L'Actualité économique

Les chaînes de Markov, la distribution des firmes suivant leur taille et la mobilité des entreprises

Alain Haurie

Volume 42, Number 3, October–December 1966

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1003365ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1003365ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Haurie, A. (1966). Les chaînes de Markov, la distribution des firmes suivant leur taille et la mobilité des entreprises. *L'Actualité économique*, *42*(3), 657–669. https://doi.org/10.7202/1003365ar

Analyse

Les chaînes de Markov, la distribution des firmes suivant leur taille et la mobilité des entreprises

La distribution des entreprises suivant leur taille est fortement dissymétrique à droite et obéit pour les grandes valeurs de la variable taille à la loi de Pareto : « Le nombre $N(y)$ de firmes ayant une taille supérieure à y est approximativement donné, quand y est grand, par : $N(y) = ay^{-p}$ ».

Plusieurs autres variables socio-économiques ont une distribution analogue. Pareto avait introduit cette loi à propos de la répartition des revenus personnels mais on la trouve, par exemple, sous la forme présentée ci-dessus, à propos de la distribution des villes suivant leur population [1]. On retrouve aussi cette distribution dans des domaines totalement étrangers à l'économique : en linguistique, en biologie et même, dans l'article de Simon [2], on peut la voir appliquée au nombre de publications faites par les professeurs d'Université. En biologie, la nature même des phénomènes étudiés conduit à considérer des processus de naissance et de mort qui engendrent une distribution stationnaire, c'est-à-dire qui se conserve au cours du temps. En physique, la diffusion corpusculaire suivant un mouvement brownien engendre aussi des distributions stationnaires,

1. Simon, H.-A., « On a Class of Skew Distribution Functions », *Biometrica*, No. 52, 1955.
2. *Op. cit.*

celles que l'on constate en physique macroscopique. Or en économique, la loi de Pareto s'est montrée particulièrement stable tout au long de périodes pourtant fertiles en bouleversements sociaux, aussi on peut dire, comme le fait M.-G. Kendall dans un commentaire sur l'article de Hart et Prais [3] que, peut-être, la raison de cette stabilité se trouve dans un mouvement, la loi de Pareto étant une distribution stationnaire résultant d'un proceessus stochastique.

On peut, en effet, imaginer une série de classes dans l'ensemble des tailles possibles pour une entreprise. Au cours du temps la taille d'une entreprise évoluant, celle-ci visitera différentes classes ; c'est ce mouvement des firmes à travers ces différentes classes que l'on suppose régi par un processus stochastique. Ce mouvement serait une « promenade aléatoire » si, à chaque période t, une firme pouvait croître d'une façon totalement indépendante des tailles qu'elle a eues ou qu'elle a au début de la période. Ce modèle d'évolution est peu vraisemblable. Par contre, un processus de Markov a plus de chances de bien représenter la réalité : on suppose que si la firme se trouve à la période t dans une classe i, la probabilité qu'elle se trouve à la période $t+1$ dans la classe j ne dépend que de sa situation à la période t, c'est-à-dire de i, et non de sa situation aux périodes $t-1$, $t-2$.... Seul le passé immédiat a influé sur l'état présent, ou bien encore, la taille présente d'une firme influe seule sur taille qu'elle aura à la prochaine période. En termes de probabilités conditionnelles on aura, si i et j sont des indices repérant les classes :

$$i,\ j = 1, 2, 3, \ldots$$

et si $X(t)$ est une variable aléatoire, pouvant prendre les valeurs de i, qui représente la situation d'une firme à l'époque t :

$$\begin{aligned} P[X(t+1) = j \mid X(t) = i, X(t-1) = i_1, \ldots, X(t-m) = i_m] \\ = P[X(t+1) = j \mid X(t) = i] = p_{ij}^{tt+1} \end{aligned}$$

Ce processus est entièrement défini quand on connaît les probabilités de passage d'une classe i à une classe j, de la période t à la période $t+1$, que l'on a appelées : p_{ij}^{tt+1}. Le temps intervient de façon discrète, on parle alors de « chaîne de Markov ». Si les

3. Hart, P.-E. et Prais, S.-J., « The Analysis of Business Concentration », *Journal of the Royal Statistical Society*, 1956.

probabilités de passage sont constantes dans le temps, c'est-à-dire si quel que soit t :

$$p_{ij}^{tt+1} = p_{ij}$$

on a une chaîne de Markov homogène dans le temps qui est donc entièrement définie par la connaissance des probabilités de passage p_{ij} d'une classe i à une classe j, d'une période à la suivante.

Une chaîne de Markov, homogène dans le temps, peut engendrer une distribution stationnaire dans les différentes classes ; D.-G. Champernowne a le premier tenté d'expliquer la distribution parétienne des revenus en utilisant un modèle de chaîne de Markov homogène [4]. D'autres auteurs, Wold et Whittle [5] ou Sargan [6], ont utilisé des modèles de processus de Markov, continus dans le temps et pouvant prendre des états dans un ensemble continu pour expliquer la distribution parétienne de la fortune. En toute rigueur, une firme peut croître à des époques t quelconques et la taille qu'elle peut avoir est un élément d'un ensemble continu de tailles, il faudrait donc envisager un modèle de processus continu dans le temps et dans les états possibles. Mais, d'autre part, on entend que ce modèle soit sujet à estimation, c'est-à-dire à confrontation avec une situation réelle observée ; comme les statistiques sont données sur une base annuelle dans la plupart des cas, comme, au surplus, on avance que les firmes ne croissent pas de façon continue mais passent par saut d'un optimum de taille à un autre, le modèle de chaîne de Markov doit suffire à bien représenter le phénomène. Nous allons, dans les deux paragraphes qui suivent, préciser la notion de distribution stationnaire résultant d'une chaîne de Markov homogène dans le temps et considérer la mesure de la mobilité que l'on peut déduire de la connaissance des probabilités de passage.

Chaînes de Markov et distribution stationnaire

Imaginons une chaîne de Markov homogène dans le temps où $x(t)$ ne peut prendre que deux valeurs, 1 ou 2, à chaque époque.

4. Champernowne, D.-G., « A Model of Income Distribution », *The Economic Journal*, juin 1953.
5. Wold, H.-O.-A. et Whittle, P.-A., « Model Explaining the Pareto Law of Wealth Distribution », *Econometrica*, octobre 1957.
6. Sargan, J.-D., « The Distribution of Wealth », *Econometrica*, octobre 1957.

On définit :

$$p_{11} = P[X(t+1) = 1 \mid X(t) = 1]$$
$$p_{12} = P[X(t+1) = 2 \mid X(t) = 1]$$
$$p_{21} = P[X(t+1) = 1 \mid X(t) = 2]$$
$$p_{22} = P[X(t+1) = 2 \mid X(t) = 2]$$

Ces quatre probabilités de passage d'un état à l'autre, d'une période à l'autre, définissent complètement la chaîne. On les dispose en une matrice carrée dont les lignes représentent l'état à l'instant t tandis que les colonnes représentent l'état à l'instant $t+1$, chaque élément de la matrice étant la probabilité de passage d'un état à l'autre de l'époque t à l'époque $t+1$

$$A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

A est la matrice des probabilités de passage ; c'est une matrice stochastique telle que la somme des éléments de chaque ligne vaut 1, puisqu'à la période $t+1$ on se trouve certainement dans l'état 1 ou l'état 2. Imaginons ainsi que suivant ce modèle élémentaire, chaque firme ne puisse se trouver que dans une des deux classes (1 et 2) et que les évolutions des firmes correspondent à cette chaîne de Markov. p_{ij} représenterait alors la proportion moyenne de firmes passant en une période de la taille i à la taille j, $(i, j = 1, 2)$. Si à l'instant $t = 0$, la répartition des firmes dans les classes était :

$$[n_1(0),\ n_2(0)]\ ;\quad n_1(0) + n_2(0) = 1$$

à l'instant $t = 1$, elle serait :

$$n_1(1) = p_{11}n_1(0) + p_{21}n_2(0)$$
$$n_2(1) = p_{12}n_1(0) + p_{22}n_2(0)$$

et on aura encore :

$$n_1(1) + n_2(1) = 1$$

c'est-à-dire que l'on obtient la ligne $[n_1(1)\ \ n_2(1)]$
par produit matriciel à droite de $[n_1(0)\ \ n_2(0)]$ par A

$$[n_1(1)\ \ n_2(1)] = [n_1(0)\ \ n_2(0)] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

On a ainsi de période en période :

$$
\begin{aligned}
[n_1(t+1) \;\; n_2(t+1)] &= [n_1(t) \;\; n_2(t)] \times A \\
&= [n_1(0) \;\; n_2(0)] \times A^{t+1}
\end{aligned}
$$

et toujours : $$n_1(t+1) + n_2(t+1) = 1$$

Si, à partir d'une date τ, on a :

$$[n_1(t+1) \;\; n_2(t+1)] = [n_1(t) \;\; n_2(t)] \; ; \; t \geqq \tau$$

on a atteint une distribution stationnaire, qui se conservera au cours du temps. Pour préciser cette notion de distribution stationnaire, considérons les deux distributions successives :

$$
\begin{aligned}
[n_1(t) \;\; n_2(t)] &= [n_1(0) \;\; n_2(0)] \times A^t \\
[n_1(t+1) \;\; n_2(t+1)] &= [n_1(0) \;\; n_2(0)] \times A^{t+1}
\end{aligned}
$$

Elles sont identiques si à partir d'un moment τ : $A^{t+1} = A^t$. Illustrons cela par un exemple numérique très simple :

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.333 \\ 0.500 & 0.500 \end{bmatrix}$$

$$; \; A^2 = \begin{bmatrix} 0.611 & 0.289 \\ 0.583 & 0.417 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0.602 & 0.398 \\ 0.597 & 0.403 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0.600 & 0.400 \\ 0.600 & 0.400 \end{bmatrix}$$

à partir de A^4 toutes les puissances de A seront identiques :

$$A^t = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = B \text{ si } \tau \geqq 4$$

On voit que les deux lignes de A^τ sont alors identiques ce qui est un résultat général qui s'énonce ainsi : « Si une matrice A est régulière, A^t tend, quand τ augmente, vers une limite B composée de lignes identiques à éléments tous positifs ».

Il est maintenant facile de vérifier que la distribution stationnaire, dans ce cas, est [0.6 0.4] quelle que soit la distribution d'origine $[n_1(0) \quad n_2(0)]$ [7]. La distribution stationnaire est identique à chaque ligne de B, elle est ainsi indépendante de la distribution d'origine. Ainsi, d'après les modèles utilisant des chaînes de Markov, la concentration des firmes résulte d'une distribution stationnaire de leur taille due à la mobilité de ces entreprises. La matrice A est un indicateur de la mobilité des firmes au cours d'une période, la matrice A^t quand τ est grand est un indicateur de l'effet asymptotique de cette mobilité sur la distribution des entreprises.

Les modèles de processus de Markov engendrant des distributions stationnaires parétiennes

Ces modèles se résument à des hypothèses faites sur les probabilités de passage moyennant quoi une distribution stationnaire de type parétien ou log normale est obtenue. Dans le cas où on choisit un modèle de chaîne de Markov avec un ensemble fini ou dénombrable d'états, c'est-à-dire de classes, les hypothèses peuvent porter sur la définition de ces classes et aussi sur la structure de la matrice des probabilités de passage.

Hart et Prais considèrent une chaîne de Markov où figurent des classes dont la taille suit une progression géométrique : la limite supérieure d'une classe est égale à deux fois sa limite inférieure. La loi des effets proportionnels est ainsi introduite dans le modèle. On suppose, en effet, que si un événement e influe sur un objet de taille x en transférant cette taille en $\xi_e x$, il influera sur un objet de taille y en le transformant en $\xi_e y$. Les grandes entreprises ont alors plus de chances de grandes variations absolues que les petites ce qui peut paraître normal. Ce découpage des classes avait été choisi par Champernowne quand il étudia des modèles de distribution des revenus et c'est au fond le dénominateur commun de tous les modèles présentés qui conduisent à des distributions stationnaires fortement dissymétriques de type log normale de Pareto, de Yule ou simplement asymptotiquement parétiennes. Suivant les hypothèses faites sur les probabilités de passage, on obtient l'une ou l'autre de ces lois. Une

---

7. Il est facile de vérifier que, si $t \geq 4$: $n_1(0) + n_2(0) = 1$
$[n_1(t) \quad n_2(t)] = [n_1(0) \quad n_2(0)] \times A^t = [n_1(0) \quad n_2(0)] \times B = [n_1(0) \; n_2(0)] \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = [0.6 \quad 0.4]$.

difficulté particulière aux modèles de chaîne de Markov appliqués à l'évolution des tailles des firmes est la nécessité de tenir compte de la disparition et de la naissance de certaines firmes. Dans les articles de I.G. Adelman [8] et de Hart et Prais [9], on considère une classe fictive où vont les entreprises qui disparaissent et d'où viennent celles qui naissent ; cette classe fictive n'a cependant aucune signification concrète et on doit l'éliminer quand on a obtenu la distribution stationnaire. D'autre part, le découpage des classes suivant une progression géométrique de raison deux peut sembler arbitraire ; la portée du modèle augmenterait si on établissait les classes à partir de considérations économiques faites « sur le terrain » qui détermineraient les optimums des tailles sur lesquels on centrerait les classes. Si la loi des effets proportionnels restait vérifiée, on aurait encore des classes dont les largeurs suivraient une progression géométrique mais, de toute façon, on aurait donné une signification précise aux classes, ce qui faciliterait beaucoup l'interprétation de la matrice stochastique A.

La mesure de la mobilité des firmes

Les modèles de chaîne de Markov donnent un rôle prédominant à la mobilité des firmes. C'est elle qui détermine la matrice des probabilités de passage A et par là même la distribution stationnaire ; c'est donc elle qui est responsable de l'état de concentration qui y figure. Une action sur la mobilité pourra entraîner une modification de la concentration, de même qu'un état de concentration que l'on suppose immuable pourra entraîner une modification de la mobilité. La notion de mobilité est cependant plus précise que celle de concentration : deux états de concentration semblables peuvent être le résultat de distributions stationnaires engendrées par des chaînes de Markov différentes ; on pourra comparer ces deux situations au moyen des indices de mobilité que M. Prais a proposés [10].

Dans la théorie des chaînes de Markov, on a introduit une distinction entre plusieurs catégories d'états, où figurent entre autres :

8. Adelman, Irma-G., « A Stochastic Analysis of the Size Distribution of Firms », *Journal of the American Statistical Association*, décembre 1958.

9. Hart et Prais, *op. cit.*

10. Prais, S.-J., « Measuring Social Mobility », *Journal of Royal Statistical Society*, 1955.

Les états isolés. — Si la matrice A est de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

où B et C sont des matrices carrées tandis que 0 est une matrice dont tous les éléments sont nuls, on a alors deux ensembles d'états isolés auxquels correspondent les matrices de passage B et C : par exemple, si A a la forme :

$$A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

des mouvements peuvent se faire entre les états 1 et 2 ou 3 et 4 et non entre 1 et 3, par exemple, car il y a une probabilité de passage nulle. On a en fait deux chaînes de Markov distinctes définies par les sous-matrices B et C.

Les états transitoires. — Si A a la forme :

$$A = \begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

où B et C sont des matrices carrées et 0 est une matrice nulle. Comme il est permis de sortir des états relevant de la matrice B, mais pas d'y revenir, la probabilité de ces états ne cesse de décroître au cours du déroulement du processus, on les appelle donc transitoires.

Les états récurrents. — Un état i est récurrent si la probabilité de retourner à l'état i, quand on est parti de ce même état, après un temps fini est égale à 1.

Si la matrice A est régulière et irréductible, c'est-à-dire si elle ne peut pas se mettre sous une des deux formes

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

et si son déterminant est différent de 0, on a déjà vu que A^t tend à avoir toutes ses lignes identiques, chaque ligne représentant la distribution stationnaire ; tous les états qui figurent dans la chaîne sont alors récurrents. La présence d'états isolés ou transitoires peut être considérée comme cas extrême quand on considère le processus d'évolution de la taille des firmes. Dans chacun de ces deux cas, il n'est pas nécessaire d'avoir un indice de mesure de la mobilité pour s'apercevoir que tout n'est pas au mieux. Par contre, dans le cas où la chaîne de Markov a une matrice A régulière irréductible, on peut être amené à comparer la mobilité des firmes suivant ce processus à celle qui résulterait d'une matrice de passage différente A′. M. Prais a proposé un indice de mobilité qui est basé sur les remarques suivantes :

— Un ensemble de firmes parfaitement mobiles est tel que la probabilité de passage d'une classe à une autre est indépendante de la classe d'origine et ne dépend que de la classe de destination. La matrice des probabilités de passage doit alors être constituée de lignes toutes identiques.

— Si un ensemble de firmes présente une certaine immobilité dans la classe i, cela entraîne que p_{ii}, probabilité de rester dans la même classe au cours d'une période, est supérieure à ce qu'elle serait dans une société équivalente constituée d'un ensemble de firmes parfaitement mobiles.

M. Prais compare alors le temps moyen passé par une firme dans la classe i au temps moyen que cette firme aurait passé dans cette même classe si on avait eu une société équivalente parfaitement mobile. Le rapport de ces deux temps moyens est une mesure de l'immobilité caractéristique de la classe i. Le calcul du temps moyen passé dans la classe i est simple : s'il y a n_i firmes dans la classe i à l'instant $t = 0$, à l'instant $t = 1$ il y a un nombre $n_i p_{ii}$ de firmes qui sont restées dans la classe, à l'instant $t = 2$ $n_i p_{ii}^2$ et à l'instant $t = m$, $n_i p_{ii}^m$. On peut voir que le temps total moyen passé par les n_i firmes dans la classe i avant d'en sortir est donné par :

$$n_i T_i = n_i + n_i p_{ii} + n_i p_{ii}^2 + \dots = \frac{n_i}{1 - p_{ii}}$$

et donc une firme aura passé dans la classe i le temps moyen :

$$T_i = 1 + n_i p_{ii} + n_i p_{ii}^2 + \dots = \frac{1}{1 - p_{i}}$$

M. Prais établit aussi l'écart type de ce temps

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{p_{ii}}}{1 - p_{ii}}$$

Le choix d'une société parfaitement mobile équivalente à celle que l'on a se fait en prenant pour matrice des probabilités de passage la matrice constituée des lignes définissant les distributions stationnaires, c'est-à-dire la matrice $B = A^{\tau}$ (où τ est suffisamment grand pour que $A^{\tau} = A^{\tau+1}$). Si π_i représente la probabilité attachée à la $i^{ème}$ classe dans la distribution stationnaire, le temps moyen passé par une firme dans cette classe, dans le cas d'une société parfaitement mobile équivalente à la précédente sera :

$$T'_i = \frac{1}{1 - \pi_i}$$

l'indice d'immobilité de la classe i sera donc

$$I_i = \frac{T_i}{T'_i} = \frac{1 - \pi_i}{1 - p_{ii}}$$

Cet indice a deux caractéristiques qui peuvent en affaiblir l'utilité : la mobilité qu'il mesure est particulière, c'est celle qui occasionne la stagnation dans une classe ; on peut imaginer une autre sorte d'immobilité qui consisterait en une diffusion très lente, une firme ayant quitté la classe i à la période t aurait alors de fortes chances de s'y retrouver à une période $t + 1$, $t + 2$, etc... ; une telle immobilité n'est pas repérée par l'indice I parce qu'il n'est construit qu'avec les termes de la diagonale principale de la matrice A. M. Prais a proposé un autre indice, que nous verrons plus loin, qui fait intervenir l'ensemble des éléments de la matrice de passage. Une autre caractéristique de cet indice est qu'il prend comme état idéal celui de parfaite mobilité ; or, il est à remarquer que M. Prais a introduit cette mesure de l'immobilité à propos du mouvement des chefs de famille, d'une génération à l'autre, à travers les classes sociales ; on conçoit alors que l'état idéal puisse être celui où quel que soit l'état social du père, le fils a la même probabilité π_i d'accéder à une classe quelconque i ; dans le cas du mouvement des firmes, une telle mobilité est non seulement inconcevable pour une période courte mais aussi peu souhaitable.

C'est pourquoi le second indice proposé par M. Prais nous semble plus intéressant pour le problème qui nous intéresse. Les probabilités de passage en une seule période d'une classe dans une autre sont données dans la matrice A ; la matrice $A^2 = A \times A$ donne les probabilités de passage d'une classe à une autre en deux périodes : A^τ les probabilités de passage en τ périodes, etc. Si A est régulière on a déjà vu que pour τ assez grand les A^τ sont constantes et ont des lignes identiques définissant la distribution stationnaire. Cela veut dire qu'en τ périodes il y a mobilité parfaite, car la probabilité de se trouver dans une classe i en $t + \tau$ est indépendante de la classe où on se trouve à l'époque t. Il faut insister sur ce point, supposer qu'il y a une distribution stationnaire c'est aussi supposer qu'il y a cette diffusion qui entraîne la mobilité parfaite en un nombre fini, τ, de période. Suivant que τ est grand ou petit on aura une diffusion rapide ou lente ; on peut mesurer la rapidité de cette diffusion au fur et à mesure que les périodes se passent en calculant, pour chaque classe i et chaque nombre de périodes n l'indice

$$J_i^{(n)} = \frac{p_{ii}^{(n)}}{\pi_i}$$

— $p_{ii}^{(n)}$ est le $i^{ème}$ élément diagonal de A^n et représente donc la probabilité, partant de i de se retrouver en i, n périodes plus tard après avoir suivi un chemin quelconque.

— π_i est la probabilité affectée à l'état i dans la distribution stationnaire, c'est-à-dire dans chaque ligne de A^τ ; c'est donc la probabilité de retour à l'état i quand on est assez éloigné de l'époque initiale, $(t \geqq \tau)$, c'est-à-dire quand on a atteint la mobilité parfaite.

On remarque que lorsque $n = 1$ cet indice ne contient pas plus d'information que le précédent car encore seuls interviennent les éléments diagonaux de A. Mais pour $n = 2$, on a

$$p_{ii}^{(2)} = \sum_k p_{ik}\, p_{ki}$$

pour $n = 3$

$$p_{ii}^{(3)} = \sum_k p_{ik}\, p_{ki}^{(2)} = \sum_k \sum_e p_{ie}\, p_{ek}\, p_{ki}$$

et ainsi de suite. Dans ces indices figurent donc successivement toutes les probabilités de passage qui constituent A. Comme nous l'avons vu $J_i^{(n)}$ tend vers 1 quand n tend vers τ. La vitesse à laquelle les $J_i^{(n)}$, pour tous les i, tendent vers 1 quand n augmente, permet de comparer deux types d'évolution définis par deux matrices des probabilités de passage différentes.

Ces modèles de chaînes de Markov ont été aussi bien appliqués à l'ensemble des firmes cotées en bourse au Royaume-Uni [11] qu'à un secteur particulier, l'acier aux É.-U. [12]. Dans tous les cas un certain nombre de précautions devront être prises avant de bâtir le modèle. Le choix de la variable « taille » devra être fait de façon à ce que la mobilité ait été homogène dans les périodes qui vont servir à l'estimation des probabilités de passage. Le choix des classes posera encore de nouveaux problèmes, et c'est certainement dans ce stade préliminaire que se trouvent les plus grandes difficultés.

Alain HAURIE,
professeur à l'École des Hautes Études commerciales (Montréal)

11. Wold et Whittle, *op. cit.*
12. Adelman, *op. cit.*

BIBLIOGRAPHIE

ADELMAN, Irma-G., « A Stochastic Analysis of the Size Distribution of Firms », *Journal of the American Statistical Association*, décembre 1958.

CHAMPERNOWNE, D.-G., « A Model of Income Distribution », *The Economic Journal*, juin 1953.

HART, P.-E. et PRAIS, S.-J., « The Analysis of Business Concentration », *Journal of the Royal Statistical Society*, 1956.

LYDALL, H.-F., « The Distribution of Employment Incomes », *Econometrica*, 1959, 27.

PRAIS, S.-J., « Measuring Social Mobility », *Journal of the Royal Statistical Society*, 1955.

SARGAN, J.-D., « The Distribution of Wealth », *Econometrica*, octobre 1957.

SIMON, H.-A., « On a Class of Skew Distribution Functions », *Biometrica*, no 52, 1955.

SIMON, H.-A. et BONINI, C.-P., « The Size Distribution of Business Firms », *The American Economic Review*, septembre 1958.

WOLD, H.-O.-A. et WHITTLE, P., « A Model Explaining the Pareto Law of Wealth Distribution », *Econometrica*, octobre 1957.