Laval théologique et philosophique

L'infini chez Cantor

Louis-Émile Blanchet

Volume 33, numéro 1, 1977

URI : https://id.erudit.org/iderudit/705591ar
DOI : https://doi.org/10.7202/705591ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Faculté de philosophie, Université Laval

ISSN

0023-9054 (imprimé)
1703-8804 (numérique)

Découvrir la revue

L'INFINI CHEZ CANTOR

Louis-Émile BLANCHET

Les vues de Cantor sur l'infini vont au-delà de la mathématique; elles s'étendent en fait à la métaphysique et même à la physique. Toutefois, on n'en soupçonnerait guère l'étendue à ne lire que les traités usuels sur le transfini. Ces textes ignorent en effet tout ce qui, chez Cantor, n'est pas proprement mathématique. Rien d'étonnant à cela cependant, puisque la plus importante partie de l'œuvre de Cantor, celle qui a fait sa réputation, c'est la partie mathématique. Mais ce qui étonne, c'est que, loin de les analyser, ces manuels mentionnent à peine, quand ils le font, les notions et concepts sur lesquels repose l'arithmétique transfinie elle-même. Pourtant, ne sont-ils pas à la source même des controverses suscitées par la doctrine du transfini ? Et Cantor lui-même ne s'est-il pas, à maintes reprises, longuement expliqué à leur sujet ? Chose certaine, quiconque veut connaître toute la pensée de Cantor sur l'infini ne peut ignorer ces données, car elles sont à la base même de l'arithmétique transfinie.

Rappeler brièvement ces données, tel est le but que je me suis proposé. Qu'on veuille bien se rappeler que mon intention est uniquement d'évoquer ces aspects fondamentaux de la pensée de Cantor, et nullement de reprendre par le détail la théorie du transfini. En d'autres mots, j'exposerai non pas ce que disent les manuels en cours, mais ce qu'ils ne mentionnent pas. Pour connaître ce qu'ils ne disent pas, c'est aux écrits mêmes de Cantor, y compris ses lettres, qu'il faut recourir[1].

Nous examinerons tour à tour les aspects suivants :

I. L'infini potentiel et l'infini actuel,

II. L'absolu et le transfini à l'intérieur de l'infini actuel,

III. L'infini « in concreto » à l'intérieur du transfini.

---

1. Les deux ouvrages qui ont servi de base à la présente étude sont les suivantes :
Georg CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen*, Hildesheim, Georg Olms, 1962.
Herbert MESCHKOWSKI, *Probleme des Unendlichen*, Braunschweig, Friedr. Vieweg, 1967.
Le premier de ces ouvrages renferme les principaux écrits de Cantor de même que certains extraits de sa correspondance. Le second présente, en appendice, un groupe de 23 lettres adressées par Cantor à des mathématiciens, philosophes, théologiens de son époque, et qui viennent compléter ce qu'on trouve dans l'ouvrage précédent.

I. INFINI POTENTIEL ET INFINI ACTUEL

Commençons par un bref rappel historique. Au cours de sa longue histoire, la mathématique a connu de nombreux soubresauts. Les plus violents, ceux qui ont le plus rudement secoué l'édifice mathématique et ont engendré les plus graves crises, sont, fait remarquable, étroitement liés à l'infini. Le premier remonte à l'antiquité grecque; il est attribuable à la découverte, faite par les Pythagoriciens, des quantités incommensurables et de leur contre-partie arithmétique, les nombres irrationnels. Jusque-là on avait toujours cru possible d'exprimer le rapport de deux grandeurs données sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers. La nouvelle découverte ruinait cette conviction. Désormais, il faudrait compter avec des quantités non exprimables sous la forme d'un rapport, d'une *ratio* de deux entiers, donc avec des quantités *ir-rationnelles*. Après Eudoxe et Euclide dans l'Antiquité, Weierstrass, Dedekind et Cantor au siècle dernier ont nettement établi que, pour définir les nombres irrationnels, il faut recourir à l'infini, notamment à des suites illimitées de nombres rationnels.

Au XVII^{e} siècle une nouvelle crise ébranla l'édifice mathématique. L'invention du calcul infinitésimal en fut l'occasion. Cette méthode extraordinaire de calcul, en préparation et attendue depuis si longtemps et qui devait s'avérer si féconde, est étroitement dépendante de l'infini par suite de l'usage indispensable qu'elle fait des processus infinis. Malheureusement, au moment de sa découverte et de sa mise en application, la base manquait encore de solidité, les données fondamentales demeuraient encore imprécises, le sens des notions telles que 'quantités infinitésimales', 'évanescentes', 'infiniment petites' restait ambigu. Une controverse s'éleva qui fut longue et vive. Elle ne prit fin qu'au XIX^{e} siècle, lorsque Cauchy réussit à formuler de façon précise la notion de limite, qui, de toute évidence, implique un processus infini[2].

Les deux crises précédentes ont un aspect commun. L'infini se présente dans l'une comme dans l'autre sous la forme d'un processus illimité, interminable, où quelque chose est déjà acquis, mais où il reste toujours quelque chose d'autre à acquérir. Au cours de pareils processus, l'acquis demeurant toujours fini, c'est dans ce qui reste toujours à acquérir, dans ce qui reste *possible* à acquérir que réside l'infini. Il s'agit donc d'un *infini potentiel*, selon l'expression courante.

2. Cauchy dissocia de la géométrie la notion de limite qui devint ainsi purement arithmétique. « Lorsque, écrit-il (*Oeuvres complètes*, II^{e} série, t. 3, p. 19), les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres ». Cette définition fait donc appel aux notions de nombre, de variable et de fonction. À titre d'illustration, Cauchy mentionne le nombre irrationnel, limite d'une succession illimitée de nombres rationnels qui s'approchent de plus en plus de la valeur du nombre irrationnel. Grâce à cette notion arithmétique de limite, il parvient à clarifier celle de quantité infinitésimale en la ramenant à une variable : « On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro ». (*Ibid.*, p. 37). Cauchy alla plus loin en définissant également les 'infinitésimales' d'ordre supérieur au premier, et surtout les notions de dérivée, de différentielle et d'intégrale. Il faisait de cette dernière non pas une somme, mais la limite d'une somme; il montrait le lien intime qui existe entre la dérivée et l'intégrale, et établissait que l'une est l'inverse de l'autre. Cf. Carl B. BOYER, *The History of the Calculus*, N.Y., Dover, 1959, pp. 272-280.

Notons en outre que si le mathématicien a pu tirer profit de ces processus infinis — différentiel, intégral ou sériel —, c'est qu'il a réussi à les ramener à des processus finis, car d'un processus infini comme tel, c'est-à-dire résidant dans une synthèse successive et sans fin, on ne peut rien tirer précisément parce qu'il est interminable[3].

À peine la crise amenée par le calcul infinitésimal était-elle terminée qu'une nouvelle éclatait. Georg Cantor (1845-1918) de l'Université de Halle, en Allemagne, la provoquait en introduisant un infini actuel dans sa théorie des ensembles et son arithmétique transfinie. Ce faisant, il rompait sciemment avec une tradition millénaire qui refusait, en mathématique, l'infini actuel, n'y admettant que l'infini potentiel. Cantor avait prévu qu'une 'certaine' opposition s'élèverait contre les idées audacieuses qu'il émettait[4]. Il ne s'était trompé que sur un point : l'opposition qui survint fut beaucoup plus rude et acharnée qu'il ne l'avait prévu, car elle fut véritablement virulente et farouche[5]. Mais, comme toutes les tempêtes, celle que suscita Cantor à la fin du siècle dernier s'est passablement apaisée depuis lors; il s'en faut toutefois que le calme plat soit aujourd'hui revenu.

L'infini actuel et sa légitimité furent naturellement au centre de la controverse nouvelle. Défendant sa position, Cantor apporta un soin particulier à justifier l'infini actuel et à le bien distinguer de l'infini potentiel. À maintes re-

3. Lisons à ce propos quelques déclarations. La première est de P. Dienes. Il écrit (*The Taylor Series*, N.Y., Dover, 1957, p. 70) : "We first of all notice that an infinite succession of additions. . . cannot be carried out, and consequently cannot be thought of as completely carried out. (. . .) The great advantage, however, of our definition of the sum as a limit of a sequence is that the determination of limit does not involve an infinite succession of operations". Abel Rey (*L'apogée de la science technique grecque*, Paris, Albin Michel, 1958, p. 278) écrit pour sa part : « L'infini en tant que tel se laisse atteindre par le fini, ou il nous échappe ». Ajoutons enfin cette déclaration de Hermann Weyl (*The Open World*, New Haven, Yale Univ. Press, 1932, p.7) : "Mathematics is the science of the infinite, its goal the symbolic comprehension of the infinite with human, that is finite, means".

4. « L'exposé précédent sur mes recherches relatives à la théorie des ensembles (*Mannigfaltigkeit* est le terme d'abord utilisé par Cantor) est arrivé au point où sa poursuite dépend désormais d'une généralisation du concept d'entier réel au-delà des limites habituelles; une généralisation qui s'oriente dans une direction à laquelle personne n'a encore songé jusqu'à maintenant, pour autant que je sache. Je dépends tellement de cette généralisation du concept de nombre que, sans elle, je serais à peu près incapable, faute d'une liberté suffisante, de faire le moindre pas en avant dans la théorie des ensembles; que cela serve de justification ou, si nécessaire, d'apologie à l'introduction d'idées apparemment étranges dans mes considérations. En fait, l'entreprise consiste à généraliser ou continuer la suite des entiers réels au-delà de l'infini. Si audacieuse que puisse sembler l'entreprise, je dois exprimer non seulement l'espoir, mais la ferme conviction que cette généralisation finira à la longue par être considérée comme un pas tout à fait simple, approprié et naturel. En même temps, je suis parfaitement conscient qu'en faisant un tel pas je me place dans une certaine opposition avec des vues courantes sur l'infini en mathématique et à des opinions communes sur la nature du nombre ».

Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, n. 5:
Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,
I, (1883)

5. Kronecker, « finitiste » convaincu et irréductible, se montra l'adversaire le plus acharné de Cantor, son ancien élève. C'est à cause de son opposition, semble-t-il, que Cantor ne put jamais réaliser le grand rêve de sa vie, celui de devenir professeur à l'université de Berlin. Ajoutons que la controverse à laquelle donnèrent lieu les travaux de Cantor conduisit à des violences verbales pénibles et offensantes.

prises, aussi bien dans ses ouvrages mathématiques que dans ses lettres, il est revenu à sa distinction maintenant mise en veilleuse dans les manuels récents.

L'infini potentiel se rencontre là où existe une quantité indéterminée, *variable, finie* qui croît au-delà ou décroît en deça de toute limite finie. « Plus généralement, dit Cantor, je parle d'infini potentiel chaque fois qu'il est question d'une quantité *indéterminée* capable de recevoir un nombre illimité de *déterminations* »[6]. Au contraire, par infini actuel, il entend une quantité qui, d'une part, n'est *pas variable*, mais entièrement (« in allen seinen Teilen fest und bestimmt ») fixe et déterminée, donc une véritable *constante*, et qui, d'autre part, dépasse en grandeur toute quantité finie de même nature. À titre d'exemple, Cantor propose, entre autres, l'ensemble de tous les nombres entiers finis. Cet ensemble, précise-t-il, est une *chose en soi* et, abstraction faite de la suite naturelle des nombres qui lui appartiennent, constitue une quantité entièrement fixe et déterminée, un *ἀφωρισμένον* manifestement plus grand que tout nombre fini[7].

Cantor considère l'infini potentiel comme un infini impropre, et l'infini actuel comme un infini propre. Pour qui accepte l'infini actuel, la corrélation signifiée par ces épithètes paraît logique. À parler strictement, l'infini potentiel n'est en effet rien d'autre qu'un fini engagé dans un processus interminable de croissance ou de décroissance. De plus, et suivant en cela son ami Constantin Guberlet, Cantor rattache l'infini potentiel à l'infini actuel comme à ce qui fonde sa possibilité même : l'infini potentiel n'a de sens que s'il existe un infini actuel[8]. On peut se demander si Cantor là-dessus ne fait pas appel au principe aristotélicien suivant lequel la puissance se dit essentiellement par rapport à l'acte.

Partout où Cantor compare les deux types d'infini, il les distingue et caractérise en assimilant l'infini potentiel à une *variable*, et l'infini actuel à une *constante*. Cette assimilation reflète bien la conception de Cantor[9]. Et, en particulier, l'infini actuel apparaît par là comme quelque chose d'essentiellement achevé, parfait, complet, quelque chose dont toutes les parties sont simultanément données. Du fait que l'infini actuel est assimilé à une constante, on est porté à croire qu'il est incapable d'augmentation ou de croissance. Or, selon Cantor, c'est là une erreur généralement répandue aussi bien dans la philosophie ancienne et dans la philosophie scolastique qui s'y rattache que dans la philosophie moderne et contemporaine. En vérité, de préciser Cantor, l'infini actuel demeure capable de croissance nonobstant sa constance. Ce point amène

6. Lettre du 28 février 1886 adressée au professeur A. Eulenberg de Berlin.

7. *Ibid.*

8. Guberlet (1837-1928) est un philosophe allemand catholique qui fut un ami personnel de Cantor. En 1878, il publia un ouvrage intitulé : *Das Unendliche, metaphysisch und mathematisch betrachtet.* Il est partisan de l'infini en acte, mais sa conception d'un pareil infini ne coïncide pas en tout point avec celle de Cantor. Néanmoins, Guberlet fut pour Cantor un appui précieux.

9. Cantor revient souvent sur cette distinction. On la trouve dans la lettre déjà citée qu'il adressait à Eulenberg. Elle est encore mentionnée dans une autre lettre du 4 novembre 1885, adressée celle-là à G. Eneström : « Trotz wesentlicher Verschiedenheit der Begriffe des *potentialen* und *aktualen* Unendlichen, indem ersteres eine *veränderliche* endliche, über alle endliche Grenzen hinaus *wachsende* Grösse, letzteres ein *in sich festes, konstantes*, jedoch jenseits aller endlichen Grössen liegendes Quantum bedeutet, tritt doch leider nur zu oft der Fall ein, dass das eine mit dem andern verwechselt wird ». (*Gesammelte Abhandlungen*, p. 374).

toutefois Cantor à reconnaître un double infini actuel : l'un, capable de croître, l'autre, incapable de croître. Il appelle le premier *transfini*, le second *absolu*. Nous reviendrons sur la distinction elle-même dans le paragraphe suivant. Pour le moment, arrêtons-nous plutôt au mot '*transfini*' lui-même qu'emploie systématiquement Cantor lorsqu'il s'agit de l'infini actuel capable de croissance. Ce mot n'est pas de lui. Il l'emprunte à un philosophe scolastique du XVI^e siècle, Manuel de Goïs, qui l'avait déjà utilisé dans son commentaire sur la *Physique* d'Aristote :

> Infinitum categorematicum, id est, quod actu constat infinitis partibus, aequalibus uni certae, non communicantibus inter se, simulque existentibus. Hoc est, quod *transfinitum* dico[10].

Dans une lettre adressée au Père Ignatius Jeiler[11], Cantor le met en garde contre une autre erreur possible, celle notamment de faire du transfini une subdivision de l'infini potentiel, justement à cause de cette possibilité de croissance et de dépassement qu'on trouve dans le transfini. Cantor écarte ainsi cette conclusion erronée : contrairement à tout transfini individuel et, plus généralement, à toute entité répondant à une 'idea divina', l'infini potentiel n'est pas déterminé en soi, il n'est pas quelque chose de fixe et d'invariable, mais au contraire quelque chose que l'on conçoit dans un devenir, dans un changement et qui, partant, ne possède jamais qu'une quantité finie à chaque instant de son devenir.

---

10. *Commentarii Collegii Conimbricenses Societatis Jesu*, 5 vol., Coïmbre, 1592-1606, t. I., *In Physicorum Aristotelis*, lib. 3, c.8, q.1, a.1. Malgré sa longueur, il vaut la peine de rapporter le passage élaboré d'où provient cette courte citation.

Caeteris tamen omissis, infinitum,quod ad praesentem locum attinet, bifariam dicitur, videlicet infinitum actu, et potestate. Rursus infinitum actu duplex est: unum quod proprie infinitum censetur, appellaturque ab Aristotele ἀφωρισμένον a recentioribus Philosophis infinitum categorematice: aliud, quod improprie infinitum actu dicitur. *Infinitum actu priori modo est, quod actu continet infinitas partes, aequales uni certae, non communicantes inter se, simulque existentes*. Diximus, *aequales*, quia in qualibet finita magnitudine insunt infinitae partes proportionales, quae tamen aequales non sunt. Addidimus, *aequales uni certae*, quia in quavis magnitudine finita continentur infinitae partes aequales, non tamen uni certae: continentur enim duae medietates aequales inter se, et tres tertiae inter se item aequales, et quatuor quartae, atque ita in infinitum; verum hae non sunt uni certae aequales, ut planum est. Adjecimus, *non communicantes*, quia cubitus habet infinitas partes aequales uni certae, communicantes tamen inter sese. Nam si quis duos palmos designet; deinde medietatem posteriorem ex primo palmo, et priorem ex secundo accipiat, efficiet unum palmum cum utroque communicantem; rursus vero, si ultimam quartam ex primo palmo sumat, et tres priores quartas ex secundo, identidem alterum palmum conficiet, cum utroque tamen communicantem: sicque in infinitum. Additum est, *simul existentes*, ad excludendum tempus et motum, quae etsi ab aeternitate fuissent, ut Aristoteles falso putavit, quia tamen haud constarent partibus simul cohaerentibus, infinita actu non essent. Infinitum actu improprie dictum est id, quod continet actu infinitas partes, quae tamen ordinem inter se non habent, ut primae, secundae, tertiae, et sic deinceps; atque ad constitutionem unius rei finitae pertinent, ut infinita multitudo punctorum in linea.

Infinitum potestate illud est, quod ex infinitis partibus coalescit, non tamen eo modo, quo infinitum actu. Hoc vero triplex est; nempe infinitum successione, divisione, adjectione. Infinitum successione est id, quod licet infinitas partes uni certae aequales vendicet, non eas tamen simul habere potest: ut motus et tempus, si initio caruissent. Infinitum divisione est quaelibet magnitudo, quae per partes proportionales dissecari potest, ita ut divisio nullum sit exitum habitura. Infinitum adjectione est, quod potest infinite augescere: ut numerus accessu unitatum, et magnitudo additione partium ex alterius magnitudinis dissectione. Porro dicuntur haec potestate infinita, quod perfectum actum et absolutionem sortiri nequeant; ut ex dictis patet.

11. Cette lettre est du 13 octobre 1895. Elle laisse deviner que Cantor possédait une bonne connaissance de la philosophie scolastique. Il semble même avoir connu quelque chose des disputes d'écoles entre Dominicains, Jésuites et Franciscains.

II. TRANSFINI ET ABSOLU

Nous l'avons déjà vu, à l'intérieur de l'infini actuel, Cantor distingue le *transfini* de l'infini absolu ou, plus brièvement, l'*absolu*. Assurément moins important que le précédent pour la théorie des ensembles et l'arithmétique transfinie, ce nouveau partage de l'infini ne peut pas être passé sous silence quand on se propose, comme c'est notre cas, d'exposer les vues globales de Cantor sur l'infini.

Répétons-le, le transfini est un infini actuel qui peut croître et augmenter (« vermehrbares A.-U. ») tandis que l'*absolu* est incapable de la moindre croissance (« unvermehrbares A.-U. »). Le couple transfini-absolu offre un trait de ressemblance étroite avec le couple antérieur : infini potentiel et infini actuel. En effet, de même que l'infini potentiel doit se rattacher à un infini actuel qui lui sert de fondement, ainsi le transfini, par sa richesse de formes et de structures, tend avec nécessité vers un *absolu* qui en est la source.

À la quantité de cet absolu, rien ne saurait être retranché ni ajouté, de sorte que, quantitativement, c'est un maximum absolu. L'intelligence humaine est trop faible pour le saisir parfaitement. Il échappe à toute analyse mathématique[12]. Cet absolu est acte pur, l'être absolument simple, souverainement parfait, jouissant d'une indépendance totale, extérieur à l'univers. Incapable du moindre changement, c'est lui qui réalise de façon parfaite l'infini actuel. En fait, il ne se trouve qu'en Dieu ou, pour mieux dire, précise Cantor, il est Dieu lui-même dans sa souveraine perfection[13]. C'est, il va sans dire, un infini increé.

Signalons en passant un autre sens de l'expression 'infini absolu' chez Cantor. Il ne s'agit plus alors de l'infini increé, mais de certaines multitudes définies dont Cantor distingue deux sortes : celles dont on peut concevoir que *tous* les éléments existent simultanément et forment ainsi un seul et unique objet; celles dont il est impossible de concevoir tous les éléments comme existant simultanément sans être conduit à une contradiction et qu'on ne peut concevoir comme une unité, un objet achevé. Cantor dénomme les premières *consistantes*, les secondes *inconsistantes* ou *absolument infinies*; il réserve le nom d'*ensemble* (Menge) aux premières, les autres constituant un *infini absolu*. Comme exemple d'infini absolu au sens de multiplicité inconsistante, Cantor mentionnera la classe de tout ce qui est pensable; il montrera aussi que la multiplicité de tous les nombres ordinaux constitue un tel infini absolu[14].

Le transfini actuel, lui, est un infini créé. Et, à l'opposé de l'infini absolu de Dieu qui ne peut ni croître ni décroître, il est capable d'augmentation, tout actuel qu'il soit. C'est même par là qu'il se distingue de l'absolu increé. Nette aux yeux

12. Lettre du 28 février 1886, au professeur A. Eulenberg, reproduite dans *Gesammelte Abhandlungen*, pp. 400-407.

13. Cf. Lettre du 13 octobre 1895 au P. Ignatius Jeiler; *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, dans *Gesammelte Abhandlungen*, p. 378; Lettre au professeur A. Eulenburg, dans *Gesammelte Abhandlungen*, p. 401.

14. Cf. Lettre du 28 juillet 1899 à Dedekind dans *Gesammelte Abhandlungen*, p. 443.

de Cantor, cette distinction le fut beaucoup moins pour d'autres qui ont confondu ces deux formes d'infini actuel[15].

Le monde du transfini est illimité; il correspond au vaste domaine du possible, connu de Dieu et réalisable par lui. Aux mathématiques, il offre un champ de recherches abstraites immense et sans cesse grandissant. À la physique, il offre également un champ de recherches, mais limité celui-là à l'univers tel qu'il est. Reprenant à sa façon une idée chère à Giordano Bruno, Cantor estime que, mieux qu'un monde fini ne saurait le faire, le transfini reflète la grandeur du Créateur[16].

L'absolu est unique, le transfini ne l'est pas. Bien au contraire, car il peut se réaliser de mille et une façons différentes aussi bien abstraitement que concrètement. L'infini actuel créé peut en effet exister *in abstracto*, comme quantité mathématique conçue par la pensée sous forme de nombre cardinal ou ordinal, ou encore, *in concreto*, comme dans le monde physique. Remettant au paragraphe suivant l'examen du transfini *in concreto*, signalons les conclusions auxquelles Cantor est arrivé au sujet du transfini en général, conclusions qu'il communiquait au P.I. Jeiler dans une lettre en date du 13 octobre 1895[17] :

1° Ce transfini, qu'il soit considéré *in concreto* ou *in abstracto* n'est pas contradictoire; il est donc possible et, partant, réalisable par Dieu, tout autant qu'une chose finie.

2° Le transfini peut se présenter dans une incalculable variété de formes spécifiques et individuelles.

3° En particulier, il existe des nombres cardinaux transfinis et des types d'ordre transfinis qui, en mathématique, sont aussi légitimes et tout autant sujets de recherches que les formes et les nombres finis.

4° Tous ces modes particuliers de transfini existent depuis toute éternité sous forme d'idées *in intellectu divino*.

III. LE TRANSFINI IN CONCRETO

Cantor estime que le transfini est égalament présent dans l'univers physique, *in natura naturata* selon le mot emprunté à la scolastique.

Dans une lettre adressée au cardinal Franzelin[18], le 22 janvier 1886, Cantor pose et distingue l'*infini éternel increé* ou *absolu* qui convient à Dieu et à ses attributs, et un *infini créé* ou *transfini* qui doit être affirmé partout où il faut reconnaître un infini actuel dans la nature créée. C'est notamment le cas, ajoute Cantor, du nombre d'individus existant dans l'univers entier, ce qui va pour ainsi

15. « Eine *andere* häufige *Verwechselung* geschieht mit den beiden Formen des *aktualen* Unendlichen, indem nämlich das *Transfinite* mit dem *Absoluten* vermengt wird, während doch diese Begriffe streng geschieden sind, insofern ersteres ein *zwar Unendliches*, aber doch *noch Vermehrbares*, das letztere aber wesentlich als *unvermehrbar* und daher mathematisch *undeterminierbar* zu denken ist. . . » (Lettre du 4 nov. 1885 à G. Eneström, dans *Gesammelte Abhandlungen*, p. 375). Les soulignés sont de Cantor.

16. Cf. Lettre déjà mentionnée, au professeur A. Eulenburg.

17. Dans H. MESCHKOWSKI, *Probleme des Unendlichen*, p. 258.

18. Cf. *Gesammelte Abhandlungen*, p. 399.

dire de soi, mais même sur notre propre planète. En outre, d'accord avec Leibniz, il tient pour vraisemblable la présence d'un nombre transfini de monades dans chaque portion, si minime soit-elle, de l'espace.

Cela nous amène à examiner brièvement les vues de Cantor sur la constitution de la matière. Il avait, sur le sujet, une opinion bien à lui, une opinion étroitement liée, ou s'en doute bien, à sa théorie des ensembles. Si son arithmétique transfinie a recruté un grand nombre d'adeptes, sa conception de la matière en revanche semble avoir été complètement oubliée.

Cantor est un atomiste. Il distingue deux types d'atomisme : l'atomisme chimique et l'atomisme ponctuel. Les atomes du premier possèdent une étendue, mais aucune force ne peut les casser. Dans le second, au contraire, les atomes sont inétendus et, pour cette raison, dits ponctuels. S'il préfère l'atomisme ponctuel, Cantor ne l'endosse pas entièrement. Il explique sa propre théorie dans une lettre du 16 novembre 1884 à son ami Mittag-Leffler[19]. Pour rendre compte des phénomènes inorganiques et, jusqu'à un certain point, des phénomènes organiques, deux classes d'atomes sont à la fois nécessaires et suffisantes : les *atomes corporels* (Körperatome) et les *atomes éthérés* (Ätheratome). Les uns et les autres sont créés; indépendants une fois produits, ils sont insécables, simples, inétendus, actifs. Cantor ne s'explique pas davantage sur la nature de ces atomes. Il ajoute pourtant une remarque qui permet de distinguer son atomisme de l'atomisme ponctuel usuel d'une part et, d'autre part, de le rattacher à sa théorie des ensembles : C'est que la classe des atomes corporels possède la puissance du dénombrable, celle des atomes éthérés la puissance du continu.

Cantor exprime les mêmes vues dans une étude sur les ensembles de points[20]. Seule une légère différence mérite d'être signalée : tandis que Cantor parlait ailleurs d'atomes, il parle ici de monades. C'est déjà là un indice permettant de dire qu'il a subi l'influence de Leibniz. Il écrit du reste : « En accord avec Leibniz, j'appelle *monades* ou *unités* les éléments *simples* de la nature dont la réunion selon un arrangement déterminé constitue la *matière* ».

Voyons, pour terminer, comment Cantor envisageait le problème de l'éternité ou du commencement du monde. Là-dessus, à nouveau, il avait adopté une position bien singulière et étonnante. D'un côté, on sait que Cantor avait rompu avec toute la tradition mathématique en proposant une doctrine qui passe, non sans raison, pour révolutionnaire. Or, chose assez surprenante, cet homme aux idées si peu conformistes ne peut concevoir un temps dont l'écoulement n'aurait pas de limite. Pareille conception est pour lui une « monstruosité impensable » (monströsen Ungedanken). Et si le temps ne peut s'être écoulé depuis toujours, il est nécessaire que le monde ait eu un commencement. Sur cette question, Cantor connaît l'opinion des théologiens, en particulier celle de s. Thomas d'Aquin : « Mundum non semper fuisse, sola fide tenetur, et demonstrative probari non potest » (*S. th.*, Ia, q. 46, a. 2). Cantor se dit d'accord avec s.

---

19. Cf. MESCHKOWSKI, *op. cit.*, pp. 247-48.

20. *Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions*, 2e partie, dans *Gesammelte Abhandlungen*, pp. 275-76.

Thomas dans la mesure où une preuve *mathématique* du commencement temporel du monde n'est pas possible. Son accord ne va toutefois pas plus loin, car il estime possible une preuve mixte, c'est-à-dire mathématico-métaphysique[21]. Cantor a-t-il jamais tenté de formuler une telle preuve, c'est là un point que, pour ma part, j'ignore totalement.

Telle est, en bref, la théorie cantorienne de l'infini. Elle n'a pas intégralement survécu; seul en est resté ce qui regarde le transfini mathématique ou abstrait. Au reste, avant de s'implanter et d'obtenir droit de cité parmi les autres disciplines mathématiques, la doctrine du transfini a dû vaincre une longue et vive résistance. Il faut même reconnaître qu'aujourd'hui encore les oppositions n'ont pas toutes désarmé, ni les résistances disparu. C'est de la part des mathématiciens que cette résistance est surtout venue. Cantor était assuré de la justesse de ses vues, il demeurait inébranlable face aux plus redoutables assauts, et il était convaincu d'avoir raison envers et contre tous. « Les raisons, confiait-il au Père Jeiler, qui, au cours de vingt années de recherches sur cette question, se sont imposées à moi pour leur valeur interne, à vrai dire malgré moi et en dépit d'une tradition toujours tenue en haute estime, et qui m'ont en quelque sorte subjuguées, sont plus fortes que toutes les objections rencontrées »[22].

Néanmoins, Cantor chercha des appuis pour son infini en acte. Il en trouva. Mais aussi étonnant que cela puisse paraître à première vue, c'est chez les philosophes et thélogiens de son temps et chez ceux des siècles passés qu'il les trouva, ce qui, semble-t-il, n'eut pas l'heur de plaire à tous les mathématiciens[23]. Non seulement découvrit-il parmi eux des tenants de l'infini en acte chez Dieu, mais il découvrit encore des protagonistes du transfini. Par là s'explique, au moins en partie, l'abondante correspondance qu'échangea Cantor avec certains théologiens catholiques d'alors. Par là également s'explique sans doute cette connaissance étendue, étonnante chez un mathématicien, des écrits d'un Origène, d'un s. Augustin, d'un Don Scot, d'un s. Bonaventure, d'un s. Albert Le Grand, et surtout d'un s. Thomas d'Aquin. Volontiers il contestait l'enseignement des théologiens scolastiques sur certains points, mais il ne leur conservait pas moins sa plus grande estime. Il semble avoir eu une admiration et une estime toute particulière pour s. Thomas d'Aquin; par sa réponse à une lettre du Père Jeiler, nous savons qu'il possédait l'édition léonine des œuvres du Docteur angélique et qu'il en gardait le portrait près de lui[24].

Que nous partagions ou non les vues de Cantor sur le transfini, nous ne pouvons qu'admirer sa ténacité et son attachement à la vérité.

21. Lettre au Dr Kerry du 8 mars 1887, dont un extrait est rapporté par Meschkowski, *op. cit.*, pp. 125-26.

22. Extrait d'une lettre au cardinal Franzelin. Cf. *Gesammelte Abhandlungen*, p. 399.

23. Dans une lettre adressée à Carl Weierstrass, l'ancien condisciple et ami de Cantor, Hermann Schwarz, écrit : « Was haben denn in aller Welt die Kirchenväter mit den Irrationalzahlen zu thun? » Cf. Meschkowski, *op. cit.*, p. 255.

24. Cf. Meschkowski, *op. cit.*, p. 257.