ, il est possible d'obtenir des propriétés supplémentaires qui facilitent l'estimation d'un système complet de demandes agrégées.

2. DEUX HYPOTHÈSES ALTERNATIVES CONCERNANT LES DEMANDES AGRÉGÉES

2.1 *La caractérisation individuelle*

Pour les fins de l'estimation, il est utile d'ignorer la matrice Φ, ou d'une manière équivalente, de poser l'hypothèse que sa présence n'empêche pas la préservation de la caractérisation individuelle au niveau agrégé. Dans ce cas, les fonctions de demande agrégée moyenne, comme les fonctions de demande individuelle, respectent les propriétés de symétrie et de négativité, soit,

$$K = K', (\text{symétrie des demandes agrégées}) \tag{13}$$

$$\theta' K\theta < 0, \text{pour } \theta \neq \alpha p, \alpha \in \Re. (\text{C} - \text{négativité des demandes agrégées}) \tag{14}$$

(Pour éviter toute confusion possible, nous ferons ci-après la distinction entre la semi-définie négativité de la matrice des effets-prix compensés, la propriété de C-négativité des demandes agrégées, et la quasi-définie négativité de la matrice des effets-prix non compensés, la U-négativité des demandes agrégées qui sera définie plus loin.)

Lors de l'estimation des systèmes de demandes agrégées, les chercheurs imposent habituellement la symétrie, et plus récemment, ils ont commencé à imposer la négativité également, en utilisant une décomposition de Cholesky (pour des exemples, voir Diewert et Wales, 1987 et Morey, 1986).

Toutefois, selon des découvertes théoriques récentes, il ne convient pas de conclure que l'agrégation de la demande n'est pas valable si les fonctions de demande moyenne ne respectent pas les propriétés de symétrie et de négativité. Plus particulièrement, des hypothèses concernant la distribution des revenus ou des préférences entraînent des caractérisations alternatives[3] des systèmes de demandes agrégées.

2.2 *La caractérisation de Hildenbrand/Grandmont*

Hildenbrand (1983) a démontré que, sous l'hypothèse que la distribution des revenus (pour chaque classe de consommateurs ayant la même relation de préférences) est continue et non croissante, la matrice des effets-prix non compensés $[K\text{-}kx']$ est quasi définie négative, c'est-à-dire,

$$\theta' \left[K - kx'\right]\theta < 0, \text{pour}\, \theta \neq 0. \;\; \text{(U – négativité des demandes agrégées)} \qquad (15)$$

Ainsi donc, les fonctions de demande moyenne respectent la loi de la demande : leurs pentes sont négatives par rapport à leur propre prix. La vérification empirique de l'hypothèse d'Hildenbrand est cependant peu probable.

Grandmont (1987) interchange le rôle respectif des revenus et des préférences. En posant l'hypothèse que les préférences de tous les consommateurs sont des transformations homothétiques l'une de l'autre, il obtient une distribution $f(a)$ des préférences à paramètre unique. Si, pour chaque classe de consommateurs ayant des revenus identiques, f est telle que

$$f'(a) + 2f(a) \geq 0, \;\; \text{pour}\, a \geq 0 \qquad (16)$$

et si le support de f est non borné, alors la matrice des effets-prix non compensés est quasi définie négative.

Il est utile d'interpréter l'équation (16) de la manière suivante : afin de respecter la condition (16), $f(a)$ ne doit être ni trop concentrée ni trop dispersée. Si la distribution des préférences est trop concentrée, alors, à la limite, le système de demande agrégée s'apparente au système de demande individuelle d'un seul consommateur et la matrice des effets-prix non compensés n'a pas besoin d'être quasi définie négative (évidemment, la loi de la demande n'est plus respectée, puisque les individus peuvent faire preuve de comportement extrême, par ex. Giffen). D'un autre côté, si la distribution des préférences est trop dispersée, alors le nombre d'individus aux préférences « normales » risque d'être insuffisant pour l'emporter sur le nombre d'individus au comportement extrême lors de l'agrégation et donc, il n'est pas certain que les courbes de demande moyenne auront des pentes négatives par rapport à leur propre prix.

---

3. Par « caractérisations alternatives » nous entendons des caractérisations qui peuvent être retenues lorsque les hypothèses de la caractérisation standard sont rejetées. Cela n'implique pas un caractère exclusif à ces ensembles d'hypothèses.

Bref, les formulations de Hildenbrand et de Grandmont mènent à la même caractérisation des fonctions de demande moyenne : notamment, la matrice des effets-prix non compensés sera quasi définie négative. Ce résultat contraste avec la caractérisation que génère la règle d'agrégation standard : que la matrice des effets-prix compensés sera semi-définie négative.

3. SPÉCIFICATION DU MODÈLE

Les sections 1 et 2 ont montré l'importance des tests de négativité dans l'évaluation des alternatives en théorie de la demande agrégée. Pour tester la négativité de la matrice des effets-prix compensés, il est maintenant courant de recourir à une décomposition de Cholesky (Barten et Geyskens, 1975 ; Lau, 1978 ; Morey, 1986). Cette méthode a l'avantage de la simplicité. Il suffit de tester si les éléments de la diagonale de la matrice de Cholesky sont tous non positifs. Toutefois il faut imposer la symétrie de la matrice à tester au moment de l'estimation pour s'assurer que les valeurs de Cholesky existent et sont réelles, sinon on ne pourrait procéder au test de négativité. Le test que nous utilisons (proposé par Korenman, Ouellette et Wooldridge, 1988) permet de tester la négativité d'une matrice même si les valeurs propres ne sont pas réelles ou n'existent pas. De plus, il n'est pas nécessaire d'imposer la symétrie. Cela constitue aussi un avantage de ce test car il n'est pas toujours justifié d'imposer la symétrie pour des motifs théoriques comme dans le cas de la caractérisation de Hildenbrand/Grandmont. Finalement, la décomposition de Cholesky avant l'estimation a pour effet de rendre non linéaires dans les paramètres les modèles linéaires. Cela n'est pas le cas avec le test utilisé ici puisqu'il s'effectue après l'estimation.

Nous présentons ce test dans le cadre de la spécification AIDS (Deaton et Muellbauer, 1980). Le modèle AIDS constitue une approximation de deuxième ordre d'une fonction de dépense dont les arguments ont subi une transformation logarithmique. Il peut s'écrire

$$w = \alpha + \Gamma \log p + v \log (y/P), \tag{17}$$

où w est le vecteur des parts de dépenses dans le revenu ; α et v sont des vecteurs de paramètres ; Γ est une matrice de paramètres ; et P est un indice de prix global. Pour le calcul de P, nous avons utilisé l'approximation suggérée par Deaton et Muellbauer (1980) :

$$\log P = w' \log p. \tag{18}$$

Cette approximation a l'avantage de préserver la linéarité du modèle. L'additivité et l'homogénéité des demandes agrégées impliquent

$$1'\alpha = 1, 1'\Gamma = 0 \text{ et } 1'v = 0, \text{ (additivité des demandes agrégées)} \tag{19}$$

$$\Gamma 1 = 0, \text{ (homogénéité des demandes agrégées)} \tag{20}$$

où 1 est un vecteur formé de uns.

Si les demandes agrégées se comportent comme des demandes individuelles, alors les paramètres vérifieront aussi les propriétés suivantes :

$$\Gamma = \Gamma', \text{ (symétrie des demandes agrégées)} \tag{21}$$

$$\theta' [\Gamma + ww' - W] \theta < 0 \text{ pour } \theta \neq \sigma 1, \sigma \in \Re, \tag{22}$$
$$\text{(C – négativité des demandes agrégées)}$$

où W est une matrice diagonale dont les éléments de la diagonale correspondent aux éléments du vecteur w. Le terme entre crochets dans l'équation (22) est, à un scalaire positif près, la matrice des effets-prix compensés.

Si l'hypothèse de Hildenbrand ou celle de Grandmont est respectée, alors, à la place de (21) et (22), nous aurons

$$\phi' [\Gamma - wv' - W] \phi < 0 \text{ pour } \phi \neq 0. \text{ (U – négativité des demandes agrégées)} \tag{23}$$

La matrice entre crochets dans l'équation (23) est, à un scalaire positif près, la matrice des effets-prix non compensés.

4. TEST DES PROPRIÉTÉS DE COURBURE

Le test des propriétés de courbure s'effectue en plusieurs étapes. Il faut premièrement estimer le système de demandes, de la forme AIDS dans notre cas, en utilisant une méthode de maximum de vraisemblance. Puis il faut récupérer la matrice que l'on veut tester. Cette matrice, disons A, n'est pas nécessairement symétrique. Conséquemment, il faut, à partir de A, former une matrice symétrique $C=(1/2)[A+A']$; la matrice A est définie négative si et seulement si la matrice C l'est aussi. Finalement, on calcule les valeurs propres de C (qui existent et sont réelles puisque C est symétrique). La variance asymptotique des valeurs propres est donnée par

$$\text{avar}(\mu) = (\partial\mu / \partial\beta)' \, \text{avar}(\beta)(\partial\mu / \partial\beta), \tag{24}$$

où μ est le vecteur des m valeurs propres de la matrice C, une pour chaque bien $j = 1, \ldots, m$; β est le vecteur des coefficients estimés apparaissant dans C; et avar β est la matrice de variance-covariance de β.

La matrice A sera définie négative si et seulement si toutes les valeurs propres μ_i sont non positives. On peut donc utiliser un test de Bonferroni pour évaluer la condition de négativité (Savin, 1984). Korenman *et al.* (1988) ont démontré que μ était asymptotiquement distribué suivant une loi normale avec une matrice de covariance donnée par l'équation (24). On peut donc procéder à des tests de Student asymptotiques en utilisant les statistiques

$$\mu_i / \left[\mathrm{avar}(\mu_i)\right]^{1/2}, \forall i = 1, \ldots, m. \tag{25}$$

Nous rejetons l'hypothèse nulle à savoir que C soit semi-définie négative au seuil de confiance minimum de (1-ma), si on ne peut rejeter que chaque μ_i soit non positif au seuil de confiance (1-a).

Alors que le calcul des valeurs propres est standard, la matrice de covariances des valeurs propres requiert l'évaluation des dérivées partielles des valeurs propres par rapport aux coefficients, $\partial\mu/\partial\beta$. Ces dérivées dépendent du système d'équations utilisé. Nous présentons leur expression dans le cas du modèle AIDS[4].

Pour tester la négativité de la matrice des effets-prix compensés, il faut tester le signe des valeurs propres de la matrice $[\Gamma + ww' - W]$. Les parts w sont aussi des variables endogènes et les dérivées partielles des valeurs propres devront incorporer les effets indirects via les changements dans les parts. Commençons par définir β, un vecteur formé, premièrement, par le vecteur α, deuxièmement, par les colonnes de Γ et, finalement, par le vecteur v ($\beta \equiv (\alpha', vec(\Gamma)', v')'$). Définissons q_j les vecteurs propres normalisés ($q_j'q_j = 1$) associé à μ_j. Les dérivées partielles de la j ième valeur propre est

$$\left[\partial\mu_j / \partial\beta\right]' = \left[(\partial \mu_j / \partial\alpha)' \, (\partial \mu_j / \partial\, vec(\Gamma))' \, (\partial\mu_j / \partial v)'\right]' \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &= \left[(q_{j1} Q_{j1} \ldots q_{jn} Q_{jn})(q_{j1} q_{j1} + q_{j1} Q_{j1} \log p_1 \ldots \right. \\ &q_{j1} q_{jn} + q_{j1} Q_{j1} \log p_n, \ldots, q_{jn} q_{j1} + q_{jn} Q_{jn} \log p_1 \ldots \\ &\left. q_{jn} q_{jn} + q_{jn} Q_{jn} \log p_n)(q_{j1} Q_{j1} \log (y/P) \ldots q_{jn} Q_{jn} \log(y/P))\right], \end{aligned} \tag{27}$$

où $Q_{jk} = 2w'q_j - q_{jk}$.

Quant à la négativité de la matrice des effets-prix non compensés, nous devons tester le signe des valeurs propres de la matrice $[\Gamma + wv' - W]$. Les dérivées partielles de la j ième valeur propre est

$$\left[\partial\mu_j / \partial\beta\right]' = \left[(\partial\mu_j / \partial\alpha)' \, (\partial\mu_j / \partial vec(\Gamma))' \, (\partial\mu_j / \partial v)'\right]', \tag{28}$$

$$\begin{aligned} &= \left[(q_{j1} R_{j1} \ldots q_{jn} R_{jn})(q_{j1} q_{j1} + q_{j1} R_{j1} \log p_1 \ldots \right. \\ &q_{j1} q_{jn} + q_{j1} R_{j1} \log p_n, \ldots, q_{jn} q_{j1} + q_{jn} R_{jn} \log p_1 \ldots \\ &\left. q_{jn} q_{jn} + q_{jn} R_{jn} \log p_n)(q_{j1} S_{j1} \ldots q_{jn} S_{jn})\right], \end{aligned} \tag{29}$$

4. Korenman *et al.* (1988) présentent les expressions correspondantes dans le cas d'un modèle de Rotterdam.

où $R_{jk} = -v'q_j - q_{jk}$, et $S_{jk} = R_{jk} \log(y/P) - w'q_j$. La dimension des vecteurs (26) et (28) est $((m^2+2m) \times 1)$.

Puisque les valeurs propres des deux matrices d'effets-prix dépendent des variables exogènes, nous procédons au test à chaque observation de l'échantillon.

5. ESTIMATION

Nous estimons les paramètres du modèle AIDS à partir de données trimestrielles canadiennes et québécoises couvrant la période 1961 :1 à 1989 :4 (voir l'appendice B). Les données proviennent de Statistique Canada et du Bureau de la statistique du Québec. Le système de demandes est formé des demandes de biens durables, semi-durables, non durables et des services, et est complété par la demande d'actifs financiers (l'épargne personnelle). Nous avons incorporé un terme de tendance pour tenir compte des changements exogènes des préférences. Nous avons aussi incorporé un vecteur de variables retardées pour tenir compte des anticipations. Il s'agit du revenu réel avec un et quatre trimestres de retard, de l'indice des prix à la consommation avec un et quatre trimestres de retard, et de la demande de biens durables avec quatre trimestres de retard[5] (Sur la justification théorique de l'introduction d'un actif financier dans le système de demandes, voir Bronsard, 1983 ; et Bronsard et Salvas-Bronsard, 1986.)

Puisque le système de demandes est complet, l'additivité est assurée. Nous testerons donc l'homogénéité, la négativité et la symétrie.

Les tableaux 1 et 2 présentent les résultats de l'estimation du modèle AIDS pour le Canada et le Québec. À l'aide d'un test de ratio de vraisemblance, nous ne pouvons rejeter l'homogénéité du système de demandes agrégées que ce soit au niveau canadien ou québécois. Ce résultat implique que les données ne rejettent pas la propriété de base de la théorie de la demande. Il reste à tester si les données vérifient l'une ou l'autre des caractérisations de la demande agrégée.

5. L'introduction de ces variables implique que les parts dépendent de coefficients supplémentaires, disons $\sigma' \log z$, où σ est un vecteur de coefficients et z est un vecteur de variables décalées. Les dérivées partielles des valeurs propres incluront l'impact de ces coefficients sur les parts. Ceci modifie les équations (26) et (28). Dans l'équation (26), le vecteur $\partial\mu_j / \partial\sigma' = [q_{ji} Q_{ji} \log z_i]$ est ajouté, de même que le vecteur $\partial\mu_j / \partial\sigma' = [q_{ji} R_{ji} \log z_i]$, dans l'équation (28).

TABLEAU 1

Coefficients estimés (statistiques t) du modèle AIDS avec les données canadiennes : 1961.2-1989.4

	α	Γ					ν	Anticipations						Statistiques	
	Constante	Prix durables	Prix semi-durables	Prix non durables	Prix services	Prix actifs	Revenu réel	IPC retardé d'une période	IPC retardé de 4 périodes	Revenu réel retardé d'une période	Revenu réel retardé de 4 périodes	Biens durables retardé de 4 périodes	Temps	R^2	D.-W.
Biens	0.180	-0.023	-0.027	0.061	-0.243	-0.005	-0.085	-0.157	0.073	0.171	0.021	0.075	0.001	0.84	1.4
durables	(0.35)	(-3.29)	(-0.63)	(1.46)	(-3.09)	(-0.91)	(-8.27)	(-1.27)	(1.63)	(6.05)	(0.75)	(1.09)	(4.29)		
Biens	0.371	-0.004	0.063	-0.022	-0.002	-0.005	-0.038	-0.089	0.034	0.048	-0.001	0.061	-0.0006	0.99	1.2
semi-durables	(1.97)	(-1.54)	(4.00)	(-1.45)	(-0.06)	(-2.11)	(-10.1)	(-1.96)	(2.06)	(4.66)	(-0.13)	(2.42)	(-4.88)		
Biens	0.252	0.0003	-0.014	0.060	-0.023	-0.006	-0.052	0.093	-0.031	0.010	-0.063	-0.083	-0.0005	0.99	1.3
non durables	(0.74)	(0.06)	(-0.51)	(2.18)	(-0.44)	(-1.64)	(-7.53)	(1.14)	(-1.05)	(0.52)	(-3.41)	(-1.83)	(-2.33)		
Biens	0.264	0.017	0.032	-0.175	0.211	-0.028	-0.142	0.016	0.074	-0.046	0.047	0.214	-0.0003	0.97	0.8
services	(0.61)	(-2.77)	(0.88)	(-5.00)	(3.16)	(-5.75)	(-16.2)	(0.16)	(1.95)	(-1.91)	(2.00)	(3.70)	(-0.98)		
Biens	-0.067	0.043	-0.053	0.077	0.057	0.045	0.317	0.136	-0.149	-0.183	-0.004	-0.266	-0.00004	0.99	1.5
actifs	(-0.14)	(6.38)	(-1.29)	(1.92)	(0.75)	(7.92)	(31.7)	(1.14)	(-3.46)	(-6.72)	(-0.14)	(-4.04)	(-0.12)		

TABLEAU 2

COEFFICIENTS ESTIMÉS (STATISTIQUES t) DU MODÈLE AIDS AVEC LES DONNÉES QUÉBÉCOISES : 1961.2-1989.4

	α	Γ					ν	Anticipations						Statistiques	
	Constante	Prix durables	Prix semi-durables	Prix non durables	Prix services	Prix actifs	Revenu réel	IPC retardé d'une période	IPC retardé de 4 périodes	Revenu réel retardé d'une période	Revenu réel retardé de 4 périodes	Biens durables retardé de 4 périodes	Temps	R^2	D.-W.
Biens durables	0.806	-0.038	-0.030	0.082	-0.105	0.006	-0.027	-0.249	0.110	0.128	0.002	0.193	0.001	0.83	1.1
	(5.95)	(-0.74)	(-0.50)	(1.80)	(-1.15)	(0.92)	(-7.54)	(-1.62)	(2.12)	(4.69)	(0.07)	(2.54)	(1.69)		
Biens semi-durables	0.110	0.016	0.059	-0.009	0.014	0.001	-0.015	-0.143	0.048	0.029	-0.002	0.042	-0.0004	0.98	0.9
	(2.06)	(0.78)	(2.48)	(-0.48)	(0.40)	(0.51)	(-10.3)	(-2.36)	(2.37)	(2.84)	(-0.17)	(1.40)	(-1.77)		
Biens non durables	0.126	0.114	-0.082	0.158	0.013	-0.0001	-0.025	-0.002	-0.153	-0.012	-0.033	-0.158	-0.00001	0.98	1.1
	(1.28)	(3.06)	(-1.87)	(4.80)	(0.19)	(-0.02)	(-9.68)	(-0.02)	(-4.08)	(-0.64)	(-1.75)	(-2.88)	(-0.03)		
Biens services	-0.294	-0.036	-0.068	-0.178	0.107	-0.030	-0.072	0.306	-0.012	-0.088	0.054	0.043	-0.00006	0.89	1.1
	(-1.43)	(-0.46)	(-0.73)	(-2.58)	(0.77)	(-3.18)	(-13.1)	(1.31)	(-0.16)	(-2.23)	(1.37)	(0.38)	(-0.08)		
Biens actifs	.252	-0.056	0.121	-0.054	-0.029	0.023	0.139	0.087	0.008	-0.051	-0.021	-0.120	-0.00004	0.99	1.4
	(3.15)	(-1.83)	(3.37)	(-2.00)	(-0.54)	(6.28)	(65.0)	(0.96)	(0.25)	(-3.31)	(-1.36)	(-2.67)	(-1.45)		

5.1 *Test de la caractérisation individuelle*

À l'aide d'un test de ratio de vraisemblance, la symétrie de la matrice des effets-prix compensés (prédite par la caractérisation individuelle) est rejetée (au seuil de .05) pour le Canada mais ne peut être rejetée pour le Québec.

En ce qui concerne la négativité, nous utilisons le test développé à la section 4. Les valeurs propres de la matrice des effets-prix compensés calculée sous une forme qui en assure sa symétrie, $(1/2)[(\Gamma + ww' - W) + (\Gamma + ww' - W)']$, et leurs statistiques de Student asymptotiques sont présentées au tableau 3. (Les valeurs propres et les vecteurs propres sont calculés à partir de la sous-routine EIGRF de la librairie IMSL.)

Le test a été effectué pour chacune des observations. Les résultats se retrouvent au tableau 3 pour le trimestre 1987.3 et sont représentatifs de l'ensemble de l'échantillon. Dans le cas canadien, trois valeurs propres sont négatives et (asymptotiquement) statistiquement significatives au seuil de .05. Une est positive mais non significative. La dernière est positive et statistiquement significative au seuil de .05. La négativité de la matrice des effets-prix compensés est ainsi rejetée. Puisque la symétrie et la négativité sont rejetées, les données canadiennes rejettent la caractérisation individuelle de la demande agrégée.

TABLEAU 3

VALEURS PROPRES ET STATISTIQUES *t* ASYMPTOTIQUES ASSOCIÉES
À LA MATRICE DES EFFETS-PRIX COMPENSÉS
POUR LE TRIMESTRE 1987:3.

Canada		Québec	
μ	$\mu/(\text{avar } \mu)^{1/2}$	μ	$\mu/(\text{avar } \mu)^{1/2}$
- 0.221	- 11.34	- 0.260	- 7.57
- 0.047	- 2.09	- 0.133	- 0.93
- 0.163	- 7.47	- 0.105	- 9.22
0.047	0.91	0.061	1.89
0.017	2.03	0.023	1.30

Dans le cas du Québec, deux valeurs propres sont négatives et statistiquement significatives. Une est négative mais non significative. Les deux dernières sont positives. L'une d'elles n'est jamais significative et l'autre n'est pas significative dans 100 des 110 observations[6]. Les données québécoises ne rejettent

6. Il est intéressant de noter que neuf de ces dix observations présentant une valeur propre positive significative se retrouvent entre 1962.1 et 1964.2.

pas la symétrie et ne rejettent pas la négativité de la matrice des effets-prix compensés sauf en tout début de période. Nous concluons que les données québécoises ne rejettent pas la caractérisation individuelle.

5.2 *Test de la caractérisation de Hildenbrand/Grandmont*

Dans le cas de la caractérisation de Hildenbrand/Grandmont, il ne faut tester que la négativité de la matrice des effets-prix non compensés. Les valeurs propres de la transformation symétrique de cette matrice, $(1/2)[(\Gamma - wv' - W) + (\Gamma - wv' - W)']$, ainsi que leurs statistiques de Student asymptotiques, évaluées à la période 1987 :3, sont présentées au tableau 4.

TABLEAU 4

VALEURS PROPRES ET STATISTIQUES t ASYMPTOTIQUES ASSOCIÉES À LA MATRICE DES EFFETS-PRIX NON COMPENSÉS POUR LE TRIMESTRE 1987:3.

Canada		Québec	
μ	$\mu/(\text{avar}\ \mu)^{1/2}$	μ	$\mu/(\text{avar}\ \mu)^{1/2}$
- 0.267	- 6.84	- 0.322	- 3.19
- 0.210	- 6.23	- 0.256	- 5.19
- 0.045	- 1.94	- 0.036	- 0.98
- 0.102	- 24.25	- 0.101	- 8.45
0.036	1.11	0.055	2.08

Pour le Canada, trois des cinq valeurs propres sont négatives et individuellement (asymptotiquement) statistiquement significatives alors qu'une quatrième est négative mais non significative. La cinquième est positive mais non significative. La négativité de la matrice des effets-prix ne peut donc être rejetée. Les données canadiennes ne rejettent donc pas la caractérisation de la demande agrégée de Hildenbrand/Grandmont.

CONCLUSION

Nous avons testé deux caractérisations alternatives de la demande agrégée : la caractérisation individuelle et celle de Hildenbrand/Grandmont. À partir de données trimestrielles pour le Canada et le Québec, nous avons estimé deux systèmes complets de demandes selon le modèle AIDS. Nous ne pouvons rejeter la propriété d'homogénéité ce qui implique que les propriétés de base des systèmes de demandes sont respectées (rappelons que l'additivité est vérifiée par construction). Dans le cas du Canada, nous rejetons la caractérisation individuelle mais nous ne pouvons rejeter la caractérisation de Hildenbrand/Grandmont.

Dans la cas du Québec, nous obtenons le résultat contraire. Sur la base de ces résultats, nous concluons que les consommateurs québécois ont un comportement plus homogène que ceux du Canada pris comme un tout, suffisamment homogène pour permettre à la caractérisation individuelle de demeurer valide au niveau agrégé. De leur coté, les consommateurs canadiens ne sont pas suffisamment homogènes pour permettre une telle agrégation, mais il demeure que la caractérisation de Hildenbrand/Grandmont ne peut être rejetée. Cette dernière caractérisation constitue une alternative quand la caractérisation individuelle est rejetée par les données. Les tests de négativité permettent de trouver le niveau d'agrégation approprié aux données.

ANNEXE

A. DIFFÉRENTIELLE DE LA DEMANDE AGRÉGÉE MOYENNE

De façon à écrire la différentielle de la demande agrégée, commençons par réécrire l'équation (1) comme suit :

$$dx_i = K_i dp + \left[k_i - \bar{k}\right]p'\,dx_i + \bar{k}p'\,dx_i, \tag{30}$$

$$\left[I - \left[k_i - \bar{k}\right]p'\right]dx_i = K_i dp + \bar{k}p'\,dx_i, \tag{31}$$

où $\bar{k} = (1/n)\sum_i^n k_i$ est l'effet-revenu moyen, et n est le nombre total de consommateurs dans l'économie. Maintenant, faisons la somme de (31) sur les n consommateurs, divisons par n; notons $\bar{K} = (1/n)\sum_i^n K_i$, la matrice des effets-prix compensés moyens, $dx = (1/n)\sum_i^n dx_i$, la différentielle de la demande moyenne, réécrivons $dx_i = \Delta_i\, dx$, où Δ_i est une matrice diagonale qui exprime dx_i comme une fraction de dx, en autant que dx est différent de zéro. L'équation (31) peut alors être réécrite comme suit :

$$\left[I - (1/n)\sum_i^n \left[k_i - \bar{k}\right]p'\right]dx = \bar{K}dp + \bar{k}p'\,dx. \tag{32}$$

Posons $\Delta = (1/n)\sum_i^n \Delta_i$. Il est immédiat de démontrer que $\sum_i^n \left[k_i - \bar{k}\right]p'\,\Delta = 0$, ainsi on peut écrire

$$(1/n)\sum_i^n \left[k_i - \bar{k}\right]p'\,\Delta_i = (1/n)\sum_i^n \left[k_i - \bar{k}\right]\left[p'\,\Delta_i - p'\,\Delta\right] \equiv \Omega. \tag{33}$$

La matrice Ω est une matrice de covariance entre les effets-revenu et le revenu réel qui découle de la distribution des revenus et des préférences parmi les consommateurs. L'équation (32) peut se réécrire

$$[I - \Omega]dx = \bar{K}dp + \bar{k}p'\,dx. \tag{34}$$

On peut montrer que, par définition de Ω, $p'\Omega = 0$. De plus, la matrice $[I - \Omega]$ est régulière. Pour le voir supposons qu'elle soit singulière. Alors il existe un vecteur $\phi \neq 0$ tel que $\phi'[I - \Omega] = 0$. Cela implique que $\phi'\bar{K} = 0$ par (42) et ainsi $\phi' = \sigma p'$, $\sigma \in \Re$. Mais $p'[I - \Omega] = p'$, alors $\phi'[I - \Omega] = 0$ si et seulement si $\sigma = 0$, ou, de façon équivalente, si et seulement si $\phi = 0$, une contradiction. On peut donc écrire l'inverse de $[I - \Omega]$ comme suit :

$$[I - \Omega]^{-1} = [I - \Phi]. \tag{35}$$

(Remarque : $\Phi = -[I - \Omega]^{-1}\Omega$.) Il est aussi immédiat de montrer que $p'\Phi = 0$. Finalement, en utilisant cette inverse, (34) peut se réécrire

$$dx = [I - \Phi]\bar{K}dp + [I - \Phi]\bar{k}p'\,dx. \tag{36}$$

B. DESCRIPTION DES DONNÉES

1. *Sources des données*

CANADA

1. Population : Statistique Canada no 91-001, Table 5.
2. Dépenses personnelles en biens et services en dollars courants : Statistique Canada no 13-001, Tableau 7, et Statistique Canada no 13-533, Tableau 7.
3. Dépenses personnelles en biens et services en dollars constants de 1971 : Statistique Canada no 13-001, Tableau 8, et Statistique Canada no 13-533, Tableau 8.
4. Epargne personnelle : Statistique Canada no 13- 001, et Statistique Canada no 13-533.
5. Indice des prix à la consommation : Statistique Canada no 62-010, Tableau 8.
6. Taux d'intérêt, Rendement moyen des obligations (plus de 10 ans) : Revue de la Banque du Canada, Tableau F1.

QUÉBEC

1. Population : Statistique Canada no 91-001, Tableau 5.
2. Dépenses personnelles en biens et services en dollars courants : Bureau de la statistique du Québec, Hors série.

3. Epargne personnelle : Bureau de la statistique du Québec, Comptes économiques du Québec, Tableau 4.

4. Indice des prix à la consommation : Statistique Canada no 62-010, Tableau 8.

5. Taux d'intérêt, Rendement moyen des obligations (plus de 10 ans) : Revue de la Banque du Canada, Tableau F1.

2. *Manipulations des données*

Les indices de prix des biens et services sont calculés en divisant les dépenses en biens et services en dollars courants par les dépenses en dollars constants qui agissent en tant qu'indices de quantité. Le revenu, par définition, est la somme des dépenses en biens et services et de l'épargne personnelle. Tous les indices de quantité ainsi que le revenu sont divisés par la population de façon à obtenir des valeurs moyennes (ou per capita). Conformément à la logique du modèle, le prix de l'épargne (aussi appelée actifs financiers) est donné par le facteur d'escompte $1/(1+r)$ où r est le taux d'intérêt.

BIBLIOGRAPHIE

BARTEN, A.P. et V. BÖHM (1982), « Consumer Theory » ***in*** *Handbook of Mathematical Economics*, Vol.2} ed. K.J. ARROW et M.D. INTRILIGATOR. Amsterdam : North Holland.

BARTEN, A.P. et E. GEYSKENS (1975), « The Negativity Condition in Consumer Demand », *European Economic Review*, 6 : 227–260.

BRONSARD, C. (1983), « From Intertemporal Strong Quasi-Concavity to Temporary One », *Economics Letters*, 12 : 115–120.

BRONSARD, C. et L. SALVAS–BRONSARD (1986), « Commodity and Asset demands with and without Quantity Constraints in the Labour Market », *Journal of Applied Econometrics*, 1 : 185–208.

DEATON, A.S. et J. MUELLBAUER (1980), « An Almost Ideal Demand System », *American Economic Review*, 70 : 312–326.

DEBREU, G. (1974), « Excess Demand Functions », *Journal of Mathematical Economic*, 1 : 15–23.

DIEWERT, E.W. et T.J. WALES (1987), « Flexible Functional Forms and Global Curvature Conditions », *Econometrica*, 55 : 43–68.

GRANDMONT, J.-M. (1987), « Distribution of Preferences and the 'Law of Demand' », *Econometrica*, 55 : 155–161.

HILDENBRAND, W. (1983), « On the Law of Demand », *Econometrica*, 51 : 997–1019.

KORENMAN, S.D., P. OUELLETTE et J. WOOLDRIDGE (1988), « A Test of New Aggregate Demand Curvature Properties », Cahier de recherche du C.R.D.E. no 0188.

LAU, L.J. (1978), « Testing and Imposing Monotonicity, Convexity and Quasi-Convexity Constraints », *in Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications Vol.* 1, ed. M. FUSS et D. MCFADDEN. Amsterdam : North Holland.

MANTELL, R. (1974), « On the Characterization of Aggregate Excess Demand », *Journal of Economic Theory*, 7 : 348–353.

MOREY, E.R. (1986), « An Introduction to Checking Testing and Imposing Curvature Properties : The True Function and the Estimated Function », *Canadian Journal of Economics*, 19 : 207–235.

SAVIN, N.E. (1984), « Multiple Hypothesis Testing », *in Handbook of Econometrics*, ed. Z. GRILICHES et M.D. INTRILIGATOR. Amsterdam : North Holland.

SONNENSCHEIN, H. (1974), « Market Excess Demand Functions », *Econometrica*, 40 : 549–563.