L'Actualité économique

Riscophobie et étalement à moyenne constante : analyse et applications
Risk aversion and mean-preserving spread; analysis and applications

Marcel Boyer et Georges Dionne

Volume 59, numéro 2, juin 1983

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601213ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601213ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Boyer, M. & Dionne, G. (1983). Riscophobie et étalement à moyenne constante : analyse et applications. *L'Actualité économique*, *59*(2), 208–229. https://doi.org/10.7202/601213ar

Résumé de l'article

L'objet de cet article est de montrer que, pour la perspective aléatoire caractérisée par la probabilité p de perdre une valeur h, il existe une mesure adéquate des variations dans le risque engendrées par des variations comparables de p et h, ce qui permet d'isoler le facteur risque et de prédire le comportement des agents riscophobes. Cette mesure résulte d'une application du concept d'étalement à moyenne constante (*mean-preserving spread*) développé par Rothschild et Stiglitz. Le résultat principal est à l'effet qu'un agent riscophobe préférera toujours une diminution de la perte à une baisse comparable de la probabilité de perte. Nous appliquons ce résultat simple à diverses situations : assurance-chômage, réglementation par enquêtes et amendes, contrôle des prix et des salaires, sécurité routière, stationnement illégal, loteries, autoassurance vs autoprotection. Enfin nous dérivons une mesure de variation compensatoire de richesse reliée au degré de riscophobie.

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 59, no 2, juin 1983.

RISCOPHOBIE ET ÉTALEMENT À MOYENNE CONSTANTE : ANALYSE ET APPLICATIONS*

Marcel BOYER
et
Georges DIONNE
Département de sciences économiques
Université de Montréal

L'objet de cet article est de montrer que, pour la perspective aléatoire caractérisée par la probabilité p de perdre une valeur h, il existe une mesure adéquate des variations dans le risque engendrées par des variations comparables de p et h, ce qui permet d'isoler le facteur risque et de prédire le comportement des agents riscophobes. Cette mesure résulte d'une application du concept d'étalement à moyenne constante *(mean-preserving spread)* développé par Rothschild et Stiglitz. Le résultat principal est à l'effet qu'un agent riscophobe préférera toujours une diminution de la perte à une baisse comparable de la probabilité de perte. Nous appliquons ce résultat simple à diverses situations: assurance-chômage, réglementation par enquêtes et amendes, contrôle des prix et des salaires, sécurité routière, stationnement illégal, loteries, autoassurance vs autoprotection. Enfin nous dérivons une mesure de variation compensatoire de richesse reliée au degré de riscophobie.

Les agents économiques font continuellement face à des situations caractérisées par la perspective aléatoire de perdre une valeur h avec une probabilité p. Dans un tel contexte plusieurs questions peuvent être soulevées. D'abord on peut se demander comment les agents économiques en arrivent-ils à prendre des décisions impliquant la comparaison de perspectives aléatoires. Ensuite on peut se demander comment les agents économiques peuvent éviter ces perspectives aléatoires par le recours à l'assurance. On peut aussi considérer la possibilité pour un agent de modifier la perspective aléatoire à laquelle il fait face en recourant à des activités qui affectent soit p, soit h, soit p et h. Enfin on peut se demander

* Nous tenons à remercier un évaluateur anonyme pour ses commentaires ainsi que la Régie de l'Assurance Automobile du Québec pour avoir financé en partie notre recherche. Nous sommes évidemment les seuls responsables du contenu de cet article.

comment un agent économique est susceptible de réagir à des modifications exogènes de cette perspective aléatoire.

Le comportement des agents économiques face à des perspectives aléatoires et les équilibres de marché résultant de ces comportements font l'objet de la théorie économique de l'incertain et du risque. Cette théorie regroupe entre autres la théorie de la décision sous incertitude, la théorie des marchés de l'assurance — autoassurance, autoprotection, assurance de marché, risque moral, sélection adverse,... — la théorie des marchés financiers — espérance-variance, équilibre des actifs financiers, équilibre des options,... — la théorie de l'efficacité économique avec information imparfaite — valeur privée et sociale de l'information, asymétrie d'information,... — et finalement la théorie de l'équilibre général avec incertitude. Ce domaine de l'économique repose en bonne partie sur l'hypothèse empirique que les agents économiques sont en général riscophobes[1] et aussi sur la possibilité de mesurer objectivement le risque associé à une perspective aléatoire donnée. En effet, on ne pourra prédire la réaction d'un agent riscophobe à une variation du risque associée à une perspective aléatoire que si une mesure appropriée de cette variation du risque existe et peut être identifiée et isolée.

L'objet de cet article est de montrer que, pour la perspective aléatoire mentionnée ci-haut et caractérisée par la probabilité p de perdre une valeur h, il existe une mesure adéquate des variations dans le risque associé à cette perspective aléatoire suite à des variations comparables de p et h, permettant d'isoler le facteur risque et de prédire le comportement d'un agent riscophobe. Cette mesure résulte d'une application du concept d'étalement à moyenne constante *(mean-preserving spread)* développé par Rothschild et Stiglitz (1970). Le résultat principal, qui par ailleurs est tout à fait naturel et peut être justifié graphiquement, est à l'effet qu'un agent riscophobe préférera toujours une baisse dh de la perte à une baisse comparable dp de la probabilité de perte et de même préférera toujours une hausse dp de la probabilité de gain à une hausse comparable dh du gain éventuel. En appliquant ce résultat simple à diverses situations nous pouvons prédire l'émergence d'actions particulières ou d'équilibres particuliers dans divers contextes allant de l'assurance-chômage à la réglementation par enquêtes et amendes, du contrôle des prix et des salaires à la sécurité routière, des caractéristiques des actifs financiers ou des projets

1. Nous utilisons le terme «riscophobe» pour le terme anglais *«risk averse»* et de même «riscophobie» pour *«risk aversion»*, riscophile pour *«risk lover»* ... «Risque» apparaît en français au XVI^e siècle et vient de l'italien « risco » lui-même dérivé du grec « rhiza » qui signifie « racine » et par extension « écueil ». Ainsi la forme « riscophobie » nous apparaît préférable à «risquophobie» utilisée par certains.

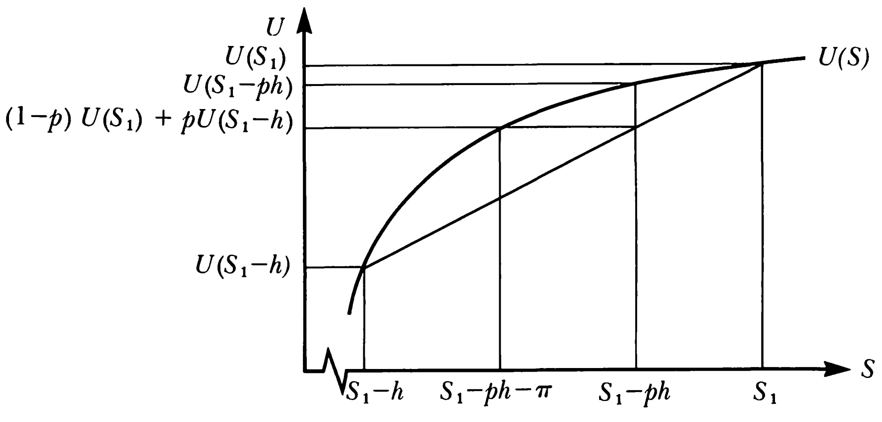
aux caractéristiques des loteries, et du tandem autoprotection-autoassurance au contrôle du stationnement illégal.

Enfin, ayant isolé le facteur risque par la définition même des *dh* et *dp* comparables, nous pouvons dériver une mesure de variation compensatoire de richesse reliée au degré de riscophobie du consommateur.

Section 1 : Perspectives aléatoires, étalements à moyenne constante et riscophobie

Considérons la perspective aléatoire suivante : la richesse de l'individu se situera à S_1 avec probabilité $(1-p)$ et à (S_1-h) avec probabilité p. En d'autres termes l'individu risque de perdre h avec probabilité p. L'espérance mathématique de la richesse est $S_1 - ph$ et l'espérance mathématique de l'utilité de la richesse sera $(1-p)U(S_1) + pU(S_1 - h)$. Nous pouvons représenter graphiquement la situation d'un agent riscophobe[2] comme suit :

GRAPHIQUE 1



Au point $S_1 - ph - \pi$ nous avons

$$U(S_1 - ph - \pi) = (1-p)U(S_1) + pU(S_1 - h)$$

et π peut être défini comme la prime de risque. Ainsi le consommateur est ici indifférent entre avoir $(S_1 - ph - \pi)$ avec certitude et faire face à la perspective aléatoire où il aura S_1 avec probabilité $(1-p)$ et $(S_1 - h)$ avec probabilité p, et donc une valeur espérée de $(S_1 - ph)$.

2. Un agent économique est riscophobe si son utilité marginale du revenu (richesse) est décroissante, c'est-à-dire si $U''(S) < 0$. Ici nous supposons que l'agent est riscophobe pour tout S et qu'il maximise l'espérance mathématique de l'utilité. Ces deux hypothèses de travail font l'objet de beaucoup de discussions dans la littérature. Voir à ce sujet Shoemaker (1982).

Considérons la situation décrite au graphique 1. On peut se demander comment évolue l'espérance mathématique et la variance de la richesse lorsque la probabilité p ou le montant h varient. Nous avons

$$\begin{aligned} E(S) &= S_1 - ph \\ \text{Var}(S) &= ph^2 - p^2h^2 \end{aligned}$$

et donc .

Lemme 1 : L'espérance mathématique de S décroît avec p et h. La variance de S croît avec h ; elle croît avec p si et seulement si $p < {}^1/_2$.

Preuve: résultat évident obtenu des dérivées de $E(S)$ et de $\text{Var}(S)$ par rapport à p et h. ||

Pour pouvoir comparer les variations de p et de h du point de vue du consommateur, il est utile de comparer des variations de p et h ayant le même effet sur E(S) et d'isoler ainsi la variation du risque. Ainsi, nous pouvons relier la préférence du consommateur pour dp ou dh à son degré de riscophobie.

Lemme 2 : Quel que soit p, une variation $dp > 0$ entraîne une hausse de Var (S) moins grande qu'une variation dh ayant le même effet sur $E\ (S)$.

Preuve: Nous désirons comparer des variations (dp, dh) satisfaisant la condition suivante

$$d_pE\ (S) = d_hE\ (S)$$

où $d_i\, E(S) = E(S/i + di) - E(S/i)$.

Ainsi $-\ hdp = -pdh$

ou encore

$$dh = \frac{h}{p}\ dp \tag{1}$$

Par conséquent

$$d_p\ \text{Var}(S) = (h^2 - 2ph^2)dp - (dp)^2\, h^2 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} d_h\ \text{Var}\ (S) &= (2ph - 2p^2h)\, dh + (p - p^2)\, (dh)^2 \\ &= (2ph - 2p^2h)\ \frac{h}{p}\, dp + (p - p^2)\left(\frac{h}{p}\, dp\right)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

donc d_p Var$(S) < d_h$ Var(S) si et seulement si $h^2 - 2ph^2 < 2h^2 - 2ph^2 + \frac{h^2}{p} dp$, relation qui est toujours vérifiée.||

Le lemme 2 montre qu'une variation de h équivalente, en terme d'espérance de richesse, à une variation de p entraîne toujours une variation plus importante de la variance de S. Si la variance de S était une mesure acceptable du risque associé à une perspective aléatoire donnée, nous pourrions en conclure que le consommateur riscophobe préférerait la variation positive dp à la variation positive équivalente dh. Or il est bien connu que la variance n'est pas une mesure adéquate du risque sauf dans des cas très particuliers. Pour s'en convaincre, il est utile de donner un exemple.

1.2 : Variance et mesure du risque : un exemple

On dira qu'une perspective aléatoire est plus risquée qu'une autre perspective aléatoire ayant toutes deux la même espérance mathématique de richesse si et seulement si tous les consommateurs riscophobes préfèrent la deuxième à la première. En d'autres termes, la première est plus risquée que la deuxième si, pour toute fonction d'utilité concave, l'espérance mathématique de l'utilité est plus grande pour la seconde que pour la première. Considérons deux perspectives aléatoires $i = a, b$ sous la forme $(\overline{S}_i, \sigma^2_i)$ où $\overline{S}_i$ est l'espérance mathématique de la richesse et σ^2_i la variance de cette richesse dans la perspective i. Nous voulons un exemple où $\overline{S}_a = \overline{S}_b$ et $\sigma^2_a > \sigma^2_b$ et dans lequel un agent riscophobe préférera la perspective a à la perspective b. Soit

$$U(S) = \log S \tag{4}$$

et donc $U'(S) = \frac{1}{S} > 0$; $U'(S) = -\frac{1}{S^2} < 0$; ainsi cet agent riscophobe a un degré absolu de riscophobie $R_A = -\frac{U''(S)}{U'(S)} = \frac{1}{S}$ décroissant en S et un degré relatif de riscophobie $R_R = -S\frac{U''(S)}{U'(S)} = 1$ constant.

Soient les perspectives aléatoires suivantes :

— perspective aléatoire a : $\operatorname{pr}[S = 12] = 3/4$
$\operatorname{pr}[S = 24] = 1/4$

et donc $S_a = 15$ et $\sigma^2_a = 27$

— perspective aléatoire b : $\operatorname{pr}[S = 10] = 1/2$
$\operatorname{pr}[S = 20] = 1/2$

et donc $S_b = 15$ et $\sigma^2_b = 25$

Ainsi, les deux perspectives aléatoires ont la même espérance mathématique de la richesse S mais la première a une plus grande variance. Nous montrons que l'individu dont les choix peuvent être caractérisés par la fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern

$$W(i) = E_i U(S) = E_i \log S \tag{5}$$

préférera la première situation, celle où la variance est la plus grande. Les valeurs des espérances d'utilité des deux perspectives aléatoires sont respectivement égales à

$$\left.\begin{aligned} W(a) &= {}^3/_4 \log 12 + {}^1/_4 \log 24 = 1.1544 \\ W(b) &= {}^1/_2 \log 10 + {}^1/_2 \log 20 = 1.1505 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ainsi, la première perspective aléatoire amène une espérance mathématique de l'utilité plus grande et sera donc choisie par le consommateur riscophobe dont l'utilité de la richesse est donnée par $U(S) = \log S$.

Ainsi la variance n'est pas une mesure adéquate du risque. Le fait qu'une variation $dh > 0$ du montant de perte augmente toujours davantage la variance de S qu'une variation équivalente $dp > 0$ — ayant le même effet sur $E(S)$ — de la probabilité de perte ne pourrait expliquer la préférence de tout agent riscophobe pour dp. Or, tel est le résultat que nous nous apprêtons à démontrer: tout agent riscophobe préfère la variation dp à la variation équivalente dh, non pas parce que dh fait augmenter davantage la variante qui peut même diminuer avec dp si $p > {}^1/_2$, mais plutôt parce que nous pouvons passer de la perspective aléatoire obtenue suite à l'application de la variation dp à la perspective aléatoire obtenue suite à dh par l'application d'un étalement à moyenne constante.

1.3 : Étalement à moyenne constante et mesure du risque

Rothschild et Stiglitz (1970) ont popularisé[3] le concept d'étalement à moyenne constante *(mean-preserving spread)* pour analyser les préférences des agents riscophobes face à différentes perspectives aléatoires. Considérons deux fonctions de densité $g(x)$ et $j(x)$ avec $0 \leq x \leq 1$ telles que $j(x) = g(x) + f(x)$. Ainsi, $\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) = 0$. On dira que $f(x)$ est un étalement de $g(x)$ à moyenne constante si son ajout à $g(x)$ a pour effet de mettre plus de poids dans les queues de $g(x)$ au détriment du centre tout en gardant la même moyenne, ce qui implique $\int_0^1 xf(x)\,dx = 0$. Rothschild et Stiglitz montrent que tel est le cas si $f(x)$ satisfait soit les conditions (7), (8), (9) ci-dessous, soit les trois conditions (7), (9), (10).

$$F(0) = F(1) = 0 \tag{7}$$

il existe un $z \in [0, 1]$ tel que (8)

$F(x) \geq 0$ si $x \leq z$

et

$F(x) \leq 0$ si $x > z$

$$T(1) = \int_0^1 F(x)dx = 0 \tag{9}$$

$$T(y) = \int_0^y F(x)dx \geq 0,\ 0 \leq y \leq 1. \tag{10}$$

---

3. Le concept ainsi que le théorème présenté plus loin existaient déjà dans Hardy, Littlewood et Polya (1953) et Kolm (1969). Voir à ce sujet les commentaires de Diamond et Rothschild (1978, p. 120).

La première condition nous assure que $g(x) + f(x)$ sera une fonction de densité; la troisième nous assure, étant donné que $F(1) = 0$, que la moyenne de $f(x)$ est nulle; enfin, la deuxième nous assure que $g(x) + f(x)$ est plus «étalée» que $g(x)$.

Le résultat fondamental reliant riscophobie et étalement à moyenne constante est le suivant:

Théorème: Soit $j(x) = g(x) + f(x)$, $x \in [0,1]$; $f(x)$ est un étalement à moyenne constante de $g(x)$ si et seulement si pour toute fonction concave $U(x)$, $\int_0^1 U(x) f(x)\, dx \leq 0$.

De façon plus rigoureuse, Rothschild et Stiglitz ont prouvé les trois points suivants: [1] si $j(x)$ peut être obtenu de $g(x)$ par une séquence d'étalements à moyenne constante, $\{f_i(x)\}$, alors $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ satisfait (7), (9) et (10); [2] si $J(x) - G(x) = F(x)$ satisfait les conditions (7), (9), (10) alors on peut approximer à volonté $j(x)$ à partir de $g(x)$ par une suite d'étalements à moyenne constante; finalement [3] les conditions (8) et (9) impliquent (9) et (10) (mais non vice-versa évidemment)[4]. Ainsi, le théorème affirme que la perspective aléatoire caractérisée par $g(x)$ sera préférée à la perspective caractérisée par $j(x)$ par tous les agents riscophobes si et seulement si elles diffèrent par un étalement à moyenne constante. De façon plus générale, g et j pourront différer davantage mais le théorème restera vrai si on peut passer de $g(x)$ à $j(x)$ par une suite d'étalements à moyenne constante. Évidemment, plusieurs perspectives aléatoires ne pourront être ordonnées; certains agents riscophobes préférant l'une, d'autres préférant l'autre. Mais dans la mesure où nous pouvons établir qu'une première perspective aléatoire diffère d'une deuxième par l'ajout à cette dernière d'un étalement à moyenne constante, nous pourrons affirmer que la première est plus risquée que la seconde et que tout agent riscophobe préférera cette dernière.

Dans le cas des perspectives aléatoires obtenues suite aux variations dp et dh, nous montrerons que nous pouvons passer de la perspective aléatoire obtenue suite à la variation dans la probabilité dp à la perspective aléatoire obtenue suite à la variation du montant de la perte dh en appliquant à la première un étalement à moyenne constante. Ainsi, nous pourrons affirmer que tout agent riscophobe préférera dp à dh lorsque ces deux variations ont le même effet sur $E(S)$, i.e. lorsque nous avons $dh = \frac{p}{h} dp$.

4. Le lecteur pourra se référer à Rothschild et Stiglitz (1970) pour la preuve du théorème.

1.4 : Variations comparables de p et h et étalement à moyenne constante

Dans cette sous-section nous allons montrer que les deux perspectives aléatoires suivantes obtenues suite aux variations dp et dh diffèrent par un étalement à moyenne constante.

$$
\begin{aligned}
P:\ & \mathrm{pr}[S = S_1] = (1 - p - dp) = 1 - p' \\
& \mathrm{pr}[S = S_1 - h] = p + dp = p' \\
& \therefore E(S) = S_1 - h(p + dp) = S_1 - ph - hdp \\
H:\ & \mathrm{pr}[S = S_1] = (1 - p) \\
& \mathrm{pr}[S = S_1 - h - dh = S_1 - h'] = p \\
& \therefore E(S) = S_1 - p(h + dh) \\
& \qquad = S_1 - ph - pdh = S_1 - ph - hdp
\end{aligned}
$$

Lemme 3 : on peut passer de P à H par un étalement à moyenne constante lorsque $dh = \frac{p}{h}\, dp$.

Preuve : il s'agit simplement d'appliquer le résultat de Rothschild et Stiglitz[5] : d'abord déterminer la différence entre P et H et ensuite montrer que cette différence satisfait les trois conditions (7), (9) et (10) définissant un étalement à moyenne constante. Ici la variable aléatoire S se situe dans l'intervalle $[0, S_1]$ et avant les variations dp et dh nous avons

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{pr}[S = S_1 - h] = p \\
& \mathrm{pr}[S = S_1 \quad\ ] = 1 - p
\end{aligned}
$$

Caractérisons maintenant P, la fonction de distribution cumulative de S dans la perspective obtenue de dp et H la fonction de distribution cumulative obtenue de dh.

$$
\begin{aligned}
P(0) &= 0 \\
P(S_1 - h') &= 0 \\
P(S_1 - h) &= p' \\
P(S_1) &= 1 \\
H(0) &= 0 \\
H(S_1 - h') &= p \\
H(S_1 - h) &= p \\
H(S_1) &= 1
\end{aligned}
$$

5. Comme nous l'a souligné un évaluateur anonyme, le théorème de Rothschild-Stiglitz n'est pas absolument nécessaire ici. En effet, les variations considérées de p et de h sont ici suffisamment simples pour permettre une comparaison directe à l'aide du théorème de Taylor-Lagrange (voir l'Appendice A pour les détails). Nous croyons utile d'utiliser plutôt le résultat de Rothschild-Stiglitz pour les raisons explicitées dans l'Appendice A.

$F = H - P$ sera donnée par

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(S_1 - h') &= p > 0 \\ F(S_1 - h) &= p - p' < 0 \\ F(S_1) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi (7) est vérifiée.

Vérifions que $T_1(S_1) = 0$

$$\begin{aligned} T_1(S_1) &= p(h' - h) - (p - p')h \\ &= pdh - hdp \\ &= 0 \text{ car } dh = \frac{h}{p}\, dp \end{aligned}$$

Vérifions enfin que

$$T(S) \geqslant 0,\ 0 \leqslant S \leqslant S_1$$

Il est évident que

$$T(S) \geqslant 0 \text{ pour } 0 \leqslant S \leqslant S_1 - h$$

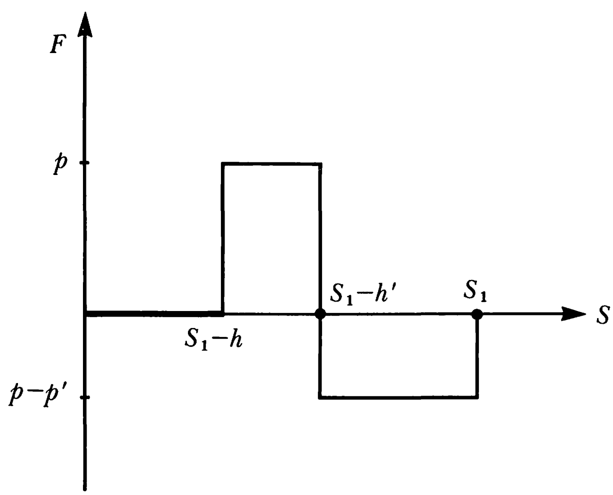
et pour $S_1 - h \leqslant S < S_1$

$$\begin{aligned} T(S) &= p(h' - h) + (p - p')(S - S_1 + h) \\ &> p(h' - h) + (p - p')h \text{ car } (p - p') < 0 \\ &= T(S_1) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi les conditions (9) et (10) sont respectées ||.

Nous pouvons illustrer graphiquement $F(S)$

GRAPHIQUE 2



Nous obtenons donc la perspective aléatoire H suite à l'application d'un étalement à moyenne constante à la perspective aléatoire P.

Nous avons ainsi prouvé la proposition suivante.

Proposition : Soit la perspective aléatoire où l'agent peut *perdre* une valeur h avec probabilité p. Tout agent riscophobe sera davantage pénalisé par une variation dh que par une variation dp équivalente en termes d'espérance de richesse.

Nous pouvons immédiatement donner un corollaire de cette proposition qui n'en est que la reformulation en termes de gain plutôt que de perte.

Corollaire : Soit la perspective aléatoire où l'agent peut *gagner* une valeur h avec probabilité p. Tout agent riscophobe préférera une variation dp à une variation dh équivalente en termes d'espérance de richesse.

SECTION 2 : *Applications*

La proposition et son corollaire peuvent être appliqués à diverses situations pour expliquer et prédire divers équilibres ou diverses actions des agents économiques.

2.1 : Autoassurance vs autoprotection

Supposons que l'agent puisse affecter la probabilité et le montant de la perte par des activités d'autoprotection x et d'autoassurance y[6]. Ainsi nous aurons $p(x)$ et $h(y)$ et l'espérance mathématique de la perte sera $p(x)h(y)$. On peut donner les exemples suivants d'activités x et y. Dans le cas de la santé, on peut supposer que la pratique du jogging, une activité x, réduit la probabilité d'un infarctus alors que le port d'une carte d'identification médicale (groupe sanguin, allergies, médication,...), une activité y, réduit plutôt la perte quand l'événement infarctus se produit. Dans le cas des incendies, on peut supposer qu'une plus grande attention à bien éteindre ses cigarettes, une activité x, réduit la probabilité de feu et que l'achat d'un extincteur chimique, une activité y, réduit la perte éventuelle si un incendie se déclare. En supposant que l'agent puisse choisir entre $\overline{x}$ et $\overline{y}$ pour lesquels $d[p(x)h(y)]$ est la même, alors l'application du théorème nous amène à prédire que l'agent riscophobe choisira les activités d'autoassurance plutôt que les activités d'autoprotection. L'autoassurance permet de réduire h et donc $dh < 0$; il en est de même pour dp. *Il y a donc une préférence de base pour l'autoassurance et l'agent riscophobe ne choisira l'autoprotection que si les coûts des activités x et y sont nettement à l'avantage de l'autoprotection.* Soit $C(x, y)$ la fonction de coût en termes d'utilité des activités x et y, alors les

6. Ces concepts ont été introduits par Ehrlich et Becker (1972).

choix de l'agent peuvent être caractérisés comme la solution au problème suivant :

$$\max_{x,y} W(S, x, y) = E_{x,y}\, U(S) - C(x, y) =$$
$$(1 - p(x))\, U(S_1) + p(x)U(S_1 - h(y)) - C(x, y)$$

Alors une condition nécessaire d'un maximum intérieur — l'égalité du taux marginal de substitution au rapport des coûts marginaux — peut s'écrire

$$\frac{p'(x)\left[U(S_1 - h(y)) - U(S_1)\right]}{-p(x)h'(y)U'(S_1 - h(y))} = +\frac{C_x}{C_y} \tag{11}$$

Cette condition sera aussi suffisante si certaines conditions, dont nous traitons plus loin, sont satisfaites. On peut approximer $U(S_1 - h(y)) - U(S_1)$ par une expansion de Taylor autour de $(S_1 - h(y))$ et obtenir

$$U(S_1 - h(y)) - U(S_1) = -U'(S_1 - h(y))h(y) - U''(S_1 - h(y))\,\frac{h(y)^2}{2} - R \tag{12}$$

et réécrire, négligeant R

$$\frac{p'(x)h(y)}{p(x)h'(y)}\left[1 - \left(-\frac{U''(S_1 - h(y))}{U'(S_1 - h(y))}\right)\frac{h(y)}{2}\right] = \frac{C_x}{C_y} \tag{13}$$

Un agent risconeutre choisira un couple $(\hat{x}, \hat{y})$ pour lequel

$$\frac{p'(\hat{x})h(\hat{y})}{p(\hat{x})h'(\hat{y})} = \frac{C_{\hat{x}}}{C_{\hat{y}}} \tag{14}$$

À ce point $(\hat{x}\ \hat{y})$, l'agent riscophobe a un taux marginal de substitution entre x et y donné par

$$\frac{p'(\hat{x})h(\hat{y})}{p(\hat{x})h'(\hat{y})}\left[1 - \frac{h(\hat{y})}{2}\left(-\frac{U''(S_1 - h(\hat{y}))}{U'(S_1 - h(\hat{y}))}\right)\right] < \frac{p'(\hat{x})h(\hat{y})}{p(\hat{x})h'(\hat{y})} \tag{15}$$

impliquant que les choix optimaux (x^*, y^*) de l'agent riscophobe satisferont

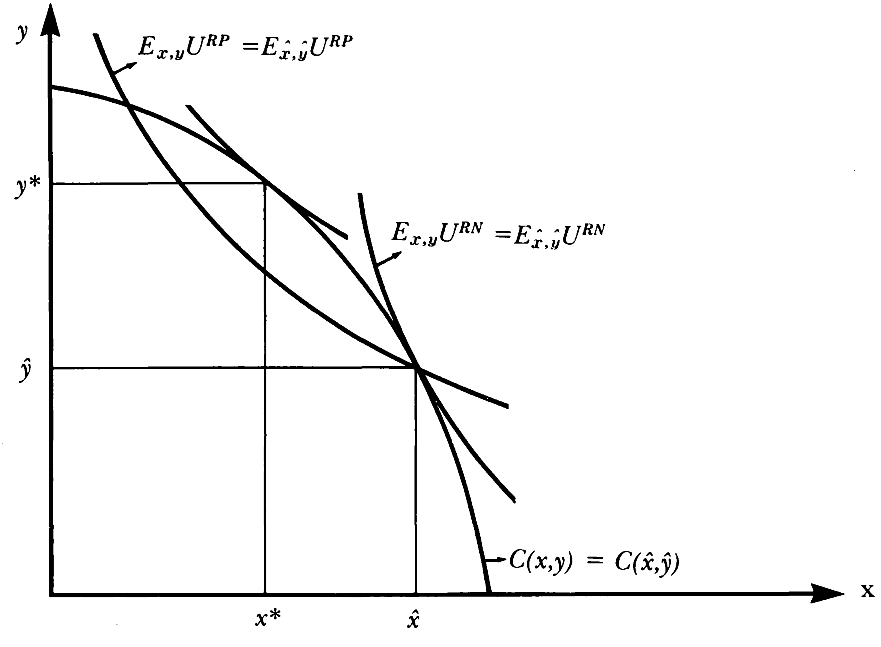
$$x^* < \hat{x}$$
$$y^* > \hat{y}$$

lorsqu'il est contraint par $C(x, y) = C(\hat{x}, \hat{y})$. Nous retrouvons la préférence de base de l'agent riscophobe pour l'autoassurance[7].

7. Voir Boyer et Dionne (1983) pour une analyse plus poussée de ce phénomène.

En définissant U^{RP} (U^{RN}) comme étant la fonction d'utilité d'un agent riscophobe (risconeutre), nous pouvons illustrer graphiquement le résultat précédent comme suit:

GRAPHIQUE 3



Dans le graphique 3, la concavité de $C(x, y) = C(\hat{x}, \hat{y})$ est naturelle et favorise le respect des conditions secondes de l'optimum du consommateur. La convexité des courbes d'indifférence dans l'espace (x, y) repose sur certaines conditions qu'on peut énoncer comme suit: en supposant que $p'(x) < 0, p''(x) > 0, h'(y) < 0, h''(y) > 0$, alors les courbes d'indifférence dans l'espace (x, y) sont convexes si, pour tout (x, y),

$$\frac{p''(x)p(x)}{[p'(x)]^2} > 2 - \left(-\frac{U''(S_1 - h(y))}{U'(S_1 - h(y))} + \frac{h''(y)}{[h'(y)]^2} \right) \left(\frac{U(S_1) - U(S_1 - h(y))}{U'(S_1 - h(y))} \right) \quad (16)$$

Bien que cette condition soit assez difficile à interpréter, il faut noter que le passage à l'espace (x, y) n'est pas simple et le lecteur s'en convaincra en essayant d'illustrer la substitution entre x et y à partir d'un graphique tel que le graphique 1. En d'autres termes, la convexité de $p(x)$ et de $h(y)$ et la concavité de $U(S)$ n'impliquent pas nécessairement la convexité des courbes d'indifférence dans l'espace (x, y)[8].

8. Le lecteur pourra retrouver facilement la condition (16) à partir de (11).

2.2 : Paiements d'assurance-chômage et taux de chômage

Considérons un travailleur qui gagne un revenu S_1 lorsqu'il travaille et reçoit une alloction de $(S_1 - h)$ lorsqu'il est chômeur. Supposons que le taux de chômage est tel que la probabilité que ce travailleur soit chômeur est égale à p. Ainsi, son revenu anticipé $\bar{S}$ est donné par $(S_1 - ph)$. Supposons que le gouvernement doive diminuer son déficit et qu'il ait le choix entre baisser les prestations d'assurance-chômage de 10% ou diminuer ses programmes d'aide à l'emploi ce qui augmenterait le taux de chômage de façon telle que la probabilité que le travailleur soit en chômage augmente de 10%. Dans les deux cas, $d\bar{S} = -(0,10)ph$. Nous pouvons appliquer la proposition et affirmer que *tout travailleur riscophobe préférera l'augmentation du chômage à la baisse des prestations d'assurance-chômage.* Inversement, le travailleur riscophobe préférera que le gouvernement augmente les allocations de chômage de 10% plutôt que de combattre le chômage et réduire la probabilité d'être chômeur de 10%. Ces résultats sont obtenus en supposant que le coût individuel de ces deux politiques est identique.

2.3 : Le stationnement illégal : niveau vs probabilité des amendes (réglementation par enquêtes et amendes)

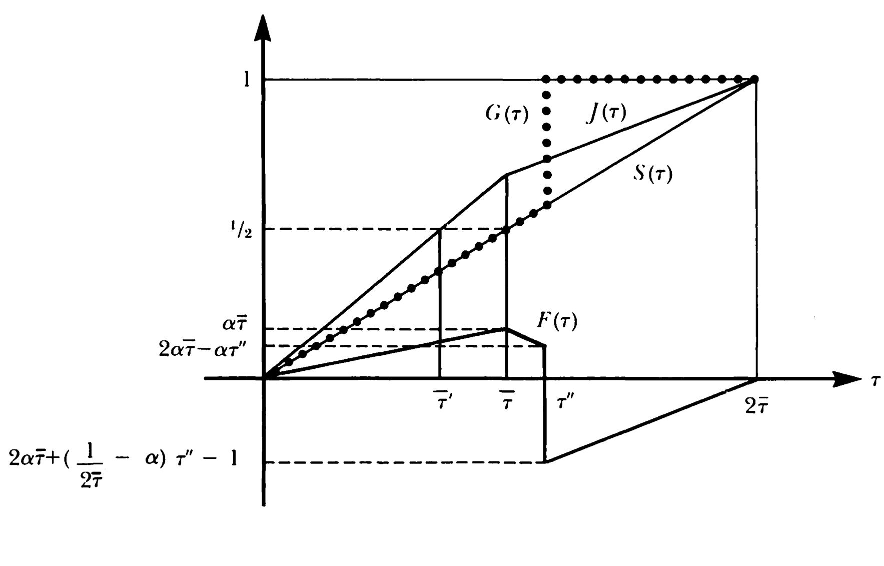
Considérons un automobiliste qui gare sa voiture illégalement et qui devra payer une amende d'une valeur de h s'il est effectivement pris, ce qui se produit avec la probabilité p étant donné les effectifs policiers consacrés au stationnement illégal. Le gouvernement considère la possibilité de combattre le stationnement illégal soit en augmentant l'amende h de 10%, soit en augmentant les effectifs policiers afin d'accroître la probabilité p de 10%, les deux politiques ayant le même effet sur l'espérance mathématique de l'amende (ph). L'application de la proposition nous permet d'affirmer que *les automobilistes riscophobes seront plus sensibles à la hausse de l'amende de 10% qu'à la hausse des effectifs policiers entraînant une hausse de 10% dans la probabilité d'être pris en délit.* Ainsi, l'efficacité d'une hausse de l'amende sera plus grande — même en négligeant les coût relatifs de hausser l'amende plutôt que les effectifs policiers — que celle d'une hausse de la probabilité p afin de réduire le stationnement illégal.

En réinterprétant les variables on peut discuter de la réglementation par enquêtes et amendes et de l'efficacité relative d'une hausse de la probabilité de vérification et d'une hausse équivalente de l'amende en cas de condamnation. Les problèmes que pose la réglementation s'expriment souvent en termes d'impossibilité de vérifier dans chaque cas la véracité des déclarations (impôts, données transmises par les firmes réglementées, publicité,...), la qualité des services offerts (agents de voyage, médecins...) ou encore l'effort fourni par les travailleurs ou les gestionnaires dans l'entreprise. La solution à ces problèmes passe souvent par l'institution au hasard d'enquêtes approfondies et l'imposition d'amendes dans les cas de fraude. Ainsi, si un agent fait l'objet d'une enquête avec probabilité p et qu'il subit une amende de h s'il est condamné pour fraude, alors l'espérance mathématique de la richesse du fraudeur sera $(S_1 - ph)$ où S_1 est sa richesse avec fraude mais sans enquête. Si S_1^n est sa richesse sans fraude, alors l'individu sera honnête (fraudeur) si $U(S_1^n) > (<) (1-p)U(S_1) + pU(S_1 - h)$. Considérons un fraudeur. En appliquant la proposition avec un raisonnement similaire au cas du stationnement illégal, nous pouvons affirmer qu'*un fraudeur riscophobe sera plus sensible à une hausse de l'amende de 10% qu'à une hausse de 10% de la probabilité d'être attrapé et condamné* même si les deux hausses affectent également sa richesse anticipée.

2.4 : Le contrôle des prix et des salaires et la lutte à l'inflation

L'inflation est perçue par l'ensemble des agents comme affectant à la baisse leur richesse réelle. Considérons un agent dont la richesse (salaire) nominale S_1 est fixe et qui risque donc de perdre une partie plus ou moins grande de sa richesse réelle selon le taux d'inflation réalisé. Supposons que le taux d'inflation τ est une variable aléatoire de densité $s(\tau) = \bar{s}$, $0 \leq \tau \leq 2\bar{\tau}$. Ainsi le taux d'inflation anticipée est $\bar{\tau}$ et l'espérance de richesse réelle est de $S_1(1 - \bar{\tau})$. Le gouvernement désire abaisser $\bar{\tau}$, le taux anticipé de l'inflation. Pour ce faire il considère deux politiques. Une politique monétaire et fiscale restrictive *(PR)* qui augmenterait la probabilité que le

GRAPHIQUE 4



taux d'inflation soit inférieur à $\bar{\tau}$ et réduirait la probabilité que le taux soit supérieur à $\bar{\tau}$. Ainsi, on passerait d'une densité uniforme $s(\tau)$ à une densité $j(\tau)$ de façon à ce que le taux anticipé d'inflation passe à $\bar{\tau}' < \bar{\tau}$. Soient $S(\tau)$ et $J(\tau)$ les fonctions de distribution cumulatives correspondantes. La seconde politique envisagée est celle du contrôle des prix et des salaires *(PC)* qui tout en gardant la distribution uniforme $s(\tau)$ sur l'intervalle $[0, \tau'']$, réduit l'intervalle possible du taux d'inflation à $[0, \tau'']$ en introduisant un point de masse à τ'', $pr(\tau = \tau'') = \int_{\tau''}^{2\bar{\tau}} s(\tau)d\tau$, ce qui fait passer le taux d'inflation anticipé à $\bar{\tau}'$ également. Soit $G(\tau)$ la fonction de distribution cumulative correspondante. Dans les deux politiques, l'espérance de richesse réelle passe à $S_1(1 - \bar{\tau}')$. On peut ici encore passer de la perspective aléatoire obtenue suite à l'imposition du contrôle des prix et des salaires à celle obtenue suite à la politique monétaire et fiscale restrictive par l'application à la première d'un étalement à moyenne constante.

En supposant que $j(\tau) = s(\tau) + \alpha$ pour $\tau \in [0, \bar{\tau}]$ et $j(\tau) = s(\tau) - \alpha$ pour $\tau \in [\bar{\tau}, 2\bar{\tau}]$, nous pouvons illustrer S, J, G et F sur le graphique 4. Il est relativement facile de montrer (voir l'Appendice B) que $F(\tau)$ satisfait les conditions (7), (8) et (9) ce qui implique que l'on obtient $J(\tau)$ en appliquant un étalement à moyenne constante à $G(\tau)$[9]. Ainsi, *tout agent riscophobe préférera une politique gouvernementale de contrôle des prix et des salaires à une politique monétaire et fiscale restrictive équivalente à la première en termes du taux d'inflation anticipé*[10].

2.5 : La sécurité routière

Afin d'assurer une plus grande sécurité routière, les gouvernements peuvent avoir recours à plusieurs moyens. Deux de ces moyens sont le port obligatoire de la ceinture de sécurité et la réduction des limites de vitesse sur les routes. Nous ferons l'hypothèse fort réaliste que la première mesure réduit la gravité des accidents mais non le nombre d'accidents alors que la deuxième réduit le nombre d'accidents mais non leur gravité. Considérons un conducteur riscophobe et supposons qu'il peut être impliqué dans un type d'accident avec probabilité p et lui causant un dommage h. Sa richesse anticipée sera donc, dans notre notation, $(S_1 - ph)$. Supposons que le port obligatoire de la ceinture de sécurité réduise de 10% le dommage subi lors d'un accident. Supposons par ailleurs que la probabilité d'accident puisse être réduite de 10% en réduisant la limite

9. Nous pouvons dériver un résultat analogue en considérant que la politique *PC* réduit l'intervalle de τ à $[0, \tau'']$ mais garde la fonction de densité uniforme sur ce nouvel intervalle. Les deux hypothèses représentent des effets différents mais plausibles de la politique *PC*. Il nous semble cependant que l'effet retenu — densité $s(\tau)$ sur $[0, \tau'']$ et point de masse à τ'' — correspond davantage à l'opinion populaire sur la politique *PC*.

10. Ceci dans la mesure où notre représentation des politiques capte l'essentiel de leurs effets (voir aussi note 9).

supérieure de vitesse de Z kmh. *Face au choix entre le port obligatoire de la ceinture et la baisse de Z kmh des limites de vitesse, tout conducteur riscophobe préférera le port obligatoire de la ceinture de sécurité ou toute autre mesure permettant de réduire* h *de 10%.* Nous faisons abstraction ici de toute modification de comportement des conducteurs. En effet, suite aux politiques gouvernementales on peut s'attendre à ce que les conducteurs s'ajustent en modifiant leurs activités d'autoprotection et d'autoassurance. De même, nous faisons abstraction des différences de coûts que peuvent représenter les deux politiques[11] pour les conducteurs et pour le gouvernement puisque nous nous limitons aux effets d'une variation de risque.

2.6 : Les loteries (choix de projets)

Pour augmenter ses recettes brutes, une société des loteries peut augmenter la valeur du prix à gagner ou la probabilité de gagner en augmentant le nombre de prix[12]. Ainsi, on pourrait augmenter la valeur d'une loterie offrant actuellement à l'acheteur la possibilité de gagner 1 000 000$ avec une probabilité de 10^{-6} en doublant le prix à 2 000 000$ ou en offrant 2 prix de 1 000 000$ ce qui double la probabilité de gain à $(5.10^5)^{-1}$. Chacune de ces deux possibilités augmente l'espérance de gain de l'acheteur de 1$ par billet en supposant que le nombre de billet reste égal à 10^6. L'application du corrollaire dans ce cas-ci nous permet d'affirmer que la hausse dans le prix du billet de loterie pourra être plus forte si la société des loteries opte pour les 2 prix de 1 000 000$ plutôt que pour le prix unique de 2 000 000$. En effet, *le consommateur riscophobe préférera une hausse de probabilité de gain à une hausse équivalente du montant du gain. Il sera donc prêt à payer davantage pour un billet qui double sa probabilité de gain que pour un billet qui double la valeur du gain même si l'espérance de gain est la même dans les deux cas.* Évidemment, le consommateur riscophobe n'achètera le billet que si son prix est suffisamment inférieur à l'espérance mathématique du gain pour couvrir le coût psychologique du risque, ce qui implique des pertes pour la société des loteries.

Alternativement, en considérant que les acheteurs de billets de loteries sont des riscophiles, la société des loteries aura intérêt à choisir l'option du prix de 2 000 000$ plutôt que l'option des deux prix de 1 000 000$. En effet, à l'inverse du riscophobe, le riscophile aura une préférence pour dh par rapport à dp quand h représente un gain et que dh et dp ont le même effet sur l'espérance de gain.

---

11. Voir Peltzman (1975) ainsi que Boyer et Dionne (1982) pour la prise en compte de ces phénomènes.

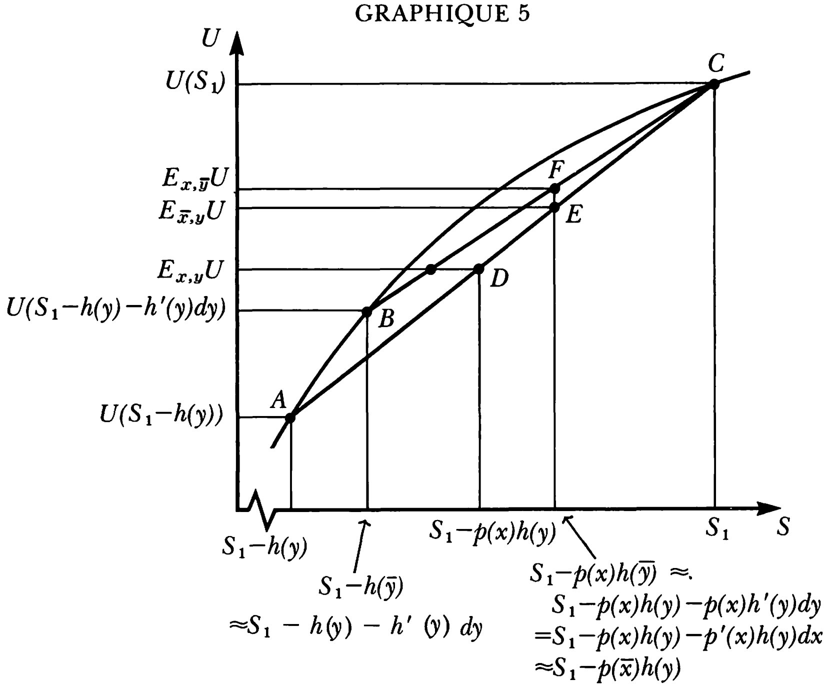
12. De toute évidence, nous n'offrons pas ici une théorie complète des loteries! L'achat de billets de loterie peut être expliqué par d'autres facteurs que ceux retenus dans cet article. Voir à ce sujet Brenner (1983), Dionne et Eeckhoudt (1982) et Shoemaker (1982).

Supposons maintenant que le choix de l'agent porte sur un projet d'investissement plutôt que sur un billet de loterie. Ainsi, supposons que l'agent est invité à financer un projet qui rapportera, pour un coût donné, une valeur actualisée des recettes de T dollars avec probabilité p et de 0 dollars avec probabilité $(1-p)$. L'espérance de la recette actualisée sera donc de $\$(pT)$. Le financier riscophobe préférera toujours une hausse de la probabilité p à une hausse équivalente du montant de gain T. Ainsi, *un concepteur de projet aura intérêt, devant un décideur riscophobe, à augmenter la rentabilité anticipée du projet par des activités de contrôle visant, à la marge, à augmenter* p *plutôt que* T *quand un niveau donné d'activités de contrôle amène des variations* dp *et* dT *équivalentes.*

SECTION 3 : *Riscophobie et Variation compensatoire*

Dans la mesure où l'agent riscophobe a une préférence de base pour les activités réduisant la perte h, on peut se demander de combien la valeur de ces activités est-elle supérieure à celle des activités réduisant la probabilité de perte. Afin de mieux situer le concept de variation compensatoire, considérons le cas où le gouvernement choisit entre $\bar{x} = x + dx$ et $\bar{y} = y + dy$, par exemple [13] entre la réduction des limites de vitesse et le port obligatoire de la ceinture de sécurité, et supposons que dx et dy entraînent des variations dp et dh équivalentes en termes d'espérance de richesse.

GRAPHIQUE 5



13. Notre analyse s'applique, mutatis mutandis, aux autres cas de la section 2.

Nous supposerons que le gouvernement choisit dx plutôt que dy — alors que l'agent riscophobe choisirait dy — et nous voulons mesurer quelle compensation le gouvernement devrait verser au conducteur riscophobe pour ce choix sousoptimal aux yeux de ce dernier. Nous verrons que cette compensation est fonction du degré de riscophobie de l'agent.

Considérons la représentation graphique suivante (nous supposons que pour le consommateur $C(x, y) \equiv 0$):

Au départ l'agent se situe au point D avec l'espérance mathématique de richesse $S_1 - p(x)h(y)$ et l'espérance mathématique d'utilité $E_{x,y}U = p(x)U(S_1 - h(y)) + (1-p(x))U(S_1)$. Le choix $\bar{x} = x + dx$ l'amènerait au point E avec espérance mathématique de richesse $S_1 - p(\bar{x})h(y) \approx S_1 - p(x)h(y) - p'(x)h(y)dx$ et espérance d'utilité $E_{\bar{x},y}U = p(\bar{x})U(S_1 - h(y)) + (1-p(\bar{x}))U(S_1) \approx (p(x) + p'(x)dx)U(S_1 - h(y)) + (1-p(x) - p'(x)dx)U(S_1)$. *Le choix* $\bar{y} = y + dy$ l'amènerait au point F avec espérance de richesse de $S_1 - p(x)h(\bar{y}) \approx S_1 - p(x)h(y) - p(x)h'(y)dy$ et espérance d'utilité $E_{x,\bar{y}}U = p(x)U(S_1 - h(\bar{y})) + (1-p(x))U(S_1) \approx p(x)U(S_1 - h(y) - h'(y)dy) + (1-p(x))U(S_1)$. Nous voulons une mesure monétaire équivalente à $F - E = E_{x,\bar{y}}U(S) - E_{\bar{x},y}U(S)$, i.e. une valeur m telle que

$$E_{\bar{x},y} \quad U(S + m) = E_{x,\bar{y}} \, U(S) \tag{17}$$

et donc

$$\begin{aligned}(p(x) + p'(x)dx)U(S_1 + m - h(y)) + (1-p(x) - p'(x)dx)U(S_1+m) \\ = p(x)U(S_1 - h(y) - h'(y)dy) + (1-p(x))U(S_1).\end{aligned} \tag{18}$$

Par des expansions de Taylor, nous pouvons écrire

$$U(S_1 + m - h(y)) \approx U(S_1 - h(y)) + U'(S_1 - h(y))m + R_1 \tag{19}$$

$$\begin{aligned}U(S_1 - h(y) - h'(y)dy) \approx U(S_1 - h(y)) - U'(S_1 - h(y))dh \\ + U''(S_1 - h(y)) \frac{dh^2}{2} + R_2\end{aligned} \tag{20}$$

$$U(S_1 + m) = U(S_1) + U'(S_1)m + R_3 \tag{21}$$

Utilisant ces expansions et négligeant R_1, R_2, R_3, afin de pouvoir isoler m, nous pouvons réécrire (18), en utilisant p et h pour $p(x)$ et $h(y)$, dp et dh pour $p'(x)dx$ et $h'(y)dy$, ainsi que $\bar{p}$ pour $p + dp$, comme suit:

$$\begin{aligned}&\left[\bar{p}U'(S_1 - h) + (1-\bar{p})U'(S_1)\right]m \\ &\quad + dp\left[U(S_1 - h) - U(S_1)\right] \\ &\quad = p\left[- U'(S_1 - h)dh + U''(S_1 - h) \frac{dh^2}{2}\right]\end{aligned} \tag{22}$$

qu'on peut réécrire

$$(E_{\bar{x},y}\, U')m \; + dp\Big[- U'(S_1 - h)h - U''(S_1 - h)\, \frac{h^2}{2}\Big]$$

$$= p\Big[- U'(S_1 - h)dh + U''(S_1 - h)\, \frac{dh^2}{2}\Big] \tag{23}$$

qui peut s'écrire, utilisant (1) et posant $\bar{h} = h + dh$

$$(E_{\bar{x},y}\, U')m = \frac{1}{2}\, U''(S_1 - h)\bar{h}hdp \tag{24}$$

et ainsi la compensation monétaire m définie par (17) est donnée, en négligeant le terme en $(dh)\,(dp)$, par l'expression suivante :

$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{U''(S_1 - h)}{E_{\bar{x},y}\, U'} \right) h^2 dp \tag{25}$$

où $m > 0$ car $dp = p'(x)dx < 0$ et $U'' < 0$.

Le facteur $\left(- \frac{U''(S_1 - h)}{E_{\bar{x},y}\, U'(S)} \right)$ ressemble à un coefficient de riscophobie. Bien qu'au numérateur nous ayons la dérivée seconde évaluée à $(S_1 - h)$, nous avons au dénominateur un terme qui est l'espérance mathématique post-dx de la dérivée première $(p(x) + p'(x)dx)U'(S_1 - h) + (1 - p(x) - p'(x)dx)U'(S_1)$. Nous appellerons ce coefficient «le coefficient de riscophobie dx-ajusté au point $(S_1 - h)$" ou $r_{dx}(S_1 - h)$.

Ainsi nous avons

$$m = - \frac{1}{2}\, r_{dx}\,(S_1 - h)h^2 dp \tag{26}$$

Il est important de noter que le coefficient r_{dx} dépend de S_1, h, p et $dp = p'(x)dx$. La compensation monétaire m porte sur la différence entre la politique dp ou dx et la politique dh ou dy et non pas entre la politique dp et l'absence de politique.

CONCLUSION

L'objet de cet article était de montrer qu'il est possible de prédire le comportement d'un agent riscophobe face à des variations équivalentes dans la probabilité et le montant de gain (ou perte). Nous avons démontré qu'un agent riscophobe préfère toujours une diminution de la perte à une baisse comparable de la probabilité de perte et, préfère toujours une augmentation de la probabilité de gain à une hausse équivalente du montant de gain et ce à l'aide du théorème de Rothschild-Stiglitz sur les étalements à moyenne constante. Nous avons appliqué ce résultat dans différents secteurs d'activités et nous avons proposé une mesure de compensation sociale que le gouvernement devrait verser aux agents riscophobes s'il choisit une politique qui va à l'encontre des préférences (face aux risques) des individus.

La portée de ces résultats n'est évidemment pas limitée aux seules variations équivalentes de montants et de probabilités. En effet, il est possible d'utiliser ces résultats pour prédire le comportement d'un agent riscophobe pour toutes variations de probabilités et de montants. Pour des variations non équivalentes, nous devons séparer les effets de la variation de la moyenne et les effets de la variation du risque et comparer les variations nettes de l'espérance mathématique de l'utilité. Cette séparation des effets de moyenne et des effets de risque est également importante pour les études empiriques.

APPENDICE A

Nous avons dérivé la proposition en appliquant le théorème de Rothschild-Stiglitz. Un évaluateur anonyme a suggéré la preuve suivante utilisant le théorème de Taylor-Lagrange.

Soit deux loteries:

$$A_1 \equiv (1 - p - dp, p + dp; S_1, S_1 - h)$$
$$A_2 \equiv (1 - p, p; S_1, S_1 - h - dh)$$

Avec $dh = \frac{h}{p} dp$ ce qui assure que les variations dp et dh ont le même impact sur l'espérance de S. Soit

$$U(A_1) = (1 - p - dp)\, U(S_1) + (p + dp)\, U(S_1 - h) \tag{A.1}$$
$$U(A_2) = (1 - p)\, U(S_1) + p\, U(S_1 - h - dh) \tag{A.2}$$

Selon le théorème de Taylor-Lagrange, il existe un λ et un δ dans (0,1) de sorte que

$$U(S_1) = U(S_1 - h) + h\, U'(S_1 - \lambda h) \tag{A.3}$$
$$U(S_1 - h - dh) = U(S_1 - h) - dh\, U'(S_1 - h - \delta dh) \tag{A.4}$$

En substituant (A.3) et (A.4) dans (A.1) et (A.2) nous obtenons après simplification que

$$U(A_1) > U(A_2) <=> U'(S_1 - h - \delta dh) > U'(S - \lambda h) \tag{A.5}$$

mais

$$S_1 - h - \delta dh < S_1 - \lambda h \tag{A.6}$$

et donc, par la concavité de U,

$$U(A_1) > U(A_2) \quad ||$$

Cette approche par Taylor-Lagrange est de toute évidence plus simple que celle par Rothschild-Stiglitz. Nous avons préféré utiliser la seconde pour deux raisons : *d'abord* et avant tout, le théorème de Taylor-Lagrange ne pourra pas, sauf cas tout à fait exceptionnels, être utilisé lorsqu'il y a plus de deux états possibles (car alors l'ordonnancement obtenu grâce à l'inégalité (A.6) ne tiendra plus, la comparaison entre les loteries devenant nécessairement multidimensionnelle) et a fortiori lorsque les états de la nature forment un continuum comme c'est le cas dans la section 2.4 ; *ensuite,* le théorème de Taylor-Lagrange ne pourra être utilisé pour calculer la variation compensatoire de la section 3 car il serait alors impossible d'isoler m.

APPENDICE B

Considérons le passage de $s(\tau)$ à $j(\tau)$. Nous avons

$$\bar{\tau}' = E_j(\tau) = \int_0^{2\bar{\tau}} \tau j(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^{\bar{\tau}} \left(\frac{1}{2\bar{\tau}} + \alpha\right) \tau \, d\tau + \int_{\tau}^{2\bar{\tau}} \left(\frac{1}{2\bar{\tau}} - \alpha\right) \tau d\tau$$

$$= \bar{\tau} - 2\bar{\tau}^2$$

On peut maintenant trouver la valeur de τ'' et sa probabilité qui, combinée avec $s(\tau)$ sur $[0, \tau'')$ donnera aussi $\bar{\tau}'$ comme espérance mathématique.

$$\Pr(\tau = \tau''] = \int_{\tau''}^{2\bar{\tau}} s(\tau) d\tau = 1 - \frac{\tau''}{2\bar{\tau}}$$

Ainsi

$$E_g(\tau) = \int_0^{\tau''} s(\tau) \tau d\tau + \tau''\left(1 - \frac{\tau''}{2\bar{\tau}}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\bar{\tau}} \tau''^2 + \tau''$$

En solutionnant l'équation $E_g(\tau) = \bar{\tau}'$ nous trouvons

$$\tau'' = (2\bar{\tau}) \left(1 - \sqrt{\alpha \bar{\tau}}\right) \tag{B.1}$$

On peut maintenant vérifier que $F(\tau)$ satisfait les conditions (7), (8), (9). Par construction, on peut directement voir que (7) et (8) sont satisfaites. Quant à (9), on peut l'écrire sous la forme suivante en nous référant au graphique 4.

$$\int_0^{\bar{\tau}} F(\tau) d\tau + \int_{\bar{\tau}}^{\tau''} F(\tau) d\tau = - \int_{\tau''}^{2\tau} F(\tau) d\tau \tag{B.2}$$

avec

$$\int_0^{\bar{\tau}} F(\tau) d\tau = \frac{1}{2} (\alpha \bar{\tau}) \tau$$

$$\int_{\tau}^{\tau''} F(\tau) d\tau = \alpha \bar{\tau} (\tau'' - \bar{\tau}) - \frac{1}{2} \alpha (\tau'' - \bar{\tau})^2$$

$$\int_{\tau''}^{2\bar{\tau}} F(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\left[2\alpha\bar{\tau} + \tau''\left(\frac{1}{2\bar{\tau}} - \alpha\right) - 1\right]\left[2\bar{\tau} - \tau''\right]$$

En solutionnant (B.2), nous trouvons la valeur de τ'' pour laquelle $F(\tau)$ constitue un étalement à moyenne constante ; cette valeur est la suivante

$$\tau'' = (2\bar{\tau})\,(1 - \sqrt{\alpha\bar{\tau}}) \tag{B.3}$$

Or cette valeur est exactement celle donnée par (B.1), i.e. celle pour laquelle les politiques *PC* et *PR* sont équivalentes en termes de taux d'inflation anticipé. Ainsi, on peut conclure que ces deux politiques impliquent des perspectives aléatoires qui diffèrent par un étalement à moyenne constante.

BIBLIOGRAPHIE

BOYER, M. et G. DIONNE, «The Choice Between Equivalent Variations in the Probability and Magnitude of Loss», Cahier 8230, Département de sciences économiques, Université de Montréal, juin 1982.

BOYER, M. et G. DIONNE, «Variation in the Probability and Magniture of Loss: Their Impact on Risk», *Revue Canadienne d'Économique*, vol. 16, août 1983, pp. 411-419.

BRENNER, R., *History: The Human Gamble*, University of Chicago Press, Chicago, (à paraître), 1983.

DIAMOND, P. et M. ROTHSCHILD, *Uncertainty in Economics*, Academic Press, New York, 1978.

DIONNE, G. et L. EECKHOUDT, «Risk Aversion, Insurance and Gambling», Cahier 8243, Département de sciences économiques, Université de Montréal, novembre 1982.

EHRLICH, I. et G.S. BECKER, «Market Insurance, Self-Insurance and Self-Protection», *Journal of Political Economy*, vol. 80, juillet 1972, pp. 623-648.

HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E., et G. POLYA, *Inequalities*, 2e éd., Cambridge University Press, London, 1953.

KOLM, S.C., «The Optimal Production of Social Justice», in *Public Economics* (J. Margolis and H. Guitton, eds.). Macmillan, New York, 1969.

PELTZMAN, S., «The Effects of Automobile Safety Regulation», *Journal of Political Economy*, vol. 83, 1975, pp. 677-725.

ROTHSCHILD, M. et J.E. STIGLITZ, «Increasing Risk: I, A Definition», *Journal of Economic Theory*, vol. 2, 1970, pp. 225-243.

SHOEMAKER, PAUL J.H., «The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations», *Journal of Economic Literature*, vol. 20, juin 1982, pp. 529-563.