L'Actualité économique

Jusqu'où l'État peut-il s'endetter? Une approche par les modèles à générations imbriquées d'agents

Bertrand Crettez, Philippe Michel et Bertrand Wigniolle

Volume 79, numéro 3, septembre 2003

URI : https://id.erudit.org/iderudit/009901ar
DOI : https://doi.org/10.7202/009901ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Crettez, B., Michel, P. & Wigniolle, B. (2003). Jusqu'où l'État peut-il s'endetter? Une approche par les modèles à générations imbriquées d'agents. *L'Actualité économique*, *79*(3), 277–295. https://doi.org/10.7202/009901ar

Résumé de l'article

L'objet de cet article est d'approfondir la question de la définition de la solvabilité de l'État dans les modèles à générations imbriquées d'agents pour une suite de dépenses publiques données. Pour nous, l'endettement public acceptable est celui qui reste compatible avec un fonctionnement effectif de l'économie. Nous considérons d'abord la situation où l'État choisit librement le montant des impôts (forfaitaires). Alors on montre qu'il n'y a aucune restriction sur la trajectoire de dette publique et que le gouvernement n'est soumis à aucune contrainte budgétaire intertemporelle. Lorsqu'il existe des contraintes sur les impôts forfaitaires que l'État peut lever, nous montrons qu'un équilibre intertemporel existe pourvu qu'une contrainte sur la dette soit vérifiée. Nous nous attachons plus particulièrement à l'étude de la contrainte suivante : à chaque date, le volume de la dette ne doit dépasser ni la valeur du PIB courant, ni la valeur actualisée du PIB de la période suivante. Nous analysons alors la condition d'équilibre budgétaire intertemporelle dans une économie ou la contrainte ci-dessus est vérifiée. Lorsque la limite de la valeur actualisée du PIB est nulle, nous montrons que le respect de notre condition implique la réalisation de l'équilibre budgétaire intertemporel. De plus, il est impossible de pratiquer un jeu de Ponzi. Lorsque la limite supérieure du PIB actualisé est positive strictement, le respect de la condition n'implique pas la réalisation de l'équilibre budgétaire intertemporel. De plus, il est possible de pratiquer un jeu de Ponzi.

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 79, nº 3, septembre 2003

JUSQU'OÙ L'ÉTAT PEUT-IL S'ENDETTER? UNE APPROCHE PAR LES MODÈLES À GÉNÉRATIONS IMBRIQUÉES D'AGENTS*

Bertrand CRETTEZ
L.I.B.R.E.
Université de Franche-Comté

Philippe MICHEL
Université de la Méditerranée II
et *I.U.F., G.R.E.Q.A.M.*

Bertrand WIGNIOLLE
E.U.R.E.Qua., Université de Paris-I
et *L.I.B.R.E., Université de Franche-Comté*

RÉSUMÉ – L'objet de cet article est d'approfondir la question de la définition de la solvabilité de l'État dans les modèles à générations imbriquées d'agents pour une suite de dépenses publiques données. Pour nous, l'endettement public acceptable est celui qui reste compatible avec un fonctionnement effectif de l'économie. Nous considérons d'abord la situation où l'État choisit librement le montant des impôts (forfaitaires). Alors on montre qu'il n'y a aucune restriction sur la trajectoire de dette publique et que le gouvernement n'est soumis à aucune contrainte budgétaire intertemporelle. Lorsqu'il existe des contraintes sur les impôts forfaitaires que l'État peut lever, nous montrons qu'un équilibre intertemporel existe pourvu qu'une contrainte sur la dette soit vérifiée. Nous nous attachons plus particulièrement à l'étude de la contrainte suivante : à chaque date, le volume de la dette ne doit dépasser ni la valeur du PIB courant, ni la valeur actualisée du PIB de la période suivante. Nous analysons alors la condition d'équilibre budgétaire intertemporelle dans une économie ou la contrainte ci-dessus est vérifiée. Lorsque la limite de la valeur actualisée du PIB est nulle, nous montrons que le respect de notre condition implique la réalisation de l'équilibre budgétaire intertemporel. De plus, il est impossible de pratiquer un jeu de Ponzi. Lorsque la limite supérieure du PIB actualisé est positive strictement, le respect de la condition n'implique pas la réalisation de l'équilibre budgétaire intertemporel. De plus, il est possible de pratiquer un jeu de Ponzi.

* Nous remercions Claude Fluet pour ses remarques sur une version antérieure de l'article. Nous remercions également les participants du séminaire « Générations Imbriquées » pour leurs commentaires.

ABSTRACT – The purpose of this paper is to improve our understanding of government solvency in OLG models with a given sequence of government expenditures. In our view, public debt is allowed if its level does not preclude the existence of a competitive equilibrium. We first consider the case where the government can implement whatever amounts of lump-sum taxes. Then we show that there is no restriction on the path of public debt, and that the government is not constrained by any intertemporal budget constraint. When there are some restrictions on lump-sum taxes, then an equilibrium exists providing that a restriction on the level of public debt is satisfied. We pay special attention to the following restriction : at any each date, the amount of public debt is less that the value of the GNP at that date and less than the discounted value of the GNP one period after. Supposing that our restriction holds along a competive equilibrium path, we have investigated whether or not the intertemporal budgetary equilibrium condition holds. When the limit of the discounted value of the GNP is nil indeed, then the intertemporal budgetary equilibrium condition holds. Moreover, a Ponzi game is impossible. When the superior limit of the discouted value of the debt is strictly positive our condition does not imply the intertemporal budgetary equilibrium condition. A Ponzi game is also possible.

INTRODUCTION

L'intérêt théorique porté aux politiques d'endettement public a été ravivé récemment par la signature du Traité d'Amsterdam. Ce dernier contient des bornes supérieures pour les ratios endettement-PIB, déficit-PIB dont le caractère impératif a été discuté. À n'en pas douter, la raison principale expliquant ces bornes est la peur d'une inflation excessive engendrée par la monétisation d'une dette publique devenue insupportable. Mais qu'est-ce qu'une telle dette?

Une dette insupportable est assurément celle qui pousse l'État à la faillite, dans l'insolvabilité, c'est-à-dire dans l'impossibilité de faire face à ses engagements. Il existe des considérations théoriques concernant la notion de solvabilité de l'État; on considère ainsi que l'État est solvable dès lors que sa contrainte budgétaire intertemporelle est satisfaite : la somme actualisée des excédents primaires – à condition qu'elle soit bien définie – couvre la valeur de la dette initiale. De façon équivalente, la limite à l'infini de la valeur actualisée de la dette est négative ou nulle. Ceci généralise la notion habituelle de solvabilité valable pour un horizon fini : un agent est solvable si la somme actualisée de ses revenus permet de faire face à sa dette initiale.

L'État est cependant un agent dont la durée de vie est *a priori* infinie. De ce fait, on ne peut exclure que l'État puisse toujours emprunter pour rembourser sa dette (« dette ou jeu de Ponzi »). Nous verrons que la possibilité d'une telle politique dépend crucialement des autres instruments à la disposition de l'État.

D'un point de vue empirique, certaines études ont cherché à estimer la solvabilité des États au sens donné plus haut (*cf.* par exemple Jondeau, 1992). D'un point de vue pragmatique, l'ignorance des taux d'intérêt futurs, des dépenses publiques et des recettes à venir pousse à l'adoption de ratios budgétaires contraignants afin d'assurer la solvabilité de l'État.

L'objet de cet article est d'approfondir la question de la définition de la solvabilité de l'État. Nous partons de la constatation que l'usage d'imposer le respect d'une contrainte budgétaire intertemporelle à l'État est surtout commun dans la littérature recourant à l'agent représentatif à durée de vie infinie (pour une discussion de la pertinence de cet usage, *cf.* Crettez, Michel, Wigniolle, 2002).

La contrainte budgétaire intertemporelle de l'État est en général ignorée dans la littérature utilisant les modèles à générations imbriquées d'agents, comme en témoigne les travaux fondateurs de cette littérature (*cf.* Allais, 1947 et Diamond, 1965). On y considère en effet implicitement les politiques d'endettement compatibles avec un fonctionnement « normal » de l'économie, le plus souvent à l'état stationnaire. Ce point de vue n'est pas sans pertinence : il est des situations – celles où l'économie est en suraccumulation du capital – où la contrainte budgétaire intertemporelle n'est pas définie (éviter la faillite n'implique donc pas le respect de la contrainte budgétaire intertemporelle).

Cette observation est au point de départ de notre analyse. À la question, jusqu'où l'État peut-il s'endetter? Nous répondrons que l'endettement public acceptable, ne conduisant pas à la faillite, est celui qui reste compatible avec un fonctionnement effectif de l'économie (l'équilibre concurrentiel existe). Pour simplifier l'analyse, nous nous restreignons à un cadre non monétaire[1]. La démarche suivie dans le présent article est la suivante.

Dans la première section nous présentons le cadre d'analyse : un modèle à générations imbriquées d'agents à la Diamond (1965). La suite des dépenses publiques est considérée comme donnée. On y expose les différents instruments de financement des dépenses publiques : dette publique et impôts (forfaitaires).

Une discussion détaillée de la notion d'*équilibre budgétaire intertemporel*[2], de celle de *jeu de Ponzi*[3] est fournie à la section 2. Dans la troisième section, nous considérons la situation où l'État choisit librement le montant des impôts forfaitaires sans contrainte *a priori* sur l'endettement de l'État. Nous y définissons une notion de trajectoire réalisable, c.-à-d. qui vérifie la contrainte de ressources physiques – en particulier que les dépenses publiques peuvent être produites – et la condition d'arbitrage des deux consommations par les agents sur leur cycle de vie. À cette occasion, nous montrons qu'il n'existe aucune restriction *a posteriori* sur la dette publique pour qu'une trajectoire réalisable soit un équilibre. En effet, il existe toujours des impôts forfaitaires permettant de réaliser l'équilibre. N'importe quel montant d'endettement public est compatible avec n'importe quelle trajectoire réalisable. En ce sens, la dette est neutre.

---

1. Pour un début de prise en compte de la monnaie, *cf.* par exemple, Crettez, Michel et Wigniolle (1999 : chapitre 5).

2. La somme actualisée des excédents primaires est égale à la valeur initiale de la dette ou encore, la limite de la valeur actualisée de la dette est nulle.

3. C'est-à-dire, le financement du remboursement de la dette par l'émission d'une nouvelle dette.

Ce qui limitera l'endettement public c'est l'impossibilité de lever n'importe quels montants d'impôts forfaitaires. Pour prendre en compte cette impossibilité, nous envisageons à la quatrième section deux cas polaires, les agents ne payant des impôts qu'à une de leurs deux périodes de vie. Dans le premier cas, les agents jeunes ne paient pas d'impôts; dans le second, ce sont les agents vieux qui n'en paient pas. Dans le premier cas, pour qu'une trajectoire puisse constituer un équilibre concurrentiel, il faut que le volume de la dette ne dépasse pas la valeur du PIB courant. Dans le second cas, la dette ne doit pas dépasser la valeur actualisée du PIB de la période suivante (en sorte que la valeur de remboursement de la dette ne dépasse pas le PIB futur). Nous introduisons alors une condition plus générale limitant l'émission de dette au maximum de la valeur du PIB courant et du PIB actualisé de la période suivante. Nous montrons que cette condition dette-PIB recouvre celle étudiée par Buiter et Kletzer (1998)[4] : sur son cycle de vie, un agent est soit toujours taxé, soit toujours subventionné. Finalement, nous supposons que la condition dette-PIB est vérifiée le long d'une trajectoire d'équilibre et nous mettons en évidence ses implications quant à la vérification de la condition d'équilibre budgétaire intertemporel et la possibilité de jeu de Ponzi.

1. Le modèle

On considère un modèle à générations imbriquées à la Allais (1947)-Diamond (1965)-Samuelson (1958). Le temps s'écoule indéfiniment $t = 0, 1, ...$

Il y a N_t nouveaux agents à la période t; leur durée de vie est de deux périodes. Le nombre de nouveaux agents croît au taux n. En $t = 0$, il y a N_{-1} agents vieux qui vivent une période.

1.1 *Les agents*

Chaque agent né en t a une fonction d'utilité intertemporelle $U : \mathbb{R}_+^{*2} \to \mathbb{R}$, dont les arguments sont respectivement les consommations c_t et d_{t+1} en première et seconde périodes de vie. U est une fonction croissante en chacun de ses arguments, de classe $\mathcal{C}^2$, et strictement quasi concave. On suppose également :

$$\forall \bar{c} > 0, \bar{d} > 0, \lim_{c \to 0} U_c'(c, \bar{d}) = +\infty \text{ et } \lim_{d \to 0} U_d'(\bar{c}, d) = +\infty .$$

L'agent offre inélastiquement une unité de travail en première période de vie.

Les contraintes budgétaires prises en compte par l'agent sont :

$$c_t + s_t = w_t - \tau_t^1 ,$$

$$d_{t+1} = R_{t+1} s_t - \tau_{t+1}^2 .$$

4. Nous remercions David de la Croix de nous avoir indiqué cette référence.

On note s_t l'épargne, w_t le revenu salarial, τ_t^1 est l'impôt forfaitaire à la date 1, τ_{t+1}^2 est l'impôt forfaitaire à la date 2.

Nous supposons que le revenu de cycle de vie est strictement positif : $w_t - \tau_t^1 - \tau_{t+1}^2 / R_{t+1} > 0$. Les décisions des agents nés en t, c_t, s_t et d_{t+1}, sont uniques, et sont caractérisées par :

$$U_c'(c_t, d_{t+1}) = R_{t+1} U_d'(c_t, d_{t+1}) , \tag{1}$$

$$c_t + s_t = w_t - \tau_t^1 , \tag{2}$$

$$d_{t+1} = R_{t+1} s_t - \tau_{t+1}^2 . \tag{3}$$

Les agents vieux en $t = 0$ ont chacun une dotation s_{-1} et ils consomment :

$$d_0 = R_0 s_{-1} - \tau_0^2 . \tag{4}$$

1.2 *Les firmes*

À chaque période, une firme représentative produit un bien à l'aide d'une fonction de production $F : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, dont les arguments sont le capital K_t et le travail L_t. F est croissante en chacun de ses deux arguments, concave et homogène de degré 1. Elle est deux fois continûment différentiable dans $\mathbb{R}_+^{*2}$. On suppose que la dépréciation du capital est totale en une période.

Cette firme maximise son profit $\pi_t = F(K_t, L_t) - w_t L_t - R_t K_t$. Les conditions nécessaires d'optimalité sont : $F_K(K_t, L_t) = R_t$, et $F_L(K_t, L_t) = w_t$.

1.3 *Le gouvernement*

On considère un gouvernement qui à chaque période réalise des dépenses publiques G_t (dont la suite est donnée une fois pour toute) et dont la contrainte budgétaire est :

$$B_t = R_t B_{t-1} + G_t - N_t \tau_t^1 - N_{t-1} \tau_t^2 . \tag{5}$$

B_t est la dette émise par le gouvernement à la date t, et $R_t B_{t-1}$ constitue le remboursement de la dette émise à la période précédente (la dette a une maturité d'une période).

1.4 *L'équilibre intertemporel avec prévisions parfaites*

Étant donné K_0, B_{-1}, $s_{-1} = (K_0 + B_{-1}) / N_{-1}$, et une suite $(G_t, \tau_t^1, \tau_t^2)_{t \geq 0}$, un équilibre intertemporel avec prévisions parfaites est une suite $(K_{t+1}, B_t, c_t, d_t, s_t, w_t, R_t)_{t \geq 0}$ avec $K_{t+1} > 0$, $c_t > 0$, $d_t > 0$, $w_t > 0$, $R_t > 0$ qui vérifie l'ensemble des conditions suivantes :

1. les consommateurs maximisent leur utilité sous contraintes budgétaires, c.-à-d. vérifient (1), (2) et (3); la consommation des premiers vieux agents vérifiant (4);

2. les rémunérations des facteurs sont données par les conditions de maximisation du profit de la firme écrites à l'équilibre du marché du travail :

   $F_K(K_t, N_t) = R_t$ et $F_L(K_t, N_t) = w_t$;

3. l'État satisfait sa contrainte budgétaire :

   $B_t = R_t B_{t-1} + G_t - N_t \tau_t^1 - N_{t-1} \tau_t^2$;

4. le marché du bien est en équilibre :

   $F(K_t, N_t) = K_{t+1} + G_t + N_t c_t + N_{t-1} d_t$.

   La dernière condition peut être remplacée de manière équivalente par :

   $N_t s_t = K_{t+1} + B_t$.

En effet, il suffit d'utiliser les contraintes budgétaires des agents privés et du gouvernement, et les expressions des prix des facteurs pour l'obtenir.

2. L'équilibre budgétaire intertemporel du gouvernement

Il est communément posé dans le modèle avec agent à durée de vie infinie que la contrainte budgétaire intertemporelle des ménages implique une contrainte budgétaire intertemporelle du gouvernement (pour une étude plus précise de cette question, voir Crettez, Michel et Wigniolle, 2002). Souvent, les auteurs font l'hypothèse que l'équilibre budgétaire intertemporel du gouvernement est vérifié, même dans le modèle avec agent à durée de vie finie.

La contrainte budgétaire de la période t (5) s'écrit en termes actualisés :

$$\rho_t B_t = \rho_{t-1} B_{t-1} + \rho_t (G_t - N_t \tau_t^1 - N_{t-1} \tau_t^2)$$

où les facteurs d'actualisation ρ_t sont définis par :

$$\rho_t = \frac{\rho_{t-1}}{R_t} \text{ et } \rho_{-1} = 1 .$$

On en déduit :

$$\rho_T B_T = B_{-1} + \sum_{t=0}^{T} \rho_t (G_t - N_t \tau_t^1 - N_{t-1} \tau_t^2) .$$

Dans le cas où la somme actualisée des déficits primaires de chaque période (consommations gouvernementales moins taxes) converge, on obtient :

$$\lim_{T \to +\infty} \rho_T B_T = B_{-1} + \sum_{t=0}^{+\infty} \rho_t (G_t - N_t \tau_t^1 - N_{t-1} \tau_t^2) .$$

La limite de la valeur actualisée de la dette est égale à la somme de la dette initiale et de la somme actualisée des déficits primaires.

Définition 1 : *La condition d'équilibre budgétaire intertemporel du gouvernement est vérifiée quand le gouvernement rembourse sa dette initiale à l'aide d'excédents budgétaires, ce qui s'écrit :*

$$\lim_{T \to +\infty} \rho_T B_T = B_{-1} + \sum_{t=0}^{+\infty} \rho_t (G_t - N_t \tau_t^1 - N_{t-1} \tau_t^2) = 0 .$$

Comme nous allons le voir, une telle condition ne s'impose pas à l'équilibre intertemporel du modèle à générations imbriquées.

Définition 2 : *Lorsqu'à chaque période, le remboursement de la dette gouvernementale (intérêt et capital) est entièrement couvert par l'émission d'une nouvelle dette, et que cette dette est positive, on dit que le gouvernement joue un jeu de Ponzi. Cette condition : $B_{t+1} \geq R_{t+1} B_t$ avec $B_t > 0$ équivaut à*

$$\rho_{t+1} B_{t+1} \geq \rho_t B_t \text{ et } B_t > 0 . \tag{6}$$

3. L'absence de limites à l'endettement

Nous commençons l'étude de l'endettement en supposant que le gouvernement choisit librement la dette et les taxes sans autre restriction que sa contrainte budgétaire (5) à chaque période. Notre intention est d'identifier les suites $(B_t)_{t \geq 0}$ de dette publique compatibles avec l'existence d'un équilibre intertemporel.

Définition 3 : *On appelle trajectoire réalisable, une suite $(c_t, d_t, G_t, K_t)_{t \geq 0}$ de quantités strictement positives, qui vérifient la contrainte de ressources de l'économie et la condition d'arbitrage des ménages sur leur cycle de vie, c.-à-d. :*

1) $F(K_t, N_t) = K_{t+1} + G_t + N_t c_t + N_{t-1} d_t ,$

2) $U_c(c_t, d_{t+1}) = F_K(K_{t+1}, N_{t+1}) \, U_d(c_t, d_{t+1}) .$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 1 : *Pour toute trajectoire réalisable et pour toute suite de nombres réels $(B_t)_{t \geq -1}$, il existe une suite $(\tau_t^1, \tau_t^2)_{t \geq 0}$ pour laquelle cette trajectoire constitue un équilibre intertemporel associé à la suite de politiques économiques $(B_{t-1}, \tau_t^1, \tau_t^2)_{t \geq 0}$.*

Démonstration : Il suffit de poser :

$$N_t \tau_t^1 = N_t F_L(K_t, N_t) - N_t c_t - (K_{t+1} + B_t) ,$$

$$N_{t-1} \tau_t^2 = F_K(K_t, N_t) \, (K_t + B_{t-1}) - N_{t-1} d_t .$$

Alors, l'agent né en t dispose des ressources lui permettant d'acquérir les consommations de la trajectoire réalisable. De plus, la condition 2) montre que l'agent a intérêt à choisir les consommations prévues le long de la trajectoire réalisable et, par construction des transferts, le montant d'épargne permettant de financer la dette émise en t et le capital prévu en $t + 1$. Finalement, on vérifie que la condition 1) et les contraintes budgétaires de l'agent assurent que la contrainte budgétaire du gouvernement est satisfaite. *Q.E.D.*

Un exemple simple illustrera ce résultat. Supposons qu'il n'y a pas de dette initialement ($B_{-1} = 0$) et que l'État doit lever un montant arbitraire B_0 à la date zéro. De plus, supposons que la dette doive être nulle à toutes les autres périodes ($\forall t \geq 1, B_t = 0$). On réalise comme équilibre une trajectoire donnée en choisissant comme suit les impôts.

À la date zéro :

$$N_0 \tau_0^1 = N_0 F_L(K_0, N_0) - N_0 c_0 - (K_1 + B_0) ,$$

$$N_{-1} \tau_0^2 = F_K(K_0, N_0)\, K_0 - N_{-1} d_0 .$$

À la date 1, nous avons :

$$N_1 \tau_1^1 = N_1 F_L(K_1, N_1) - N_1 c_1 - K_2 ,$$

$$N_0 \tau_1^2 = F_K(K_1, N_1)\, (K_1 + B_0) - N_0 d_1 .$$

Aux dates suivantes, nous aurons :

$$N_t \tau_t^1 = N_t F_L(K_t, N_t) - N_t c_t - K_{t+1} ,$$

$$N_{t-1} \tau_t^2 = F_K(K_t, N_t)\, K_t - N_{t-1} d_t .$$

Si B_0 est très grand, alors, τ_0^1 est négatif : on subventionne les agents jeunes pour qu'ils puissent souscrire la dette. Puis, lorsqu'ils sont vieux, ils paient un impôt important pour financer le remboursement de la dette : τ_1^2 devient très grand.

Que nous apprend la proposition précédente? La réalisation d'une trajectoire réalisable comme équilibre intertemporel s'effectue pour n'importe quelle suite de dette publique pourvu que l'on puisse choisir de manière idoine les taxes forfaitaires. Il n'y a donc aucune restriction sur l'endettement du gouvernement.

On en déduit aussi une certaine forme de neutralité. Prenons en effet comme référence un équilibre intertemporel. C'est évidemment une trajectoire réalisable. Il existe donc une infinité de trajectoires de dettes telles qu'avec adaptation des taxes, la même trajectoire réalisable constitue un nouvel équilibre intertemporel avec ces dettes et ces taxes.

La dette n'est toutefois pas neutre au sens suivant[5] : en changeant de trajectoire admissible, il faut modifier la politique de dette et/ou de taxes. À taxes données, un changement de politique de dette modifie l'équilibre intertemporel.

5. Nous considérons toujours comme une donnée la suite des dépenses publiques.

Dans la littérature traitant des modèles à générations imbriquées, il est bien connu que l'on peut décentraliser l'optimum social intertemporel grâce à des taxes forfaitaires bien choisies (*cf.* par exemple Marchand, Michel et Pestieau, 1990). Le résultat ci-dessus montre que l'on peut décentraliser n'importe quelle trajectoire réalisable associée à n'importe quelle suite de dettes publiques moyennant le choix d'un système de transferts forfaitaires. La dette publique est un instrument permettant de faire des transferts entre générations, un système de taxes forfaitaires permet de corriger ces transferts de manière à faire correspondre les décisions des agents à la trajectoire réalisable. Lorsque l'on peut choisir les transferts forfaitaires, la dette publique est un instrument de politique économique redondant.

4. Limites à l'endettement dans le cas de deux instruments

4.1 *Le cas où ne sont taxés que les agents vieux*

Dans la section précédente, il n'existait pas de restrictions sur les impôts levés par le gouvernement. Nous supposons ici que seuls sont taxés les agents vieux ($\tau_t^1 = 0, \forall t \geq 0$). Dans ce cas, la dette vérifie $\forall t \geq 0$:

$$B_t = N_t w_t - N_t c_t - K_{t+1} .$$

Il existe alors un couple unique $(\tau_t^2, B_t)_{t \geq 0}$ pour lequel une trajectoire réalisable donnée constitue un équilibre intertemporel. On déduit de l'expression de la dette que celle-ci reste en valeur absolue inférieure au produit national.

En effet, on a d'une part

$$B_t < N_t w_t = N_t F_L' (K_t, N_t) < F(K_t, N_t) = Y_t$$

et d'autre part

$$B_t > - N_t c_t - K_{t+1} = - F(K_t, N_t) + G_t + N_{t-1} d_t > - Y_t .$$

Ainsi, dans le cas où les seuls instruments du gouvernement sont la taxation des jeunes et la dette, celle-ci vérifie :

$$| B_t | < Y_t . \tag{7}$$

4.2 *Le cas où ne sont taxés que les agents jeunes*

Nous supposons ici que seuls sont taxés les agents jeunes ($\tau_t^2 = 0, \forall t \geq 1$). Pour qu'une trajectoire réalisable donnée puisse être obtenue comme équilibre intertemporel, il est nécessaire (en général) de taxer les premiers vieux, quand B_{-1} et K_0 sont donnés. En effet, avec $s_{-1} = (K_0 + B_{-1}) \,/\, N_{-1}$, il n'est possible de réaliser d_0 donné qu'à l'aide de la taxe $\tau_0^2 = R_0 s_{-1} - d_0$. Par contre, il est possible d'imposer $\tau_t^2 = 0, \forall t \geq 1$.

Dans ce cas, la dette vérifie $\forall t \geq 1$:

$$R_t B_{t-1} = N_{t-1} d_t - R_t K_t .$$

Il existe alors un couple unique $(\tau_t^1, B_t)_{t\geq 0}$ pour lequel une trajectoire réalisable donnée constitue, avec $\tau_0^2 = R_0 s_{-1} - d_0$, et $\tau_t^2 = 0\ \forall t \geq 1$, un équilibre intertemporel. On déduit de l'expression précédente de la dette que la valeur de celle-ci à la période suivante (intérêt et capital) reste en valeur absolue inférieure au produit national.

En effet, on a d'une part

$$R_t B_{t-1} < N_{t-1} d_t < F(K_t, N_t) = Y_t$$

et d'autre part

$$R_t B_{t-1} > -R_t K_t > -F(K_t, N_t) = -Y_t .$$

Dans le cas où les seuls instruments du gouvernement sont, en plus de la taxation des premiers agents vieux, la taxation des jeunes et la dette, celle-ci vérifie $\forall t \geq 0$:

$$R_{t+1} \mid B_t \mid < Y_{t+1} . \tag{8}$$

Il est possible d'analyser les deux situations précédentes avec deux instruments dont la dette en imposant à celle-ci la condition moins restrictive suivante :

$$\mid B_t \mid < \max\left(Y_t, \frac{Y_{t+1}}{R_{t+1}}\right) . \tag{9}$$

Cette condition signifie que le volume de la dette nationale, qu'elle soit positive ou négative, ne dépasse pas simultanément le produit national courant et la valeur actualisée du produit national de la période suivante (autrement dit, le remboursement total de la dette ne dépasse pas le produit national).

4.3 *Autres cas*

On peut envisager d'autres restrictions sur le système de taxation. Par exemple, Buiter et Kletzer (1998) considèrent la situation dans laquelle une même génération ne peut pas être à la fois taxée et subventionnée. Ceci est le cas lorsque l'on impose :

$$\tau_{t+1}^2 = \lambda_t \tau_t^1 \text{ avec } \lambda_t \geq 0, \forall t \geq 0 .$$

On déduit dans ce cas des contraintes budgétaires des agents :

$$c_t + s_t = w_t - \tau_t^1 ,$$

$$d_{t+1} = R_{t+1} s_t - \lambda_t \tau_t^1 ,$$

par élimination de τ_t^1 :

$$
\begin{aligned}
N_t s_t &= \frac{R_{t+1}\dfrac{d_{t+1}}{R_{t+1}} + \lambda_t (w_t - c_t)}{R_{t+1} + \lambda_t} \\
&< N_t \max\left\{ w_t - c_t, \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} \right\} \qquad (10) \\
&< \max\left\{ Y_t, \frac{Y_{t+1}}{R_{t+1}} \right\} .
\end{aligned}
$$

On a $N_t s_t = K_{t+1} + B_t$. Donc $N_t s_t > B_t$. Donc d'après (10), on a :

$$B_t < \max\left\{ Y_t, \frac{Y_{t+1}}{R_{t+1}} \right\} .$$

Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
N_t s_t &> N_t \min\left\{ w_t - c_t, \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} \right\} \\
&> -N_t c_t \quad .
\end{aligned}
$$

Comme $N_t s_t = K_{t+1} + B_t$, on a $B_t > -N_t c_t - K_{t+1} > -Y_t \geq -\max\left\{ Y_t, \frac{Y_{t+1}}{R_{t+1}} \right\}$.

Donc $|B_t| < \max\left\{ Y_t, \frac{Y_{t+1}}{R_{t+1}} \right\}$. On retrouve donc la condition (9).

En conclusion, la restriction dette-PIB (9) recouvre les divers formes de contraintes de la politique de taxation et d'endettement.

5. Limites à l'endettement et équilibre budgétaire intertemporel du gouvernement

Dans cette section, nous supposons que le gouvernement doit respecter la condition (9). Nous allons envisager les conséquences de ce respect sur la réalisation de la condition d'équilibre budgétaire intertemporel et la possibilité de mener des jeux de Ponzi.

On commence par présenter une étude générale de la condition (9) puis, nous nous plaçons dans le cas particulier des trajectoires convergentes.

5.1 *Étude générale de la condition dette-PIB*

Supposons donc que la condition (9), c'est-à-dire $|B_t| < \max\left\{Y_t, \dfrac{Y_{t+1}}{R_{t+1}}\right\}$, soit vérifiée à chaque date. Nous avons, en termes actualisés :

$$\rho_t |B_t| < \max\{\rho_t Y_t, \rho_{t+1} Y_{t+1}\} . \tag{11}$$

Nous distinguons les deux possibilités suivantes, selon que la limite supérieure de la suite $(\rho_t Y_t)_{t\geq 0}$ est nulle ou strictement positive.

1) Dans le cas où $\lim_{t\to+\infty} \rho_t Y_t = 0$ [6], alors, compte tenu de (11) nous avons $\lim_{t\to+\infty} \rho_t B_t = 0$. On en déduit que la condition d'équilibre budgétaire intertemporel est vérifiée et qu'une dette à la Ponzi est impossible (car pour une trajectoire de dette à la Ponzi, la suite $\rho_t B_t$ est nécessairement monotone non décroissante).

2) Dans le cas ou $\lim\sup_{t\to+\infty} \rho_t Y_t > 0$, la vérification de la restriction (9) n'implique pas la condition d'équilibre budgétaire intertemporel.

Une politique de dette à la Ponzi est-elle encore compatible avec la réalisation de l'équilibre? Par définition, étant donné $B_{-1} > 0$, une politique de dette à la Ponzi vérifie nécessairement $B_{t+1} \geq R_{t+1} B_t$. La trajectoire de dette à la Ponzi minimale consiste à réaliser $B_{t+1} = R_{t+1} B_t$ à chaque date t. Définissons les ratios dette sur PIB μ_t : $B_t = \mu_t Y_t$. Partons d'un ratio $\bar{\mu}_0 = 1$. Avec une politique d'endettement à la Ponzi minimale, la suite des ratios dette sur PIB vérifie

$$\bar{\mu}_{t+1} = \frac{R_{t+1} Y_t}{Y_{t+1}} \bar{\mu}_t . \tag{12}$$

Soit la suite $(\bar{\mu}_t)_{t\geq 0}$ est bornée (et une condition suffisante pour cela est que $\lim\sup_{t\to+\infty} \dfrac{R_{t+1} Y_t}{Y_{t+1}} < 1$). Alors, il existe une politique de dette à la Ponzi. Elle consiste à choisir une valeur initiale $\mu_0 < \left[\sup\left((\bar{\mu}_t)_{t\geq 0}\right)\right]^{-1}$. En effet, les solutions de (12) étant homogènes en μ_0 nous aurons : $\mu_1 = \bar{\mu}_1 \mu_0$, $\mu_2 = \bar{\mu}_2 \mu_0$ et l'on aura $\sup\left((\mu_t)_{t\geq 0}\right) = \mu_0 \sup\left((\bar{\mu}_t)_{t\geq 0}\right) < 1$ de sorte que la condition (9) sera toujours vérifiée. Autrement dit, la condition (9) autorise une dette à la Ponzi dans les conditions précisées ci-dessus.

Soit la suite $(\bar{\mu}_t)_{t\geq 0}$ n'est pas bornée et alors une trajectoire à la Ponzi ne vérifie pas la condition (9).

---

6. Remarquons que si $\lim\sup_{t\to+\infty} \rho_t Y_t = 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} \rho_t Y_t = 0$.

Proposition 2 : *Pour une trajectoire réalisable qui vérifie :* $\lim_{t \to +\infty} \rho_t Y_t = 0$, *la condition (9) sur l'endettement implique que l'équilibre budgétaire intertemporel du gouvernement est vérifié, et il n'existe pas de dette à la Ponzi sous cette condition. Pour une trajectoire réalisable qui vérifie :* $\limsup_{t \to +\infty} \rho_t Y_t > 0$, *la condition (9) sur l'endettement n'implique pas que l'équilibre budgétaire intertemporel du gouvernement soit vérifié. Une politique de dette à la Ponzi est possible dans ce second cas, si et seulement si la suite* $(\bar{\mu}_t)$ *définie par (12) avec* $\bar{\mu}_0 = 1$ *est bornée.*

5.2 *Trajectoires réalisables convergentes*

On envisage maintenant les conséquences des résultats précédents dans le cas particulier d'une trajectoire réalisable convergente. On appelle trajectoire convergente une trajectoire pour laquelle le capital par jeune $k_t = K_t / N_t$ converge vers une limite finie :

$$\lim_{t \to +\infty} k_t = \bar{k} .$$

Nous nous plaçons donc dans un cas où l'on peut discuter des propriétés de long terme de l'économie, et en particulier des possibilités de suraccumulation ou de sous-accumulation du capital (et même le cas particulier de convergence vers la règle d'or).

5.2.1 *Le cas de sous-accumulation*

Dans ce cas, comme à long terme $R > 1 + n$, on en déduit :

$$\lim_{t \to +\infty} \rho_t Y_t = 0 .$$

Si les politiques de dette sont restreintes par la condition dette-PIB (9), on en déduit que l'équilibre budgétaire intertemporel du gouvernement est vérifié, et aucun jeu de Ponzi n'est possible.

5.2.2 *Le cas de suraccumulation*

Dans ce cas, comme à long terme $R < 1 + n$, on en déduit :

$$\lim_{t \to +\infty} \rho_t Y_t = +\infty$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} \mu_t = 0 .$$

Alors, un jeu de Ponzi est possible avec une politique de dette satisfaisant la contrainte dette-PIB (9).

5.2.3 *Convergence vers la règle d'or*

La règle d'or est un cas limite entre les deux cas envisagés précédemment, de sorte que l'on ne peut exclure *a priori* l'une ou l'autre des conclusions précédentes.

En fait, nous montrons que selon la trajectoire réalisable considérée, un jeu de Ponzi peut être possible ou non, sous la restriction dette-PIB (9). On illustre cette propriété en considérant deux exemples (développés plus amplement en annexe). Dans le premier exemple, on a $\lim_{t \to +\infty} \rho_t Y_t = 0$ et un jeu de Ponzi est impossible. Dans le second, $0 < \lim_{t \to +\infty} \rho_t Y_t < +\infty$ et un jeu de Ponzi est possible.

On voit donc que la manière de converger vers la règle d'or a des conséquences sur la possibilité de réaliser des jeux de Ponzi.

Conclusion

L'objet de cet article a été d'approfondir la question de la définition de la solvabilité de l'État. À la question, jusqu'où l'État peut-il s'endetter? Nous répondons que l'endettement public acceptable, ne conduisant pas à la faillite, est celui qui reste compatible avec un fonctionnement effectif de l'économie (l'équilibre concurrentiel est possible).

Nous avons d'abord considéré la situation où l'État ne subit pas de contrainte budgétaire intertemporelle et où il choisit librement le montant des impôts (forfaitaires). Nous avons montré à cette occasion que pour toute trajectoire réalisable et pour toute suite de dettes publiques, on peut trouver une suite d'impôts forfaitaires tels qu'il existe un équilibre concurrentiel intertemporel dont l'allocation des ressources coïncide avec la trajectoire admissible. Tant que l'État peut choisir sans contrainte les impôts, il n'y a pas de problème d'endettement public : n'importe quel montant d'endettement public est compatible avec n'importe quelle trajectoire réalisable. En ce sens, la dette est neutre.

Ce qui limite l'endettement public c'est bien entendu l'impossibilité de lever n'importe quel montant d'impôts. Deux cas polaires ont été successivement envisagés. Dans l'un ou l'autre cas, pour qu'une trajectoire réalisable puisse constituer une allocation d'un équilibre concurrentiel intertemporel, il faut que la dette vérifie une contrainte. Celle-ci s'énonce comme suit : à chaque date, le volume de la dette ne doit dépasser ni la valeur du PIB courant, ni la valeur actualisée du PIB de la période immédiatement postérieure. Cette condition dette-PIB généralise celle étudiée par Buiter et Kletzer (1998) : sur son cycle de vie, un agent est soit toujours taxé, soit toujours subventionné.

Finalement, nous avons considéré des équilibres concurrentiels pour lesquels la condition dette-PIB est vérifiée et nous en avons étudié les conséquences sur la condition d'équilibre budgétaire intertemporel et la possibilité de jeu de Ponzi.

Lorsque la limite de la valeur actualisée du PIB est nulle, nous avons montré que le respect de notre condition dette-PIB implique la réalisation de l'équilibre budgétaire intertemporel. De plus, il est impossible de pratiquer un jeu de Ponzi.

Lorsque la limite supérieure du PIB actualisé est positive strictement, le respect de la condition dette-PIB n'implique pas la réalisation de l'équilibre budgétaire intertemporel. De plus, il est possible de pratiquer un jeu de Ponzi. Nous avons montré également que si la trajectoire d'équilibre concurrentiel converge vers un état de sous-accumulation du capital, alors le respect de la condition dette-PIB implique la réalisation de l'équilibre budgétaire intertemporel et l'impossibilité de pratiquer une dette de Ponzi. Finalement, lorsque l'équilibre concurrentiel converge vers un état où la règle d'or d'accumulation du capital est vérifiée, nous avons proposé un exemple dans lesquels le respect de la condition dette-PIB permet un jeu de Ponzi et un autre ou ceci n'est pas possible.

Il y a deux extensions immédiates au présent travail. Tout d'abord, l'introduction d'un choix loisir-travail permettrait d'envisager certaines formes de taxation non forfaitaires. Ensuite, la considération d'un cadre monétaire autoriserait la discussion des liens entre solvabilité et inflation.

ANNEXE

Premier exemple *tel que* $\lim_{t \to +\infty} \rho_t Y_t = 0$: *un jeu de Ponzi est impossible.*

On suppose la fonction de production Cobb-Douglas, avec $f(k) = k^\alpha$ et la fonction d'utilité log-linéaire : $U(c, d) = \ln c + \beta \ln d$. Enfin, les dépenses gouvernementales sont supposées nulles.

Soit (ε_t) suite décroissante de limite nulle telle que : la série $\sum \varepsilon_t$ est divergente et $\forall t$, $\varepsilon_t < 1 - \alpha$. Il suffit de prendre par exemple :

$$\varepsilon_t = \frac{1-\alpha}{1+t} \ .$$

Soit alors la suite des intensités capitalistiques (k_t) définie à partie de k_0 par :

$$\frac{(1+n)\ f(k_{t+1})}{f'(k_{t+1})\ f(k_t)} = 1 - \varepsilon_t$$

soit :

$$(1 + n)\ k_{t+1} = \alpha(1 - \varepsilon_t)\ k_t^\alpha \ .$$

Cette suite converge vers $\hat{k}$, l'intensité capitalistique de la règle d'or. Elle est définie de sorte que :

$$\frac{\rho_{t+1} Y_{t+1}}{\rho_t Y_t} = 1 - \varepsilon_t \ .$$

D'où :

$$\ln (\rho_t Y_t) = \sum_{i=0}^{t-1} \ln (1 - \varepsilon_i) + \ln (\rho_0 Y_0) \ .$$

On en déduit :

$$\lim_{t \to +\infty} \rho_t Y_t = 0 \ .$$

Il reste maintenant à montrer que cette suite $(k_t)_{t \geq 0}$ correspond bien à une trajectoire réalisable, c'est-à-dire qu'il existe $(c_t, d_t)_{t \geq 0}$ vérifiant :

$$c_t + \frac{d_t}{1+n} = k_t^\alpha - (1 + n)\ k_{t+1} \ , \tag{13}$$

$$d_{t+1} = \beta \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\ c_t \ . \tag{14}$$

On définit δ_t tel que :

$$c_t = \delta_t\big(k_t^\alpha - (1+n)\,k_{t+1}\big)\,,$$

$$\frac{d_t}{1+n} = (1-\delta_t)\,(k_t^\alpha - (1+n)\,k_{t+1})\,.$$

La suite (δ_t) vérifie donc d'après (14) :

$$(1-\delta_{t+1})\,\big(k_{t+1}^\alpha - (1+n)\,k_{t+2}\big) = \beta\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\;\delta_t\big(k_t^\alpha - (1+n)\,k_{t+1}\big)$$

soit, en utilisant la dynamique de k_t :

$$\delta_{t+1} = 1 - \nu_t\delta_t\,,$$

$$\text{avec } \nu_t = \beta\frac{1-\alpha(1-\varepsilon_t)}{(1-\varepsilon_t)[1-\alpha(1-\varepsilon_{t+1})]}\;.$$

Montrer l'existence d'une trajectoire réalisable revient à montrer que $\forall t$, la suite δ_t reste à l'intérieur de l'intervalle (0, 1). D'après les propriétés de ε_t, on sait que ν_t converge vers β à long terme. On a de plus,

$$0 < \frac{1-\alpha(1-\varepsilon_t)}{1-\alpha(1-\varepsilon_{t+1})} - 1 = \frac{\alpha(\varepsilon_t - \varepsilon_{t+1})}{1-\alpha(1-\varepsilon_{t+1})} < \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha} = \alpha$$

et

$$\frac{1}{1-\varepsilon_t} < \frac{1}{\alpha}\;,$$

on en déduit que $\forall t$, $0 < \nu_t < 2\beta$. Donc, pour $\beta < 1/2$, la suite ν_t est dans l'intervalle (0, 1) et converge vers β. Par conséquent, si δ_0 est choisi tel que $0 < \delta_0 < 1$, la suite δ_t restera dans l'intervalle (0, 1), en convergeant vers $1/(1+\beta)$.

On a ainsi prouvé l'existence d'une trajectoire réalisable correspondant à la suite particulière des intensités capitalistiques $(k_t)_t$.

Deuxième exemple *tel que* $0 < \lim_{t\to+\infty} \rho_t Y_t < +\infty$: *un jeu de Ponzi est possible.*

Soit la trajectoire (k_t) vérifiant : $\forall t \geq 1$, $k_t = \hat{k}$. Il est clair qu'une telle trajectoire vérifie

$$0 < \lim_{t\to+\infty} \rho_t Y_t = f(\hat{k}) < +\infty\,.$$

Montrons, en employant la méthode précédente, qu'il est possible de lui associer une trajectoire de consommations $(c_t, d_t)_{t\geq 0}$.

La suite ν_t vérifie maintenant :

$$\nu_0 = \beta \frac{f(k_0) - (1+n)\hat{k}}{f(\hat{k}) - (1+n)\hat{k}} \;,$$

$$\nu_t = \beta, \forall t \geq 1 \;.$$

Si δ_1 est tel que, $0 < \delta_1 < 1$, alors $\forall t > 1$, δ_t reste dans l'intervalle (0, 1). Il reste à prouver qu'il est possible de choisir δ_0 tel que $0 < \delta_0 < 1$ et vérifiant :

$$0 < 1 - \beta \frac{f(k_0) - (1+n)\hat{k}}{f(\hat{k}) - (1+n)\hat{k}} \delta_0 < 1 \;,$$

soit

$$0 < \beta \frac{f(k_0) - (1+n)\hat{k}}{f(\hat{k}) - (1+n)\hat{k}} \delta_0 < 1 \;.$$

Cette condition est réalisable si :

$$f(k_0) - (1+n)\hat{k} > 0$$

et si δ_0 est assez petit. Sous ces conditions, on a donc trouvé l'existence d'une trajectoire réalisable convergeant vers la règle d'or et admettant un jeu de Ponzi sous la restriction dette-PIB (9).

BIBLIOGRAPHIE

ALLAIS, M. (1947), *Économie et intérêt*, Imprimerie Nationale.

BUITER, W et K. KLETZER (1998) « Uses and Limitations of Public Debt » *in* STEVEN BRAKMAN, HANS VAN EES ET SIMON K. KUIPERS (éds.), *Market Behaviour and Macroeconomic Modelling*, MacMillan Press Ltd., London, p. 275-307.

CRETTEZ, B., P. MICHEL et B. WIGNIOLLE (1999), *Monnaie, dette et capital*, Economica.

CRETTEZ, B., P. MICHEL et B. WIGNIOLLE (2002), « Debt Neutrality and the Infinite-lived Representative Consumer », *Journal of Public Economic Theory*, à paraître.

DIAMOND, P. (1965), « National Debt in a Neo-classical Growth Model », *American Economic Review*, 55 : 1 126-1 150.

JONDEAU, E. (1992), « La soutenabilité de la politique budgétaire », *Économie et Prévision*, 104 : 1-18.

MARCHAND, M., P. MICHEL et P. PESTIEAU (1990), « Optimal Intergenerational Transfers in a Growth Model with Fertility and Productivity Changes », C.O.R.E. D.P. 9059.