L'Actualité économique

L'épargne de précaution et les changements de risque
Precautionary Saving and Changes in Risk

Louis Eeckhoudt, Henri Sneessens et Francis Calcoen

Volume 63, numéro 2-3, juin–septembre 1987

Incertain et information

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601419ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601419ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Citer cet article

Eeckhoudt, L., Sneessens, H. & Calcoen, F. (1987). L'épargne de précaution et les changements de risque. *L'Actualité économique*, *63*(2-3), 213–224. https://doi.org/10.7202/601419ar

Résumé de l'article

Dans ce papier, nous examinons comment l'épargne de précaution réagit à des accroissements de risque sur les revenus futurs quand le rendement retiré de l'épargne est lui aussi soumis à un aléa. Nous montrons que, sous un ensemble d'hypothèses plausibles, les résultats obtenus lorsque l'épargne rapporte un rendement certain sont transposables au cas du rendement aléatoire.

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 63, n° 2-3, juin-septembre 1987

L'ÉPARGNE DE PRÉCAUTION ET LES CHANGEMENTS DE RISQUE

Louis EECKHOUDT*
Henri SNEESSENS**
Francis CALCOEN***

Dans ce papier, nous examinons comment l'épargne de précaution réagit à des accroissements de risque sur les revenus futurs quand le rendement retiré de l'épargne est lui aussi soumis a un aléa. Nous montrons que, sous un ensemble d'hypothèses plausibles, les résultats obtenus lorsque l'épargne rapporte un rendement certain sont transposables au cas du rendement aléatoire.

Precautionary Saving and Changes in Risk. — In this paper, we examine how precautionary saving reacts to increases in future income risks when the return on savings itself is random. We show that results obtained with a sure rate of return on assets carry over to the uncertainty case under a set of not too restrictive assumptions.

INTRODUCTION

Alors que la littérature économique a fait une place de choix à l'analyse du motif de précaution dans la demande de *monnaie*[1] les travaux théoriques relatifs à l'*épargne* de précaution sont plutôt rares. Bien que les recherches consacrées

*Facultés catholiques de Mons et de Lille et centre HEC-ISA.
**Universités catholiques de Louvain et de Lille.
***Chercheur CNRS au CRESGE (Lille) et professeur aux Facultés catholiques de Lille.

Ce travail a bénéficié du soutien financier du Commissariat général au Plan. Les auteurs remercient E. Briys, G. Dionne et P. Hansen avec qui ils ont régulièrement discuté des problèmes proches de ceux abordés ici. En outre, les commentaires de deux lecteurs anonymes ont contribué à l'amélioration du texte.

1. Voir notamment Cropper [1976], Gray et Parkin [1973], Lorie [1980], Waud [1975] et Whalen [1966].

aux choix de consommation intertemporels dans un environnement d'incertitude (Drèze-Modigliani [1972], Leland [1968], Sandmo [1969-1971]) touchent indirectement ce sujet, il est intéressant de remarquer que – au mieux de notre connaissance – seul l'article de Leland fait explicitement référence au concept d'épargne de précaution.

Comme l'incertitude sur les revenus futurs a tendance à s'accroître pour beaucoup d'individus (par exemple, accroissement du risque de chômage ou de réduction des allocations), il est vraisemblable que le motif de précaution tienne une place grandissante dans le total de l'épargne des ménages concernés. C'est pourquoi nous présentons dans cet article une analyse théorique de ce type d'incitation à l'épargne. Dans la première section, nous rappelons le modèle de Leland qui a étudié le motif de précaution uniquement lorsque l'épargne est placée dans un actif sûr. Ce rappel nous permet d'introduire la notation et les instruments mathématiques utilisés dans la section suivante. Celle-ci est consacrée à l'extension du modèle de Leland au cas plus réaliste où les placements ont un rendement aléatoire[2]. Ce cas est particulièrement intéressant. En effet, dans le modèle de Leland (placement à rendement sûr), l'individu se protège contre les aléas de son revenu futur en épargnant davantage, ce qui augmente son espérance de consommation future. Lorsque le rendement des placements devient également aléatoire, un accroissement de l'épargne a deux effets contradictoires : comme indiqué plus haut la consommation future espérée croît mais aussi le risque de perte en capital engendré par la volatilité du rendement. Alors que le premier effet est bénéfique, le second réduit le bien-être de l'individu riscophobe. En fait, nous montrons dans cet article que sous certaines hypothèses pas trop restrictives, l'effet de risque est dominé par l'effet d'espérance et que le motif de précaution conserve son actualité même lorsque l'épargne a un rendement risqué.

SECTION 1 – ÉPARGNE DE PRÉCAUTION ET PLACEMENTS À RENDEMENT CERTAIN

Soit un individu dont la fonction d'utilité (U) s'écrit

$$U = U(C_1, C_2) \tag{1.1}$$

où C_1 et C_2 sont les niveaux de consommation présente et future. Bien entendu, les utilités marginales U_1 et U_2 sont positives tandis que la concavité de U entraîne U_{11}, $U_{22} < 0$ et $U_{11}U_{22} - U^2{}_{12} > 0$.

Si la containte budgétaire a la forme

$$C_2 = (y_1 - C_1)(1+r) + y_2 \tag{1.2}$$

2. Dans un article important. A. Sandmo [1969] a étudié la situation plus générale où un actif sûr est en concurrence avec un actif risqué pour le placement de l'épargne. Toutefois, son analyse de statique comparative porte sur des questions bien différentes de celles abordées ici.

où

y_1 = revenu courant certain
y_2 = revenu futur certain
r = rendement certain des placements,

la consommation courante optimale C_1^* est donnée par la solution de la condition de premier ordre :

$$U_1/U_2 = 1 + r \tag{1.3}$$

On montre alors que C_1 est un bien normal si

$$[U_{12} - (1+r)U_{22}]_{C_1^*} > 0 \tag{1.4}$$

Nous supposerons à l'avenir que cette condition est satisfaite pour toute combinaison de y_1 et y_2 et nous introduisons maintenant l'incertitude d'abord de manière «globale» (I.1) et ensuite de façon «marginale» (I.2).

I.1. *Effet d'un changement global de risque sur* y_2

Si un aléa, dénoté $\gamma\tilde{\varepsilon}$, s'ajoute à y_2, la contrainte budgétaire s'écrit :

$$\tilde{C}_2 = (y_1 - C_1)(1+r) + y_2 + \gamma\tilde{\varepsilon} \tag{1.5}$$

avec pour l'instant $\gamma=1$. Nous supposerons en outre que $E(\tilde{\varepsilon})=0$,

Dans la mesure où l'individu maximise sont espérance d'utilité, son problème d'optimisation s'écrit :

$$\underset{C_1}{\text{Max}} \int U[(C_1, (y_1 - C_1)(1+r) + y_2 + \gamma\varepsilon)]dF(\varepsilon) \tag{1.6}$$

où $F(\varepsilon)$ est la fonction de répartition de $\tilde{\varepsilon}$.

La condition de premier ordre attachée à (1.6) est :

$$\int [U_1 - (1+r)U_2]\, dF(\varepsilon) = 0 \tag{1.7}$$

et nous dénotons par C_1^{**} la valeur optimale de C_1 dans ce problème. Comme l'aversion au risque est réflétée par la concavité de U, la condition du premier ordre nous livre un optimum global unique.

Pour que l'épargne de précaution existe, il faut que C_1^{**} soit inférieur à C_1^*. En effet, à ce moment, l'accroissement d'épargne ne peut être attribué qu'au caractère aléatoire du revenu futur dont l'espérance n'a pas varié.

Une condition nécessaire et suffisante pour obtenir $C_1^{**} < C_1^*$ est que l'utilité attendue évaluée en $C_1 = C_1^*$ soit une fonction inverse de C_1 (voir appendice 1), c'est-à-dire :

$$\int [U_1 - (1+r)U_2]_{C_1^*}\, dF(\varepsilon) < 0 \tag{1.8}$$

En vertu de l'inégalité de Jensen, si $[U_1 - (1+r) U_2]_{C_1^*}$ (qui est une fonction de ε) est concave en ε, on obtient :

$$\int [U_1 - (1+r) U_2]_{C_1^*} \, dF(\varepsilon) < [U_1 - (1+r) U_2]_{C_1^*, \varepsilon = 0} \tag{1.9}$$

Or le membre de droite n'est rien d'autre que la condition du premier ordre de certitude et il vaut donc zéro. Nous concluons avec :

Proposition 1 : une condition suffisante pour qu'il y ait une épargne de précaution positive est :

$$[U_{122} - (1+r) U_{222}]_{C_1^*} < 0 \text{ pour tout } \varepsilon \tag{1.10}$$

Ce résultat – qui est donné par Leland à partir d'une démonstration moins générale – indique bien que l'aversion au risque (qui concerne les dérivées secondes de U) n'est pas une condition suffisante pour entraîner l'épargne de précaution : il faut en outre une condition sur les dérivées troisièmes pour garantir son existence.

Il est à remarquer que la condition (1.10) a beaucoup de chances d'être vérifiée. En effet, si l'aversion absolue $(-U_{22}/U_2)$ est décroissante en C_2, U_{222} est nécessairement positif. Pour garantir (1.10), il suffit alors que U_{122} soit non positif[3]. Or, précisément, une telle condition est vérifiée d'office pour les fonctions additives. En outre, si U n'appartient pas à cette classe de fonctions, on a aussi que U_{122} est négatif pour des fonctions d'utilité à élasticité constante (C.E.S.) du type :

$$U = [X_1^{\rho} + aX_2^{\rho}]^{1/\rho}$$

lorsque ρ est inférieur à 1 (ce qui garantit que l'individu est riscophobe).

Comme la fonction Cobb-Douglas est un cas particulier de la C.E.S., elle satisfait également (1.10). On perçoit ainsi que la condition (1.10) est probablement moins restrictive qu'elle ne paraît à première vue puisqu'elle est vérifiée en tout cas pour les fonctions d'utilité les plus couramment utilisées.

I.2 *Effet d'un changement marginal de risque sur* y_2

Jusqu'à présent, nous avons considéré un changement «global» d'incertitude c'est-à-dire le passage de la certitude ($\gamma = 0$) à l'incertitude ($\gamma > 0$). Nous terminons cette première section en examinant le cas d'un changement «marginal» de risque[4], c'est-à-dire le fait qu'une situation déjà risquée ($\gamma > 0$) le devient davantage ($\gamma' > \gamma$).

---

3. Leland [1968] dérive un résultat semblable à partir d'une démonstration moins générale basée sur une approximation de Taylor. En outre, la démonstration présentée ici sera encore utilisée dans la suite du texte.

4. Alors qu'un changement global de risque correspond au passage de la certitude à l'incertitude, le changement marginal est défini par le fait qu'une situation initialement risquée le devient un peu plus. Voir Sandmo [1971].

Pour ce faire, nous observons que le membre de gauche de (1.7) est une fonction notamment de C_1 et de γ. Nous appelons cette fonction $H(C_1, \gamma)$ et en prenant sa différentielle que nous égalisons à zéro, nous obtenons :

$$dC_1/d\gamma = (\partial H/\partial\gamma)/(-\partial H/\partial C_1) \tag{1.11}$$

Comme $\partial H/\partial C_1$ est en fait la dérivée seconde de $E[U]$ par rapport à C_1, cette expression est négative de sorte que :

$$\text{signe}\,(dC_1/d\gamma) = \text{signe}\,(\partial H/\partial\gamma).$$

Puisque

$$\partial H/\partial\gamma = \int [U_{12} - (1+r)\,U_{22}]_{C_1^*}.\,\varepsilon.\,dF(\varepsilon) \tag{1.12}$$

il s'agit donc d'analyser le signe de cette expression pour connaître celui de $dC_1^*/d\gamma$.

En vertu de l'hypothèse de normalité pour C_1 en certitude, l'expression entre crochets en (1.12) est toujours positive. Si, en outre, elle est décroissante en ε alors, on peut aisément montrer (voir appendice 3) que $\partial H/\partial\gamma$ est de signe négatif. Or, précisément, $[U_{12} - (1+r)\,U_{22}]_{C_1^*}$ décroissant en ε est équivalent à $[U_{122} - (1+r)\,U_{222}]_{C_1^*}$ négatif. On retrouve bien une condition identique à celle de la proposition 1 et nous résumons le résultat par :

Proposition 2 : lorsque le risque sur le revenu futur s'accroît, la consommation courante diminue (l'épargne de précaution augmente), si :

$$[U_{122} - (1+r)\,U_{222}]_{C_1^*} \text{ est négatif.}$$

On retrouve donc la même condition pour un changement global de risque que pour un changement marginal. Cette propriété vaut la peine d'être soulignée car elle ne se produit pas dans tous les contextes (voir par exemple Sandmo [1971]).

SECTION II - ÉPARGNE DE PRÉCAUTION ET PLACEMENTS À RENDEMENT ALÉATOIRE

Si les placements eux-mêmes ont un rendement aléatoire et si on suppose qu'il y a indépendance entre les deux aléas, le problème d'optimisation s'écrit :

$$\text{Max} \iint U(C_1, (y_1 - C_1)(1+r+\eta) + y_2 + \gamma\varepsilon)\,dF(\varepsilon)\,dG(\eta) \tag{2.1}$$

où η est une variable aléatoire d'espérance nulle avec fonction de répartition $G(\eta)$. Bien que η puisse prendre des valeurs négatives, on supposera que $G(\eta)$ est telle que $1+r+\eta$ reste toujours positif. Ceci correspond à l'hypothèse très plausible suivant laquelle au pire des cas (η aussi négatif que possible) l'individu ne peut pas perdre plus que le montant initialement placé.

Nous dénoterons par C_1^{***} la solution de (2.1). Le fait qu'une composante aléatoire s'ajoute au taux d'intérêt r nous amène à poser deux questions :

1. si $C_1^{**} < C_1^{*}$ (c'est-à-dire s'il y a épargne de précaution en présence d'un rendement certain des placements) ,C_1^{***} est-il lui aussi inférieur à C_1^{*}? En d'autres termes, le motif de précaution résiste-t-il à l'introduction d'un aléa sur le rendement des placements ?

2. comment C_1^{***} va-t-il réagir à un accroissement du risque relatif aux revenus futurs ?

Ces deux questions sont pertinentes car, a priori, le caractère aléatoire de r modifie considérablement l'environnement de l'individu.

Dans le modèle de la section précédente, $\widetilde{C}_2$ était donné par :

$$\widetilde{C}_2 = (y_1 - C_1)(1+r) + y_2 + \gamma\tilde{\varepsilon} \tag{2.2}$$

Dans ce cadre, lorsque l'individu développe son épargne de précaution (réduction de C_1), il résulte de (2.2) que $E(\widetilde{C}_2)$ s'accroît sans que la variance de $\widetilde{C}_2$ soit affectée. On retrouve donc bien le fondement du motif de précaution : l'individu se protège contre l'accroissement de γ en augmentant $E(\widetilde{C}_2)$ par la réduction de C_1.

Si, maintenant, un aléa frappe également r, le fondement du motif de précaution est moins clair. En effet, $\widetilde{C}_2$ s'écrit alors :

$$\widetilde{C}_2 = (y_1 - C_1)(1+r+\tilde{\eta}) + y_2 + \gamma\tilde{\varepsilon} \tag{2.3}$$

Lorsque, dans ces conditions, l'individu réduit C_1, il augmente non seulement $E(\widetilde{C}_2)$ mais aussi Var $(\widetilde{C}_2)$ à cause de l'hypothèse d'indépendance entre les aléas[5]. Dans ces conditions, il est beaucoup moins évident qu'il va réagir à l'accroissement de γ par une diminution de C_1 car celle-ci accroît encore le risque total attaché à la consommation future. L'individu est donc amené à faire un arbitrage entre l'accroissement de $E(\widetilde{C}_2)$ et celui de Var $(\widetilde{C}_2)$ ce qui explique pourquoi la réponse aux questions posées en 1. et 2. n'est pas a priori évidente et nécessite une analyse spécifique. Celle-ci va se développer en deux étapes bien distinctes. En II.1, pour un risque donné en $\tilde{\varepsilon}$ on étudie l'impact sur l'épargne d'un changement global de risque relatif au rendement des placements. Par contre, en II.2, on considère comme donné le risque associé au rendement des placements et on étudie l'impact sur C_1 d'un risque accru sur les revenus futurs.

II.1. *Comparaison entre C_1^{***} et C_1^{*}*

En utilisant la même technique que celle développée dans la section I et illustrée à l'Appendice 1, on obtient que :

5. Si η et ε étaient négativement corrélés, *Var* $(\widetilde{C}_2)$ pourrait diminuer quand C_1 diminue.

$$\int\int [(U_1-(1+r+\eta)\,U_2]_{C_1^*}\;dF(\varepsilon)\,dG(\eta)<0 <=> C_1^{***}<C_1^*.$$

Comme $\int [U_1 - (1+r+\eta)U_2]_{C_1^*}\, dF(\varepsilon)$ est bien évidemment une fonction de η, que nous dénotons $T(\eta)$, on obtient par l'inégalité de Jensen que si $T(\eta)$ est concave :

$$\int T(\eta)dG(\eta)< T(E(\tilde{\eta})) \tag{2.4}$$

Vu que $E(\tilde{\eta}) = 0$, le membre de droite en (2.4) n'est rien d'autre que T évalué au point $\eta = 0$, c'est-à-dire :

$$\int [U_1-(1+r)U_2]_{C_1^*}\, dF(\varepsilon)$$

et cette dernière expression est négative lorsqu'il y a épargne de précaution en présence d'un rendement certain sur les placements (voir Section I). Il en résulte que si $T(\eta)$ est concave en η, C_1^{***} sera certainement inférieur à C_1^* lorsque C_1^{**} est lui aussi inférieur à C_1^*.

Des manipulations simples conduisent à

$$d^2T(\eta)/d^2\eta = \int \{[U_{122}-(1+r+\eta)U_{222}]_{C_1^*}.\;\;(y_1-C_1^*)^2$$
$$-2U_{22}.(y_1-C_1^*)\}\,dF(\varepsilon) \tag{2.5}$$

Une condition suffisante pour que (2.5) soit négatif est que pour tout ε l'expression entre accolades soit elle-même négative. Comme elle se compose de deux termes, nous examinons chacun d'eux.

Bien que le terme entre crochets ressemble beaucoup à une expression importante rencontrée en (1.10), il en diffère par l'introduction de η qui peut prendre des valeurs positives ou négatives, ce qui empêche une comparaison immédiate. Toutefois, comme $(1+r+\eta)$ est positif ainsi que U_{222} (voir I) une condition suffisante pour l'expression entre crochets ait toujours un signe non ambigu et en l'occurence négatif est que U_{122} soit non positif. Le facteur $(y_1-C_1^*)^2$ n'affecte pas le signe du terme qu'il multiplie et il reste donc à analyser $-2U_{22}(y_1-C_1^*)$ qui doit être négatif pour que toute l'expression entre accolades soit négative. Comme l'aversion au risque implique $U_{22} < 0$, il est évident *que si l'individu est emprunteur en certitude* $(y_1<C_1^*)$ le second membre dans l'intégrale en (2.5) sera négatif pour tout ε et en vertu de toute la discussion, C_1^{***} sera plus petit que C_1^*.

Nous résumons par :

Proposition 3 : si U_{122} est non positif et si l'individu est *emprunteur* en certitude, le caractère aléatoire de r n'élimine pas le motif de précaution.

Il est assez surprenant de remarquer que la proposition 3 ne s'applique pas au cas d'un prêteur. Pour celui-ci, il est a priori impossible de dire comment C_1^{***}

se positionne par rapport à C_1^*[6]. Ceci s'explique par le fait que pour un prêteur riscophobe, le passage au caractère aléatoire de r correspond à une chute du taux d'intérêt certain, ce qui a tendance à stimuler la consommation courante. Comme, par ailleurs, C_1 baisse à cause de l'incertitude sur le revenu, l'effet total est ambigu. Par contre, pour l'emprunteur riscophobe, le passage au caractère aléatoire de r est équivalent à une hausse du taux certain sur les emprunts, ce qui décourage C_1 et donne le résultat non ambigu de la proposition 3.

Enfin, signalons qu'en utilisant une démarche très proche de celle adoptée en II.1, on peut montrer aisément que pour un individu qui n'est ni prêteur ni emprunteur lorsque r est certain et y_2 aléatoire ($y_1 = C_1^{**}$), $C_1^{**} = C_1^{***}$. Dans ce cas limite, le passage d'un r certain à un r aléatoire n'affecte en rien l'épargne de précaution. Par contre, si l'individu était emprunteur ($y_1 < C_1^{**}$), on aurait $C_1^{***} < C_1^{**} < C_1^*$.

II.2. *Effet d'un changement marginal dans le risque attaché à* y_2

Pour résoudre ce problème de statique comparative, nous écrivons la condition de premier ordre correspondant à (2.1) et nous notons qu'elle est une fonction L de C_1 et de γ :

$$L(C_1,\gamma) = \int\int [U_1-(1+r+\eta)U_2]dF(\varepsilon)dG(\eta) = 0 \tag{2.6}$$

En appliquant le raisonnement développé en I, on trouve :

signe $(dC_1^{***}/d\gamma)$ = signe $(\partial L/\partial\gamma)$

et
$$\partial L/\partial\gamma = \int\int [U_{12}-(1+r+\eta)U_{22}].\varepsilon.\, dF(\varepsilon)dG(\eta) \tag{2.7}$$

Une condition suffisante pour signer cette expression est que pour tout η,

$$\int [U_{12}-(1+r+\eta)U_{22}].\varepsilon.\, dF(\varepsilon) \tag{2.8}$$

soit négatif. En vertu du résultat démontré dans l'appendice 3, ceci se produit lorsque $[U_{12}-(1+r+\eta)U_{22}]$ est positif et décroissant en ε. Pour que $[U_{12}-(1+r+\eta)U_{22}]$ soit positif, il suffit que U_{12} soit non négatif vu que $-U_{22}$ et $(1+r+\eta)$ sont positifs. En outre, pour que l'expression entre crochets soit décroissante en ε, il suffit que U_{122} soit non positif (voir section I). Dès lors, nous pouvons énoncer :

Proposition 4 : Si U_{12} est non négatif et U_{122} non positif, l'accroissement du risque en y_2 encourage l'épargne même lorsque r est aléatoire.

6. Un résultat de même nature est obtenu par Dionne-Eeckhoudt [1984] dans un contexte différent.

Il est à noter que la proposition 4 est légèrement plus restrictive que sa contrepartie de la section I (proposition 2). En effet, il faut non seulement que U_{122} soit non positif mais aussi que U_{12} soit non négatif. Toutefois, on peut noter que cette condition est également vérifiée tant pour les fonctions d'utilité additives que pour la C.E.S. (voir appendice 2).

Il apparaît que même si r est aléatoire, l'accroissement du risque sur le revenu futur entraîne en général un développement de l'épargne de précaution. Cela signifie que le motif de précaution est suffisamment fort pour dominer l'effet de risque de perte en capital attaché au développement de l'épargne lorsque son rendement est aléatoire.

CONCLUSION

Dans cet article, nous avons repris certains résultats relatifs à l'épargne de précaution et nous les avons étendus au cas où l'épargne est placée dans des actifs eux-mêmes soumis à un risque de perte en capital.

Notre analyse a globalement montré que le « motif de précaution » est « robuste ». En effet, il s'applique aux fonctions d'utilité couramment utilisées dans la littérature économique. En outre, son fondement qui est évident lorsque l'épargne se place en actifs sûrs, s'étend aussi – moyennant des hypothèses très plausibles – au cas où l'épargne elle-même rapporte un rendement aléatoire.

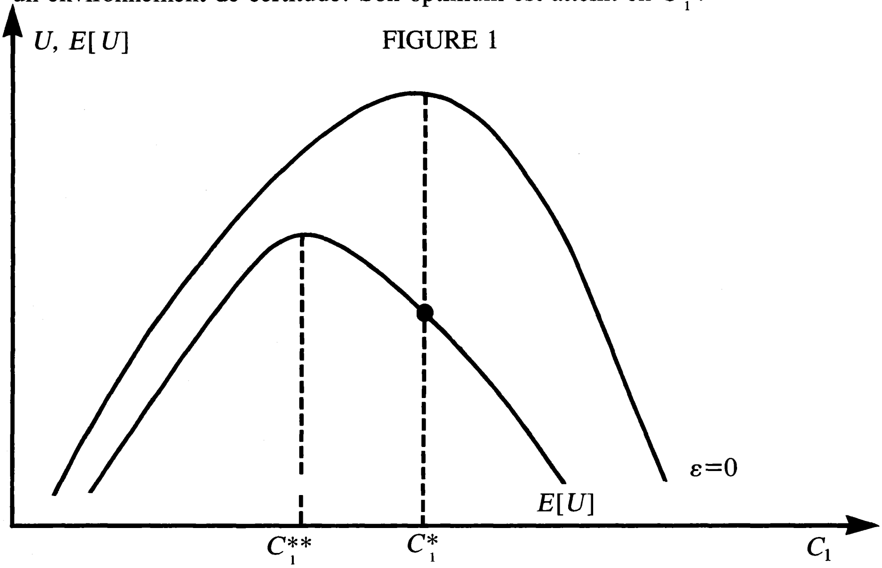
La robustesse du résultat ne devrait cependant pas occulter deux limites de l'analyse. En premier lieu, nous nous sommes intéressés exclusivement au comportement de personnes qui sont effectivement employées et qui s'interrogent sur les aléas relatifs à leurs revenus futurs. Tout différent évidemment est le comportement d'individus qui ont déjà subi ces aléas (par exemple qui sont tombés en chômage) et qui réduisent leurs stocks accumulés d'actifs pour maintenir leur consommation courante. Cette différenciation dans le comportement s'observe relativement bien dans les études économétriques que nous développons en France sur le sujet.

La seconde limitation tient au caractère statique inévitable des modèles à deux périodes. L'extension à n périodes serait évidemment intéressante mais elle nous forcerait soit à recourir à des fonctions d'utilité additives soit à des restrictions encore plus fortes sur la forme de U pour obtenir des résultats intéressants.

APPENDICE 1

Pour prouver que (1.8) entraîne $C_1^{**} < C_1^{*}$, nous traçons d'abord la courbe supérieure de la figure 1 qui indique l'évolution de U en fonction de C_1 dans un environnement de certitude. Son optimum est atteint en C_1^{*}.

FIGURE 1



Si y_2 devient aléatoire et comme $E(\tilde{\varepsilon}) = 0$, la courbe d'espérance d'utilité ($E[U]$) en fonction de C_1 est pour tout C_1 inférieure à la précédente et elle est également concave.

À ce moment si $dE[U]/dC_1$ évalué en C_1^{*} est négatif il résulte de la concavité de la courbe que C_1^{**} doit être à gauche de C_1^{*} [7].

APPENDICE 2

Nous montrons que si U est du type C.E.S., c'est-à-dire

$$U = [X_1^{\rho} + aX_2^{\rho}]^{1/\rho} \qquad \text{(A.2.1)}$$

alors d'une part $\rho<1$ implique $U_{22}<0$ et d'autre part $U_{122}<0$. Pour ce faire, calculons U_2 :

$$U_2 = (1/\rho)A^{(1/\rho)-1}.\, a\rho X_2^{\rho-1} = \; aX_2^{\rho-1}A^{(1/\rho)-1}$$

où $\quad A = X_1^{\rho} + aX_2^{\rho}.$

Dès lors,

$$U_{22} = a(\rho-1)X_2^{\rho-2}A^{(1/\rho)-1} \; + a((1/\rho)-1)X_2^{\rho-1}A^{(1/\rho)-2}.\, a\rho X_2^{\rho-1}$$

7. Voir Baron [1970] pour un argument de même type.

ou encore

$$U_{22} = aX_2^{2\rho-2}A^{(1/\rho)-2}[(\rho-1)X_2^{-\rho}A + ((1/\rho)-1)a\rho]$$
$$= aX_2^{2\rho-2}A^{(1/\rho)-2}[(\rho-1)(X_1/X_2)^{\rho}] \tag{A.2.2}$$

de sorte que $\rho<1$ implique $U_{22}<0$.

Comme, par ailleurs, $U_{221} = U_{122}$, on obtient aisément :

$$U_{122} = aX_2^{\rho-2}(\rho-1).\ (\partial/\partial X_1)(X_1^{\rho}.A^{1/\rho-2})$$
$$= aX_2^{\rho-2}(\rho-1).[\rho X_1^{\rho-1}\ A^{(1/\rho)-2} + (1/\rho-2)X_1 A^{(1/\rho)-3}.\ X_1^{\rho-1}]$$
$$= a(\rho-1)X_2^{\rho-2}[\rho X_1^{\rho-1}\ A^{(1/\rho)-3}(A+(1/\rho-2)X_1^{\rho})]$$
$$= a(\rho-1)X_2^{\rho-2}.[\rho X_1^{\rho-1}\ A^{(1/\rho)-3}.(X_1^{\rho}(1+(1/\rho)-2)+aX_2^{\rho})]$$

Vu que par l'aversion au risque $\rho<1$, $1+(1/\rho)-2$ est positif et donc $U_{122}<0$.

Notons enfin que $U_{12} = aX_2^{\rho-1}.(1/\rho-1)A^{(1/\rho)-2}.\rho X_1^{\rho-1}$ est nécessairement positif pour une C.E.S. lorsque $\rho<1$ (aversion au risque).

APPENDICE 3

Soit une variable aléatoire $\tilde{\varepsilon}$ d'espérance nulle et une fonction $h(\varepsilon)$ de cette variable aléatoire qui soit non négative et non croissante, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varepsilon).\varepsilon.dF(\varepsilon) \leqslant 0$$

Puisque $h(\varepsilon)$ est non croissante en ε, on a pour tout $\varepsilon < 0$, $h(\varepsilon) \geqslant h(0)$ et donc :

$$\int_{-\infty}^{0} h(\varepsilon).\varepsilon.dF(\varepsilon) \leqslant \int_{-\infty}^{0} h(0).\varepsilon.dF(\varepsilon) \tag{A.3.1}$$

De même, pour tout $\varepsilon>0$, $h(\varepsilon) \leqslant h(0)$ et donc

$$\int_{0}^{+\infty} h(\varepsilon).\varepsilon.dF(\varepsilon) \leqslant \int_{0}^{+\infty} h(0).\varepsilon.dF(\varepsilon) \tag{A.3.2}$$

En additionnant à gauche et à droite les expressions apparaissant en (A.3.1) et (A.3.2), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varepsilon).\varepsilon.dF(\varepsilon) \leqslant h(0).\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon.dF(\varepsilon) = 0$$

Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

BARON, D. [1970], «Price Uncertainty, Utility and the Industry Equilibrium in Pure Competition», *International Economic Review*, octobre, pp. 463-480.

CROPPER, M.L. [1976], «A State Preference Approach to the Precautionary Demand for Money», *American Economic Review*, juin, pp. 388-394

DIONNE, G. et L. EECKHOUDT[1984], *The Effect of Capital Risk on Saving Decisions : Some New Results,* Cahier de recherches 8411, Département d'Économique, Université de Montréal

DREZE, J. et F. MODIGLIANI [1972], «Consumption Decisions Under Uncertainty», *Journal of Economic Theory*, décembre, pp. 308-335

GRAY, M.R. et J.M. PARKIN [1973], «Portfolio Diversification as Optimal Precautionary Behaviour», dans *Theory of Demand : Real and Monetary*, M. Morishima *et al.*, éd. Oxford University Press

LELAND, H. [1968], «The Precautionary Demand for Saving», *Quarterly Journal of Economics*, août, pp. 465-473

LORIE, H. [1980], «Another Look at Liquidity Preference», *Quarterly Journal of Economics*, février, pp. 167-177

SANDMO, A. [1969], «Capital Risk, Consumption and Portfolio Choice», *Econometrica*, octobre, pp. 586-599

SANDMO, A. [1970], «The Effects of Uncertainty on Saving Decisions», *Review of Economic Studies*, juillet, pp. 353-360

SANDMO, A. [1971], «On the Theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty, *American Economic Review*, mars, pp. 65-73

WAUD, R. [1975], «Net Outlay Uncertainty and Liquidity Preference as Behavior Toward Risk», *Journal of Money, Banking and Credit*, novembre, pp. 499-506

WHALEN, E. [1966], «A Rationalization of the Precautionary Demand for Cash», *Quarterly Journal of Economics*, mai, pp. 314-325