

Analyse d'impact du moment de décaissement d'un produit avec garantie de rachat viager

The effects of policyholder initiation of a guaranteed lifetime withdrawal benefit (GLWB) on pricing a variable annuity

Maxime Turgeon-Rhéaume et Van Son Lai

Volume 87, numéro 3-4, janvier 2021

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/1076121ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/1076121ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

Faculté des sciences de l'administration, Université Laval

ISSN

1705-7299 (imprimé)

2371-4913 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer cet article

Turgeon-Rhéaume, M. & Lai, V. (2021). Analyse d'impact du moment de décaissement d'un produit avec garantie de rachat viager. *Assurances et gestion des risques / Insurance and Risk Management*, 87(3-4), 131-168. <https://doi.org/10.7202/1076121ar>

Résumé de l'article

Les garanties de rachat viager (GLWB) ont fait l'objet de nombreuses analyses dans la littérature en raison de leur risque financier, mais peu d'articles ont jusqu'ici traité de l'option offerte au contractant par rapport au choix du moment de décaissement et ses impacts sur la rentabilité du produit auprès de l'assureur.

Cet article étend l'analyse effectuée par [Huang et al., 2014] dans leur article portant sur le choix optimal de décaissement pour un produit avec garanties de rachat viager. Tout d'abord, nous ajoutons une dimension additionnelle dans l'analyse pour tenir compte de la distribution des pertes d'un assureur selon l'âge au décaissement choisi par le contractant. Ensuite, nous développons un cadre d'analyse novateur afin de déterminer numériquement dans quelle mesure un assureur devrait modifier son échelle de frais lorsque ce dernier s'attend à ce qu'un assuré choisisse un moment de décaissement lui permettant de maximiser sa valeur de contrat. Nous démontrons que le niveau de frais équitables est fonction de l'âge à l'émission de l'assuré. Cette observation va à l'encontre de la pratique et de la structure présente de frais au sein de l'industrie canadienne où les assureurs chargent un niveau de frais uniformes indépendamment de l'âge à l'émission de l'assuré.

ANALYSE D'IMPACT DU MOMENT DE DÉCAISSEMENT D'UN PRODUIT AVEC GARANTIE DE RACHAT VIAGER

Maxime TURGEON-RHÉAUME et Van Son LAI¹

■ RÉSUMÉ

Les garanties de rachat viager (GLWB²) ont fait l'objet de nombreuses analyses dans la littérature en raison de leur risque financier, mais peu d'articles ont jusqu'ici traité de l'option offerte au contractant par rapport au choix du moment de décaissement et ses impacts sur la rentabilité du produit auprès de l'assureur.

Cet article étend l'analyse effectuée par [Huang *et al.*, 2014] dans leur article portant sur le choix optimal de décaissement pour un produit avec garanties de rachat viager. Tout d'abord, nous ajoutons une dimension additionnelle dans l'analyse pour tenir compte de la distribution des pertes d'un assureur selon l'âge au décaissement choisi par le contractant. Ensuite, nous développons un cadre d'analyse novateur afin de déterminer numériquement dans quelle mesure un assureur devrait modifier son échelle de frais lorsque ce dernier s'attend à ce qu'un assuré choisisse un moment de décaissement lui permettant de maximiser sa valeur de contrat. Nous démontrons que le niveau de frais équitables est fonction de l'âge à l'émission de l'assuré. Cette observation va à l'encontre de la pratique et de la structure présente de frais au sein de l'industrie canadienne où les assureurs chargent un niveau de frais uniformes indépendamment de l'âge à l'émission de l'assuré.

THE EFFECTS OF POLICYHOLDER INITIATION OF A GUARANTEED LIFETIME WITHDRAWAL BENEFIT (GLWB) ON PRICING A VARIABLE ANNUITY

Maxime TURGEON-RHÉAUME and Van Son LAI¹

■ ABSTRACT

The extant literature on the Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefits (GLWB) financial risk is abundant, however, few articles investigate the option offered to the policyholder with respect to the initiation of the contract and examine this impact on the profitability of the product for the insurer.

We extend the analysis carried out by Huang et al. (IME, 2014) on the optimal initiation of the product with GLWB. First, we add an additional dimension in the analysis to account for the insurer losses as a function of the age for disbursement chosen by the policyholder. Then, we develop a novel analytical framework to determine by numerical methods the extent to which an insurer, expecting his client to choose when to receive benefits to maximize the value of his variable annuity contract, should change its actuarially fair fee structure. We show that the fair premium is a function of the insured policyholder age when he bought the contract. This result runs counter to the current fee structure and practice in the Canadian insurance industry with insurers charging a uniform level of fees regardless of the policyholder biological age when the contract is issued.

INTRODUCTION

Les fonds distincts, aussi communément nommés rentes variables, appartiennent à cette catégorie de produits ayant permis aux assureurs de s'imposer dans le secteur de la gestion du patrimoine. Ce type de produit se distingue des fonds mutuels par la présence de garanties offertes qui assurent au contractant un niveau minimal de rendement durant la durée du contrat. Toutefois, cette couverture expose l'assureur à une baisse de rendements boursiers, ce qui pourrait résulter en un niveau considérable de pertes. Parmi la gamme de produits de fonds distincts offerte au Canada, les produits avec garantie de rachat viager (GLWB) sont de manière générale considérés comme étant ceux

comportant le niveau de risque le plus élevé pour les assureurs, pour divers traités de ces produits, voir [Hardy, 2003], [Kalberer et Ravindran, 2009], [Milevsky, 2013], [Ravindran, 2014], [Feng, 2018]. Cet article portera sur l'analyse de risque pour ce produit en particulier.

Les contrats GLWB comprennent deux phases pour lesquelles leurs composantes évoluent de façon différente. Tout d'abord, la phase d'accumulation permet au détenteur de la police de bénéficier d'une gamme de fonds offerte par l'assureur afin d'investir ses épargnes et bénéficier des rendements boursiers. Des frais, généralement sous la forme d'un pourcentage de l'actif ou de la garantie du client, sont alors prélevés par l'assureur. De plus, diverses garanties offertes au contrat peuvent être appelées à évoluer durant cette phase selon les caractéristiques et modalités du produit. En général, le détenteur du contrat ne fait aucun retrait durant cette période.

La seconde phase du produit, la phase de décaissement, se traduit par des retraits périodiques effectués au contrat jusqu'au décès de l'assuré. Le niveau de ces retraits peut dépendre de diverses variables. Tout d'abord, l'actif au moment du décaissement est comparé à un solde de rachat garanti (SRG) du contrat et la valeur maximale entre ces deux composantes sert de base de calcul. En deuxième lieu, un taux de retrait est appliqué à cette base de calcul afin de déterminer le montant périodique offert au contractant. L'échelle de taux de retrait est généralement garantie dès l'émission du contrat et peut croître selon l'âge au moment du décaissement. L'actif au contrat est réduit de chacun des retraits effectués durant cette phase de décaissement. Le principal risque présent pour l'assureur vient du fait que ce dernier devra continuer à verser les paiements périodiques dans l'éventualité où l'actif devient nul. Ainsi, le risque présent dépend des mouvements boursiers avant et après la phase de décaissement ainsi que l'incertitude entourant la durée de vie du contractant. Le choix du moment du décaissement peut aussi jouer un rôle sur le niveau des prestations à payer par l'assureur. En effet, l'espérance des coûts peut varier selon le moment à partir duquel la phase de décaissement est enclenchée.

Pour compenser le risque sous-jacent à ces produits, les frais chargés au contrat sont plus élevés que ceux présents dans les fonds mutuels. L'analyse du niveau de frais équitables, c'est-à-dire un niveau permettant à l'assureur de recevoir un revenu équivalent aux prestations attendues à être payées, est un thème couvert dans plusieurs articles de la littérature financière et actuarielle. [Milevsky et Salisbury, 2006] ont indiqué que les assureurs sous-estiment le niveau de frais à prélever pour des contrats avec garanties minimales de retrait (GMWB³) afin que le niveau

de revenu soit équivalent aux prestations futures à payer par ces derniers. Les auteurs indiquent par ailleurs que sous certaines conditions ce type de produit peut être décomposé comme une combinaison d'une rente certaine et d'une option de vente asiatique de type Quanto.⁴ De manière similaire, [Holz *et al.*, 2012] procède à l'analyse du niveau de frais équitables pour divers produits GLWB et sous plusieurs environnements économiques. Les auteurs indiquent que le niveau de frais équitables peut être très variable selon les caractéristiques des produits (par exemple, taux de décaissement, âge à l'émission, bonis), ce qui nécessite de la part d'un assureur de bien considérer toutes les composantes économiques et non économiques capturant le risque de ces produits. Des conclusions similaires peuvent être tirées de [Kling *et al.*, 2011] qui démontrent que les caractéristiques des produits GLWB jouent un rôle important sur le niveau de frais équitables à charger. Ces derniers indiquent aussi qu'une modélisation de la volatilité stochastique par l'entremise du modèle [Helston, 1993] a un impact mineur sur le risque du produit.

Dans un autre ordre d'idée, [Huang *et al.*, 2014] traite de l'option offerte aux détenteurs de contrats avec garanties de rachat viager sur le choix du moment du décaissement du produit. Les auteurs font leur analyse d'un point de vue sans arbitrage et sans considération des notions d'utilité et de consommation qui pourraient impacter le détenteur du contrat vers son choix. Dans ce cadre d'analyse, l'assuré déclenche le décaissement au moment qui lui est le plus avantageux d'un point de vue financier et non selon une fonction d'utilité telle que présentée par [Steinorth et Mitchell, 2015]. Les auteurs mentionnent que plusieurs éléments peuvent guider le choix de l'assuré : frais chargés au contrat, attentes de rendements et de volatilité, bonis de performance, ratio de valeur marchande sur valeur garantie, entre autres facteurs. Par conséquent, il est nécessaire de bien modéliser le comportement des contractants afin de capturer le risque inhérent aux produits avec garanties de rachat viager.

Bien que [Huang *et al.*, 2014] soient les seuls auteurs traitant précisément du choix offert au contractant et de ses impacts sur la rentabilité du produit, plusieurs autres ont toutefois abordé l'impact du comportement des contractants sur la valeur des produits GMWB et GLWB. Une revue exhaustive des ces articles est d'ailleurs faite par [Milevsky, 2013]. Entre autres, [Bacinello *et al.*, 2016] indiquent que la valeur d'un produit GMWB dépend de la stratégie de décaissement d'un contractant. Trois stratégies de décaissement (statique, dynamique et mixte) sont traitées dans l'article. Les auteurs mentionnent qu'une stratégie statique résultera en des coûts moins importants pour un

assureur que la méthode mixte. De son côté, la stratégie de décaissement dynamique est celle qui est la plus désavantageuse pour un assureur car le contractant s'assure de choisir un montant de décaissement qui maximise sa valeur de contrat. [Kling *et al.*, 2011] aborde aussi cet aspect du comportement des contractants sur la valeur d'un contrat GLWB en présentant cela d'un point de vue déterministe, probabiliste et stochastique.

Notons que la littérature entourant la couverture⁵ des fonds distincts traite généralement des stratégies permettant d'amenuiser les risques financiers plutôt que non-financiers. Par exemple, [Boyle et Hardy, 2003] indiquent que la performance d'un programme de hedging sera fortement dépendant d'un modèle de taux d'intérêt stochastique à long terme robuste et fiable. Parmi les auteurs traitant des impacts des risques non-financiers pour ce type de programme, [Kling *et al.*, 2014] indiquent que les gains et pertes découlant du hedging dépendent des écarts d'expérience entre le niveau de retrait prévu et le taux actuellement prélevé par l'assuré. Ainsi, un assureur mettant en place un programme de couverture dynamique peut diminuer son exposition aux risques financiers mais conserve tout de même un risque de gains et pertes imprévus en raison des risques non-financiers présents. L'utilisation d'hypothèses conservatrices et les paramètres de conception des produits figurent parmi les pistes de solution mises de l'avant par les auteurs afin de diminuer l'exposition à ce risque. De plus, bien que [Fung *et al.*, 2014] n'abordent pas spécifiquement le décaissement des produits GLWB, les auteurs mentionnent que des produits dérivés tels que les S-forward⁶ peuvent permettre de couvrir de manière statique le risque de mortalité pour ces garanties. Ainsi on peut croire que d'autres produits dérivés non conventionnels pourraient être ultérieurement développés et utilisés pour couvrir d'autres risques non-financiers des produits GLWB tel que l'option de décaissement offerte.

Dans cet article, nous étendons l'analyse effectuée par [Huang *et al.*, 2014] dans leur article portant sur le choix optimal de décaissement pour un produit avec garanties de rachat viager. Tout d'abord, nous ajoutons une dimension additionnelle dans l'analyse pour tenir compte de la distribution des pertes d'un assureur selon l'âge au décaissement choisi par le contractant. Ensuite, nous effectuons une analyse numérique originale de notre cadre d'analyse novateur afin de déterminer dans quelle mesure un assureur devrait modifier son échelle de frais lorsque ce dernier s'attend à ce qu'un assuré choisisse un moment de décaissement lui permettant de maximiser sa valeur de contrat. Nous démontrons que le niveau de frais équitables est fonction de l'âge à l'émission de l'assuré. Cette observation va à l'encontre de la pratique

et de la structure présente de frais au sein de l'industrie canadienne où les assureurs chargent un niveau de frais uniformes indépendamment de l'âge à l'émission de l'assuré.

Nous enchaînons notre article comme suit: Dans la Section 1, nous présentons les modèles d'évaluation des produits avec garanties de rachat viager, puis nous développons le cadre analytique pour le choix optimal du moment du décaissement de l'assuré pour ensuite présenter et discuter les résultats de notre analyse de ces produits GLWB en fonction de leurs divers caractéristiques dans la Section 2. Dans la Section 3, nous tarifions notre produit en considérant l'optimisation du moment de décaissement. Nous terminons notre article par une conclusion.

1. MODÈLE D'ÉVALUATION

1.1. Évolution de l'actif et des garanties lors de la phase d'accumulation

Lors de la phase d'accumulation, le contractant décide tout d'abord dans quelle proportion (α_i) la prime initiale (P_0) est allouée parmi la gamme de fonds offerte au contrat (A^i).

$$P_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_0 = \sum_{i=1}^n A_i^i \quad (1)$$

Subséquemment, la valeur nette des fonds est appelée à évoluer selon les rendements obtenus et les frais chargés (g_i) afin de couvrir les dépenses engendrées par l'assureur ainsi que la garantie offerte au contrat. Si aucune dépense n'est considérée dans le contrat, alors les frais équitables consistent en un montant (g_i) tel que la valeur présente des revenus soit équivalente à la valeur présente des prestations. En n'assumant aucun rebalancement subséquent et aucun abandon, la valeur des fonds est donc définie par un processus stochastique évoluant selon un indice sous-jacent (S^i) reflétant la performance du gestionnaire du fonds i pour une période donnée:

$$dS_t^i = a^i(S_t^i, t)dt + b^i(S_t^i, t)dW_t^i \quad (2)$$

où, en assumant des frais continus fonction de l'actif au contrat,

$$A_t^i = \frac{S_t^i}{S_{t-\Delta t}^i} \cdot A_{t-\Delta t}^i e^{-g_i \Delta t} \quad (3)$$

On a donc

$$dA_t^i = \left(\frac{a^i(S_t^i, t)}{S_t^i} - g_i \right) A_t^i dt + \frac{b^i(S_t^i, t)}{S_t^i} A_t^i dW_t^i \quad (4)$$

à tout moment durant la phase d'accumulation, la valeur marchande des actifs est déterminée à partir de l'allocation de la prime initiale :

$$A_t = \sum_{i=1}^n A_t^i \quad (5)$$

Pour fin de simplicité, l'analyse effectuée dans notre article ne considère qu'un seul fonds chargeant des frais g . Il est toutefois important de noter que les garanties de rachat viager offertes au Canada permettent généralement au contractant de modifier l'allocation de la valeur marchande des actifs tout au long de la durée du contrat. Cette option offerte pourrait permettre au détenteur de la police de modifier le profil de risque des rendements attendus et choisir une allocation lui permettant de maximiser les prestations à recevoir dans le contrat. Une seconde hypothèse posée est qu'aucun dépôt subséquent n'est fait à la suite de l'émission du contrat. Cette hypothèse est fréquemment posée dans la littérature entourant les fonds distincts. Notons toutefois que [Brennan et Schwartz, 1976] abordent l'analyse de la tarification et de hedging de fonds distincts dans des situations de dépôts périodiques.

Le solde de revenu garanti (SRG) peut lui aussi être appelé à évoluer durant la phase d'accumulation selon les caractéristiques offertes au contrat. Historiquement, les produits avec garanties de rachat viager disponibles au Canada ont offert un «roll-up» (γ) appliqué de façon annuelle lorsqu'aucun retrait n'est effectué durant une année donnée. De plus, des bonis de performance peuvent être offerts à une fréquence m afin de cristalliser les hausses de marchés observées durant la période d'accumulation. Comme indiqué par [Moenig et Zhu, 2018], l'inclusion de ce type de caractéristiques aux contrats peut permettre d'éliminer certains comportements des titulaires qui peuvent avoir intérêt à abandonner leur contrat existant et utiliser la valeur du fonds afin d'ouvrir un nouveau contrat sans pénalité fiscale.

$$\text{SRG}_t = \begin{cases} \max(\text{SRG}_{t-\Delta t}(1 + \gamma)\Delta t, A_t), & t/m \in \mathbb{N} \\ \text{SRG}_{t-\Delta t}(1 + \gamma)\Delta t, & t \in \mathbb{N} \text{ et } t/m \notin \mathbb{N} \\ \text{SRG}_{t-\Delta t}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (6)$$

Finalement, lorsqu'une garantie au décès (G^d) est offerte au contrat, ce montant peut aussi être appelé à évoluer durant la phase d'accumulation selon les caractéristiques offertes au contrat. Tout comme dans le cas du solde de rachat garanti, un «roll-up» annuel (α) pourrait être offert ainsi que des bonis de performance à chaque fréquence n .

$$G_t^d = \begin{cases} \max(G_{t-\Delta t}^d(1+\alpha)\Delta t, A_t), & t/n \in \mathbb{N} \\ G_{t-\Delta t}^d(1+\alpha)\Delta t, & t \in \mathbb{N} \text{ et } t/n \notin \mathbb{N} \\ G_{t-\Delta t}^d, & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

1.2. Évolution de l'actif et des garanties lors de la phase de décaissement

Lors du décaissement, l'actif au contrat est déduit d'un montant annuel D_t . Cette variable est déterminée au moment du déclenchement de la phase de décaissement (t_w) et est fonction de l'âge à l'émission de l'assuré (x).

$$D_{t_w} = l_{t_w+x} \cdot \max(\text{SRG}_{t_w}, A_{t_w}) \quad (8)$$

Le taux de retrait l_{t_w+x} est fonction des taux garantis définis à l'émission du contrat. De manière générale, ces taux sont appelés à augmenter selon l'âge au moment du premier retrait. À moins que le contrat ne prévoie la possibilité d'une réinitialisation du montant de retrait, le niveau D_{t_w} demeure constant jusqu'au décès de l'assuré. Ainsi, lorsque la prime initiale est investie dans un seul fonds, la valeur marchande de l'actif au contrat évolue selon le processus ci-dessous lors de la phase de décaissement :

$$A_t = \max\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}} \cdot A_{t-\Delta t} e^{-g\Delta t} - D_t \Delta t, 0\right) \quad (9)$$

Il peut être nécessaire d'effectuer le suivi du solde de rachat garanti si des réinitialisations de montants de retraits sont offertes à des fréquences m . Lorsque le solde de garantie est réduit par un niveau équivalent au montant de retrait, nous savons que :

$$\text{SRG}_t = \begin{cases} \max(\max(\text{SRG}_{t-\Delta t} - D_t \Delta t, A_t), 0), & t/m \in \mathbb{N} \\ \max(\text{SRG}_{t-\Delta t} - D_t \Delta t, 0), & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

Si une réinitialisation du montant de retrait est offerte à une fréquence m , D_t évolue selon le processus suivant :

$$D_t = \begin{cases} \max(D_{t-\Delta t}, l_t \cdot \text{SRG}_t), & t/m \in \mathbb{N} \\ D_{t-\Delta t}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (11)$$

Notons finalement que la valeur de la garantie au décès est ajustée à la baisse pour chaque retrait effectué durant la phase de décaissement. Lorsque l'ajustement est équivalent au montant de retrait, on a donc

$$G_t^d = \begin{cases} \max(\max(G_{t-\Delta t}^d(1+\alpha) - D_t\Delta t, A_t), 0), & t/n \in \mathbb{N} \\ \max(G_{t-\Delta t}^d(1+\alpha) - D_t\Delta t, 0), & t \in \mathbb{N} \text{ et } t/n \notin \mathbb{N} \\ \max(G_{t-\Delta t}^d - D_t\Delta t, 0), & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

Pour notre étude, aucune réinitialisation de la garantie durant le décaissement ne sera toutefois considérée dans l'analyse des résultats.

1.3. Évaluation du produit

1.3.1. Flux de trésorerie

Afin de procéder à l'évaluation de la valeur du produit, il est important en premier lieu d'analyser les flux de trésorerie présents au contrat. À chaque fréquence Δt durant le contrat, l'assureur reçoit comme revenu un montant en fonction des frais g ainsi que la valeur marchande de l'actif en début de période. Ainsi, les revenus collectés au moment t (R_t) sont définis par le processus suivant :

$$R_t = A_t(1 - e^{-g\Delta t}) \forall t \quad (13)$$

Les réclamations liées à la garantie GLWB (C_t^w) au contrat sont possibles uniquement durant la phase de décaissement. Ces dernières sont versées lorsque la valeur marchande de l'actif devient nulle, et ce, jusqu'au décès du prestataire. On a donc :

$$C_t^w = \begin{cases} 0, & t \leq t_w \\ \max(D_t\Delta t - A_t, 0), & t > t_w \end{cases} \quad (14)$$

Lorsqu'une garantie au décès est offerte au contrat, une réclamation pourrait devoir être versée au moment du décès (t_d). Le coût de la réclamation (C_t^d) est fonction du niveau de la garantie au décès et de l'actif au moment du décès.

$$C_t^d = \max(G_t^d - A_t, 0) \cdot 1_{t=t_d} \quad (15)$$

Nous ignorons d'autres flux de trésorerie pouvant faire partie du produit. Par exemple, des commissions versées au réseau de distribution ainsi que des frais de gestion et administratifs doivent généralement être considérés par les assureurs dans le cadre de leurs évaluations. Toutefois, ces frais ne sont pas directement liés à la composante de garantie offerte au contrat mais sont plutôt considérés comme des flux de trésorerie présents au même titre que dans les produits de fonds mutuels.

1.3.2. Probabilités de décès et de survie

Rappelons que le montant de retrait des produits avec garantie de rachat viager est payé jusqu'au décès du contractant. Ainsi, la contingence au contrat ne provient pas uniquement de l'incertitude des rendements boursiers obtenus, mais aussi de la durée de la phase de décaissement. Puisque le moment du décès est une variable inconnue, il est donc nécessaire d'introduire les probabilités de mortalité et de survie qui seront utilisées dans l'évaluation de la valeur du produit. La notation présentée ci-dessous est tirée de [Dickson *et al.*, 2013]:

- ${}_t q_x$: Probabilité qu'un individu d'âge x meurt dans les t prochaines années
- ${}_t | q_x$: Probabilité qu'un individu d'âge x meurt entre $x + t$ et $x + t + 1$
- q_x : Probabilité qu'un individu d'âge x meurt dans la prochaine année
- ${}_t p_x$: Probabilité qu'un individu d'âge x survive les t prochaines années
- $\mu(x)$: Force de mortalité d'un individu d'âge x

$${}_t | q_x = {}_t p_x \cdot q_{x+t} = {}_{t-1} p_x - {}_t p_x \quad (16)$$

$${}_t p_x = e^{\int_x^{x+t} -\mu(s) ds} \quad (17)$$

L'incertitude entourant la mortalité pourrait pousser un assureur à charger une rémunération pour ce risque. Ainsi, le niveau de frais équitables pourrait être augmenté afin de considérer l'aspect stochastique entourant les taux de mortalité, créant une incertitude par rapport à la durée de la période de décaissement. [Bacinello et Persson, 2002], [Shah et Bertsimas, 2008] et [Piscopo et Haberman, 2011] abordent les impacts de la mortalité stochastique dans le cadre de produits de rentes variables. Toutefois, dans le cadre de notre analyse, la mortalité est

déterministe et l'incertitude entourant la réalisation des taux de mortalités prévues est ignorée dans l'évaluation du produit, bien que l'inclusion de ces probabilités viennent diminuer les réclamations à verser auprès du détenteur. Comme mentionné par [Karabey *et al.*, 2014], une décomposition de Hoeffding⁷ permet de démontrer que le risque financier est généralement un plus grand contributeur au niveau de risque global des produits de rentes dont le principal risque non-financier est celui de longévité.

1.3.3. Valeur du contrat

La valeur du contrat à l'émission (V_0) est évaluée en comparant la valeur actualisée espérée des réclamations à payer auprès du contractant aux revenus futurs attendus par l'assureur, et ce, basés sur la force d'intérêt $r(s)$ en vigueur durant la durée du contrat. Si les frais chargés g sont trop élevés par rapport aux réclamations attendues, la valeur initiale du produit serait négative aux yeux du contractant. Pour un individu âgé de x années et avec âge limite de w , on a ainsi :

$$V_0 = E \left[\int_0^{w-x} e^{-\int_0^t r(s) ds} \left({}_t p_x (C_t^w - R_t) + ({}_{t-\Delta t} p_x - {}_t p_x) C_t^d \right) dt \right] \quad (18)$$

Telle que précisée par [Duffie *et al.*, 1995], l'utilisation d'une méthode de Monte Carlo avec discrétisation peut être utilisée afin de résoudre des problèmes de résolution d'instruments financiers avec processus continu. L'utilisation d'une approche similaire revient à déterminer la valeur du contrat à l'émission de la façon suivante :

$$V_0 = E \left[\sum_{i=0}^{(w-x)/\Delta t} e^{-\int_0^{t_i} r(s) ds} \left({}_{t_i} p_x (C_{t_i}^w - R_{t_i}) + ({}_{t_i-\Delta t} p_x - {}_{t_i} p_x) C_{t_i}^d \right) \right] \quad (19)$$

En décomposant les flux de trésorerie du contrat durant la phase d'accumulation ($t \leq t_w$) et pour la phase de décaissement ($t > t_w$) tout en utilisant la définition des revenus et réclamations définie aux sections précédentes, la valeur initiale du contrat est donnée par la formule suivante :

$$V_0 = E \left[\sum_{i=0}^{t_w/\Delta t} e^{-\int_0^{t_i} r(s) ds} \left(({}_{t_i-\Delta t} p_x - {}_{t_i} p_x) \max(G_{t_i}^d - A_{t_i}, 0) \right) \right] \\ + E \left[\sum_{t_w/\Delta t+1}^{(w-x)/\Delta t} e^{-\int_0^{t_i} r(s) ds} \left({}_{t_i} p_x \left(\max(D_{t_i} \Delta t - A_{t_i}, 0) - A_{t_i} (1 - e^{-g\Delta t}) \right) \right) \right] \\ + E \left[\sum_{t_w/\Delta t+1}^{(w-x)/\Delta t} e^{-\int_0^{t_i} r(s) ds} \left(({}_{t_i-\Delta t} p_x - {}_{t_i} p_x) \max(G_{t_i}^d - A_{t_i}, 0) \right) \right] \quad (20)$$

Les frais équitables, g_{JV} , représentent le niveau pour lequel la valeur du contrat au moment de l'achat est nulle. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 & E \left[\sum_{i=0}^{(w-x)/\Delta t} e^{-\int_0^{t_i} r(s) ds} {}_{t_i}P_x \left(A_{t_i} (1 - e^{-g_{JV}\Delta t}) \right) \right] \\
 &= E \left[\sum_{i=t_w/\Delta t+1}^{(w-x)/\Delta t} e^{-\int_0^{t_i} r(s) ds} {}_{t_i}P_x \left(\max(D_{t_i}\Delta t - A_{t_i}, 0) \right) \right] \\
 &+ E \left[\sum_{i=0}^{(w-x)/\Delta t} e^{-\int_0^{t_i} r(s) ds} ({}_{t_i-\Delta t}P_x - {}_{t_i}P_x) \max(G_{t_i}^d - A_{t_i}, 0) \right] \quad (21)
 \end{aligned}$$

[Milevsky et Salisbury, 2006] ont démontré qu'un produit avec garantie de retrait minimal peut être évalué sous une forme fermée lorsque certaines conditions sont respectées : phase de retrait débutant dès l'émission du contrat, aucun « roll-up » ou boni de performance présent dans les garanties, aucune mortalité et retraits statiques. Sous ces conditions, les auteurs indiquent qu'un produit GMWB peut être défini comme la combinaison d'une rente certaine et d'une option de vente asiatique de type Quanto qui est une option écrite sur des titres d'un marché étranger mais payée en monnaie domestique. De leur côté, [Gerber et Shiu, 2003] présentent une forme fermée afin d'évaluer des options exotiques de type lookback dont le déboursé dépend de la valeur maximale du sous-jacent pour une période donnée. Les auteurs mentionnent que cette approche pourrait être utilisée pour des produits similaires aux fonds distincts. Toutefois, les produits analysés dans notre étude ne peuvent pas être évalués selon ces approches en raison de plusieurs caractéristiques complexifiant la nature des flux de trésorerie sous-jacents comme la prestation en cas de décès, les rentes viagères, la présence de « roll-up » et des bonis de performance, le risque de mortalité réduisant l'espérance des flux de trésorerie futurs.

Ainsi, le produit est évalué via les simulations Monte Carlo, en utilisant 40 000 simulations pour chaque résultat produit dans notre article. En raison du volume de simulations requises pour la production de ces résultats, une seule séquence de variables aléatoires de rendements est utilisée pour simuler les résultats de tous les âges de décaissement, pour un âge à l'émission et à un produit donné. On peut ainsi assurer une comparabilité entre les résultats obtenus pour un âge à l'émission donné et réduire les possibles enjeux de convergence associés aux calculs. [Huynh *et al.*, 2011] abordent davantage certaines façons de réduire les enjeux de convergence lors de simulations stochastiques (utilisation de variables antithétiques ou de contrôle, etc.). Parmi les approches alternatives retrouvées dans la littérature afin de

produire des analyses d'impacts de stratégies de décaissement, notons l'algorithme des moindres carrés de Monte Carlo mis de l'avant par [Bacinello *et al.*, 2011] ainsi que la méthode de Monte Carlo conditionnelle présentée par [Willard, 1996].

1.3.4. Exemple illustratif d'un produit GLWB

Le Tableau 1 résume la dynamique d'un contrat GLWB. Âge au début de la phase de décaissement: 55, taux de décaissement: 5%, âge de décès: 80, frais annuels: 1,3%, taux de croissance annuel du SRG: 1%, rendement constant du sous-jacent: 2%, pas de garantie en cas de décès.

■ TABLEAU 1 Exemple de la dynamique d'un contrat GLWB

T	ÂGE	INDICE BOURSIER	FONDS	SRG	REVENU	RETRAIT	PRESTATION
0	50	100	100	100	1,3	0	0
1	51	102	100,7	101	1,3	0	0
3	53	106,1	102	103	1,3	0	0
...
9	59	119,5	84,6	84,1	1,1	5,3	0
10	60	121,9	79,8	78,8	1	5,3	0
...
20	70	148,6	30,1	26,3	0,4	5,3	0
...
24	74	160,8	9,2	5,3	0,1	5,3	0
25	75	164,1	3,9	0	0,1	5,3	1,3
26	76	167,3	0	0	0	5,3	5,3
...
30	80	181,1	0	0	0	5,3	5,3

2. CHOIX OPTIMAL DU MOMENT DU DÉCAISSEMENT

L'équation (20) décompose la valeur du contrat en fonction des flux de trésorerie présents avant le moment du décaissement t_w et à la suite du décaissement. En effet, l'évolution des flux de trésorerie dépend de la phase dans laquelle le contrat se retrouve. Les produits de garantie de rachat viager laissent généralement l'option au détenteur du contrat de choisir le moment à partir duquel la police tombe en décaissement. Ainsi, t_w peut être considéré comme une variable aléatoire T_w inconnue

par l'assureur au moment de la vente du contrat. Dans cette optique, un contractant pourrait choisir le moment du décaissement afin de maximiser de son point de vue la valeur de la police. Un assureur ayant omis l'existence de cette option au contrat lors de sa tarification pourrait ainsi avoir sous-estimé le frais à charger. On redéfinit ainsi l'équation (20) en considérant l'incertitude entourant T_w

$$\begin{aligned}
 V_0(T_w) = E & \left[\sum_{i=0}^{T_w/\Delta t} e^{-\int_0^{t_i} r(s) ds} \left(({}_{t_i-\Delta t}P_x - {}_{t_i}P_x) \max(G_{t_i}^d - A_{t_i}, 0) \right) \right] \\
 & + E \left[\sum_{i=T_w/\Delta t+1}^{(w-x)/\Delta t} e^{-\int_0^{t_i} r(s) ds} \left(\begin{array}{l} {}_{t_i}P_x \left(\max(D_{t_i} \Delta t - A_{t_i}, 0) \right) \\ - A_{t_i} (1 - e^{-g\Delta t}) \\ + ({}_{t_i-\Delta t}P_x - {}_{t_i}P_x) \max(G_{t_i}^d - A_{t_i}, 0) \end{array} \right) \right] \quad (22)
 \end{aligned}$$

De manière similaire à [Bauer *et al.*, 2008], nous définissons Ξ comme étant l'ensemble des possibilités offertes au contractant. Toutefois, dans notre article Ξ fait référence au choix du moment du décaissement plutôt qu'à la stratégie de retrait telle qu'analysée par l'auteur. Tel qu'indiqué par [Huang *et al.*, 2014], on assume ainsi que la valeur du contrat à l'émission est donnée par :

$$V_0 = \sup_{T_w \in \Xi} V_0(T_w) \quad (23)$$

Notons que le contractant peut à tout moment modifier le choix optimal du déclenchement du décaissement lors de la phase d'accumulation. L'ajout de cette dynamique viendrait toutefois complexifier de manière importante le temps de calcul requis en raison de l'aspect itératif amené dans l'ensemble des calculs. Ainsi, nous supposons que le choix du moment optimal du décaissement est fait à l'émission du contrat et n'est pas revu subséquentement durant la phase d'accumulation. Finalement, bien que les fonds distincts puissent avoir une période d'immobilisation selon le type d'enregistrement dans lequel le placement initial est effectué, nous supposons que le dépôt initial est fait dans un produit non enregistré. Ainsi, cela élimine les contraintes réglementaires de sorties de fonds amenées dans le cadre des analyses.

2.1. Caractéristiques des produits analysés

Quatre produits seront analysés afin d'évaluer le choix optimal du décaissement. Le Tableau 2 ci-dessous résume les caractéristiques de ces derniers :

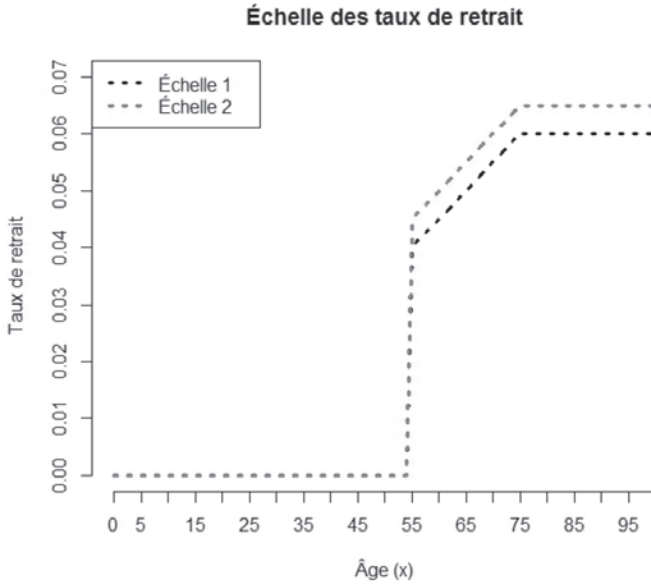
■ **TABLEAU 2** *Caractéristiques des produits analysés*

CARACTÉRISTIQUES	PRODUIT 1	PRODUIT 2	PRODUIT 3	PRODUIT 4
Frais annuel (g)	1,3%	1,3%	4,3%	4,3%
Roll-up annuel SRG	5%	0%	5%	5%
Roll-up annuel garantie décès	1%	1%	1%	1%
Fréquence boni performance SRG	3 ans	3 ans	3 ans	3 ans
Fréquence boni performance garantie décès	3 ans	3 ans	3 ans	3 ans
Échelle de taux de retrait	échelle 1	échelle 1	échelle 1	échelle 2

Le produit 1 comporte des frais annuels similaires au niveau de frais équitables proposé par [Kling *et al.*, 2011] pour un taux de décaissement de 6%. De plus, ce niveau est en ligne avec ce qui est chargé sur le marché canadien pour divers produits GLWB afin de couvrir la garantie offerte pour ce produit. Un roll-up de 5% annuellement est appliqué sur le solde de rachat garanti. Afin d'analyser l'impact du «roll-up» sur le choix optimal du moment du décaissement, le produit 2 ignore cet élément.

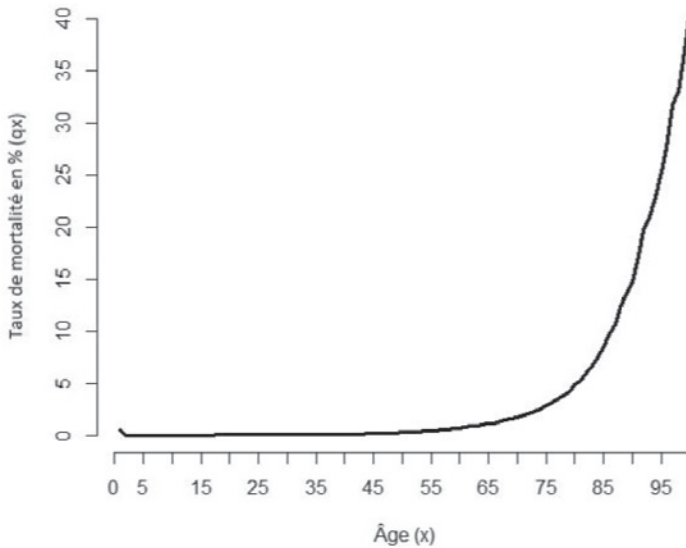
De son côté, le produit 3 se démarque par les frais de gestion élevés qui y sont prélevés, et ce, afin de mieux refléter le niveau des frais totaux chargés en moyenne sur le marché canadien. C'est-à-dire les fonds distincts offerts au Canada chargent des frais supérieurs au montant alloué pour la garantie offerte, et ce, de manière à compenser pour les coûts additionnels engendrés par l'assureur. Cela peut généralement représenter une portion importante du niveau des frais totaux au contrat. Finalement, le produit 4 se distingue par une échelle de taux de retrait plus généreuse. Une comparaison entre les deux échelles de taux de retrait est effectuée dans la Figure 1, et les taux de mortalité telles que spécifiés sur <http://www.mortality.org/> et utilisés dans cet article sont représentés sur la Figure 2.

■ FIGURE 1 *Taux de retrait applicables selon l'âge au moment du décès*



L'âge optimal au décès se retrouve entre 55 et 75 ans, pour tous les assurés dont l'âge à l'émission est de 75 ans ou moins.

■ FIGURE 2 *Taux de mortalité utilisés (q_x) selon l'âge (x)*



Taux de mortalité calibrés sur la population masculine canadienne.

2.2. Modèles d'évaluation

Nous supposons que le sous-jacent est modélisé de manière similaire à [Kling *et al.*, 2011]. Les auteurs de cet article présentent deux approches modélisant la dynamique de la valeur d'un sous-jacent.

Approche 1 : Mouvement brownien géométrique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_s S_t dW_t \quad (24)$$

Approche 2 : Modèle de volatilité stochastique tel que présenté par [Heston, 1993]

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t \left(\rho \cdot dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^{(2)} \right) \quad (25)$$

$$dV_t = v(\beta - V_t) dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} \quad (26)$$

Notons que ces deux modèles capturent les probabilités mesurées avec des résultats réels (environnement P). Afin de mesurer la valeur de la garantie, il est nécessaire de déterminer la mesure de martingale équivalente Q , c'est-à-dire dans un environnement où les participants de marché sont neutres au risque. Sous l'environnement brownien géométrique, l'utilisation du théorème de Girsanov permet de déterminer un processus avec risque neutralisé en modifiant le paramètre de *drift* de manière à ce que le taux sans-risque soit utilisé. On a ainsi :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_s S_t d\tilde{W}_t \quad (27)$$

Sous l'approche Heston, [Wong et Heyde, 2006] démontrent que la dynamique du sous-jacent sous un environnement Q est donnée par

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t \left(\rho \cdot d\tilde{W}_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{W}_t^{(2)} \right) \quad (28)$$

$$dV_t = v^* (\beta^* - V_t) dt + \sigma_v \sqrt{V_t} d\tilde{W}_t^{(1)} \quad (29)$$

où $v^* = (v + \lambda \sigma_v)$ et $\beta^* = \frac{v\beta}{v + \lambda \sigma_v}$. Notons que la mesure $\lambda \sqrt{V_t}$ représente le processus du prix du marché pour le risque de volatilité. Les auteurs indiquent que cette mesure de risque existe si l'inégalité $-v/\sigma_v < \lambda < \infty$.

Les paramètres du modèle Heston utilisés pour l'analyse sont tirés de [Kling *et al.*, 2011]⁸ et sont représentés dans le tableau ci-dessous. Notons qu'aucun test de sensibilité n'est effectué pour différentes valeurs de λ .

■ TABLEAU 3 Paramètres du modèle d'Heston lorsque $\lambda = 0$

PARAMÈTRES	VALEURS NUMÉRIQUES
ν	4,75
β	0,220 ²
σ_ν	0,55
ρ	-0,569
V_0	β

Dans le cas du sous-jacent évoluant selon un mouvement brownien géométrique (MBG), on assume que la variance du processus est β . Les analyses sont effectuées pour des taux sans risque de 2 %, 4 %, 6 % et 8 %, afin de déterminer si le choix optimal du moment du décaissement peut en dépendre. L'hypothèse de taux d'intérêt constants permet de simplifier les analyses présentées. Les résultats demeureraient similaires si la calibration des rendements attendus du sous-jacent était effectuée selon une courbe de taux d'intérêt où le taux varie selon le terme considéré. Notons que la magnitude de l'impact de la variation des taux pour un terme donné serait fonction de la valeur du contrat à l'émission (V_0). De façon équivalente, des constats semblables pourraient être effectués si un modèle de taux d'intérêt stochastique tel que le modèle de [Vasicek, 1977] était utilisé. Dans cette situation, l'âge optimal de décaissement serait dépendant de l'hypothèse de taux long terme et la vitesse de retour à la moyenne utilisée dans le modèle. [Donnelly *et al.*, 2014] confirme cette hypothèse lorsqu'un modèle de taux d'intérêt stochastique [Hull et White, 1990] est utilisé. Autrement dit, les auteurs démontrent que le niveau de frais équitables tend asymptotiquement vers un niveau constant pour un paramètre de retour à la moyenne élevé.

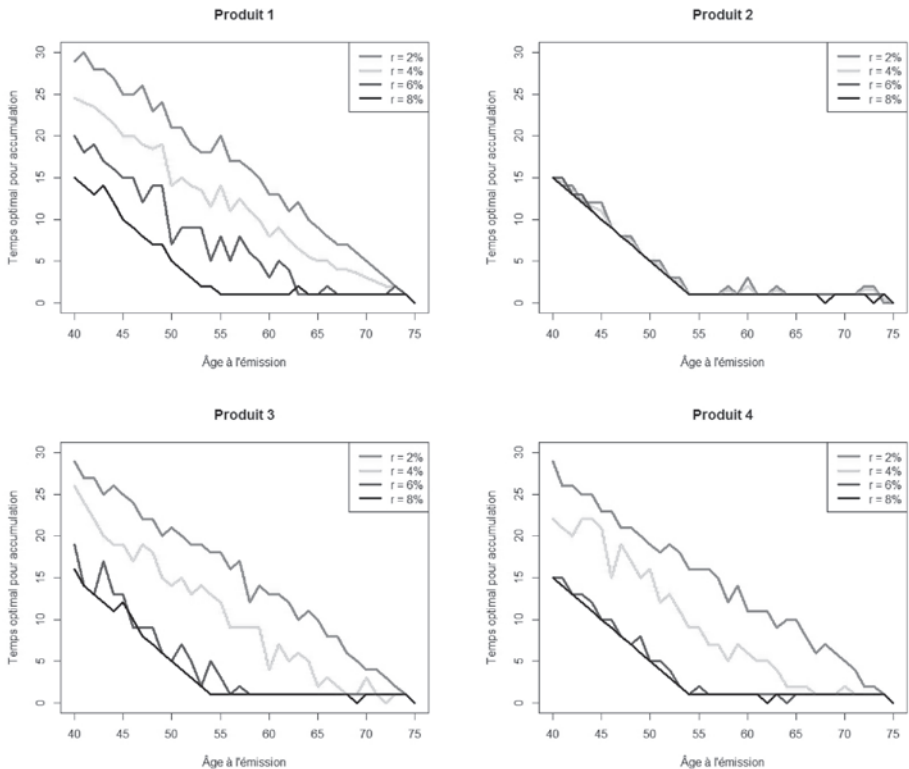
2.3. Résultats et analyses

2.3.1. Mouvement brownien géométrique

La Figure (3) montre que les assurés dont l'âge à l'émission est inférieur à 55 ans devront atteindre jusqu'à cet âge car c'est à ce moment que l'échelle de taux de retrait devient non nulle. Toutefois, les assurés ayant un âge supérieur à 55 ans lors de l'émission de la police devraient attendre au plus une année. Le constat est toutefois différent pour les produits 1, 3 et 4. Puisqu'un «roll-up» de garantie de 5 % est offert durant la phase d'accumulation pour ces produits, un détenteur de police peut avoir intérêt à reporter le décaissement pour bénéficier

d'une croissance de son SRG et augmenter le niveau des paiements périodiques futurs. Toutefois, chaque année de report pour la phase de décaissement diminue le nombre de paiements périodiques qui seront reçus. Plus le niveau des taux d'intérêt est faible, plus le «roll-up» présent au contrat a une valeur importante et ainsi, le temps optimal d'attente avant de déclencher le décaissement est plus élevé pour des scénarios de taux d'intérêt faibles. Pour un taux d'intérêt de 2%, l'âge optimal se retrouve généralement entre 70 et 75 ans. On remarque toutefois que pour un scénario de 8%, le temps optimal d'attente est similaire à ce que l'on obtient pour le produit 2. Notons finalement que malgré les taux de décaissement plus élevés pour le produit 4, cette variable ne produit pas des âges au décaissement optimaux relativement similaires à ceux du produit 3.

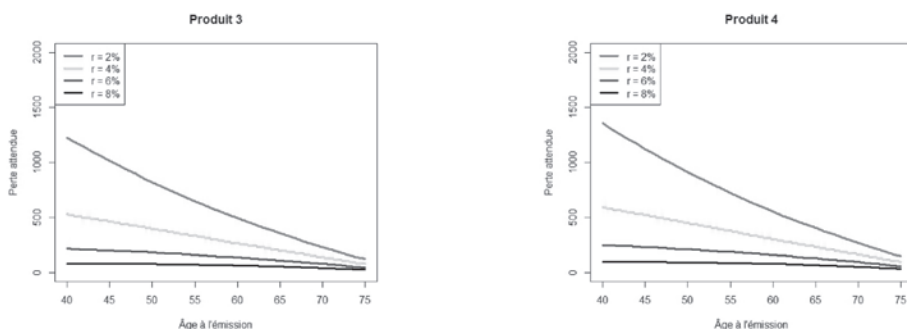
■ FIGURE 3 Temps d'attente optimal selon l'âge à l'émission – MBG



Ces courbes représentent le temps d'attente optimal en fonction de l'âge à l'émission, calculé grâce à l'équation (23). Ils résument les âges optimaux de décaissement des produits décrits dans le tableau (2). La valeur initiale du fonds et des garanties est fixée à 1000 \$.

La Figure 5 montre en premier lieu que la distribution des pertes est similaire entre les produits 1, 3 et 4. Cela indique que le profil de distribution des prestations est peu affecté par le niveau de frais de gestion chargés et les taux de décaissement offerts au contrat. Puisque le niveau de frais de gestion est plus important pour le produit 3 que pour le produit 1, les pertes maximales attendues sont plus faibles, et ce, pour tous les âges à l'émission et environnements de taux d'intérêt. Ainsi, les distributions des pertes maximales attendues sont translatées vers le bas pour le produit 3 en comparaison au produit 1. Au niveau de l'impact des taux de décaissement, on remarque que les produits 3 et 4 ont un niveau de perte attendu similaire pour des environnements de taux d'intérêt élevés. Cela nous indique que pour ces conditions économiques, les prestations à payer par l'assureur sont très faibles et ainsi les taux de décaissement jouent un rôle mineur dans la rentabilité du produit. En effet, une projection du sous-jacent en assumant des taux d'intérêt de l'ordre de 6% à 8% font en sorte que la baisse d'actif en raison du prélèvement du décaissement est presque entièrement compensée par la croissance attendue du sous-jacent. Ainsi, les prestations prévues sous les deux échelles de taux de décaissement sont pratiquement nulles. Cela est notable dans la Figure 4 où l'on remarque que le niveau des prestations GLWB diminue rapidement en fonction de l'hypothèse utilisée dans les taux d'intérêt.

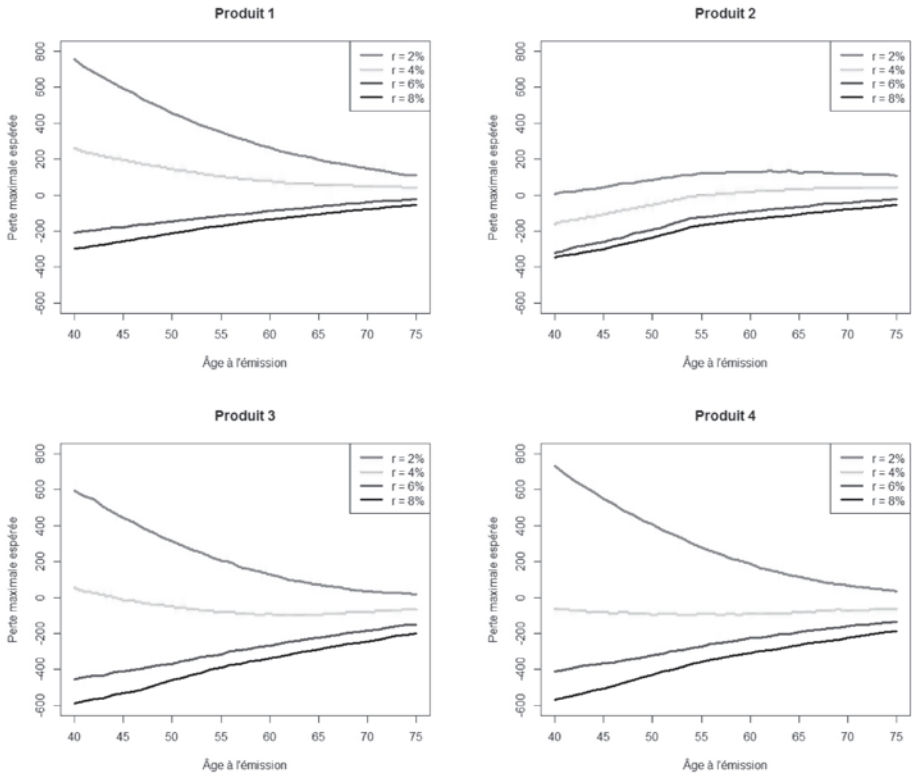
■ FIGURE 4 Prestations maximales GLWB attendue selon l'âge à l'émission – MBG



L'analyse de l'écart entre les pertes minimales et maximales, $\sup V_0(T_w) - \inf V_0(T_w)$, permet de capturer le niveau de risque présent dans le produit et dans quelle mesure la rentabilité d'un assureur pourrait varier selon l'âge choisi par l'assuré pour le décaissement. La

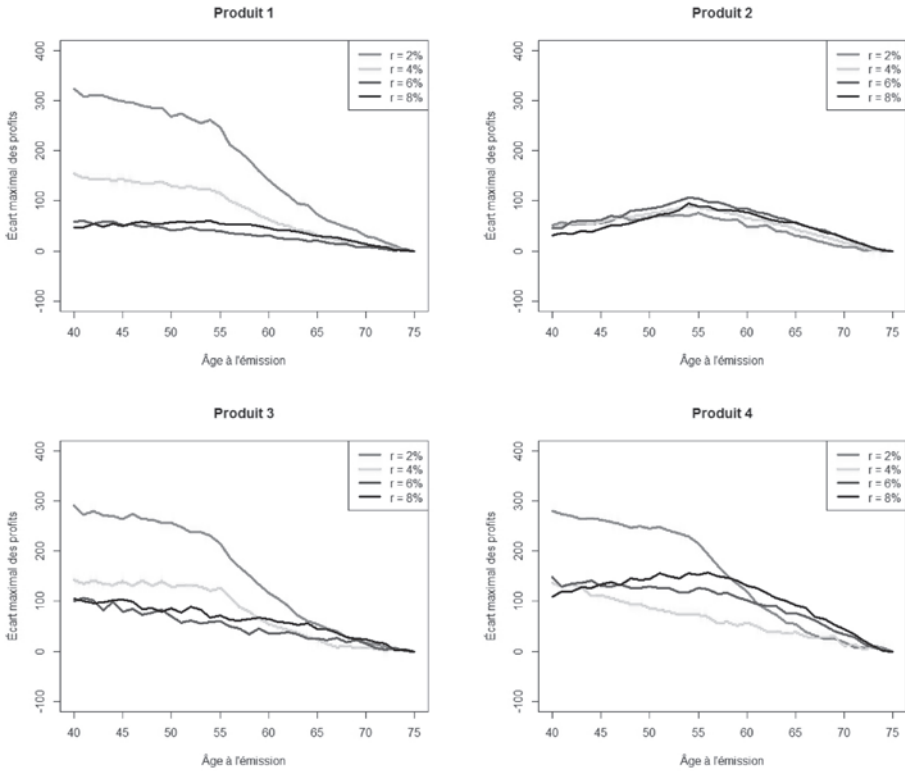
Figure 6 montre que l'écart possible entre les pertes maximales et minimales pour un assureur tend à diminuer de manière significative lorsque les taux d'intérêt croissent, à l'exception du produit 4 où l'écart minimal se retrouve pour un taux d'intérêt de 4%. Ainsi, l'hypothèse du choix de décaissement est moins critique lorsque les conditions de marché sont favorables. Pour le produit 2, cet écart demeure faible pour tous les scénarios de taux d'intérêt, ce qui indique que le niveau du «roll-up» de SRG joue aussi un rôle sur l'importance de cette hypothèse.

■ FIGURE 5 Pertes selon l'âge à l'émission – MBG



La Figure 5 représente le vecteur des niveaux maximums de pertes attendues par âge à l'émission, $V_0(\Xi)$, obtenu lorsque l'assuré déclenche la phase de décaissement au moment qui lui est le plus favorable. Plus l'âge à l'émission est faible, plus cet écart est important. Cela est explicable par le fait que le nombre d'années de projection diminue en fonction de l'âge à l'émission. Ainsi, l'incertitude entourant les flux de trésorerie s'amenuise pour atteindre asymptotiquement un niveau de zéro, et ce, pour tous les produits analysés. Notons finalement que le produit 2 comporte une distribution des pertes maximales beaucoup plus concentrée entre les quatre scénarios de taux d'intérêt. Ainsi, l'absence de «roll-up» de SRG tend à réduire la volatilité des prestations de rachat viager pour ces scénarios.

■ FIGURE 6 *Écart maximal des pertes espérées par âge à l'émission – MBG*



L'analyse effectuée jusqu'à maintenant a mis l'emphase sur le profil de risque des produits lorsque les contractants décaissent au moment qui leur est le plus favorable. Il est toutefois pertinent d'analyser la distribution du risque et de la rentabilité des produits en fonction d'un âge à l'émission afin de déterminer dans quelle mesure l'âge au décaissement peut faire varier le profil des flux de trésorerie. La Figure 8 montre la distribution attendue de la marge de profit de l'assureur pour un contractant âgé de 40 ans à l'émission du contrat. La marge de profit attendue pour l'âge au décaissement t_w , $MP(t_w)$, est définie de la manière suivante :

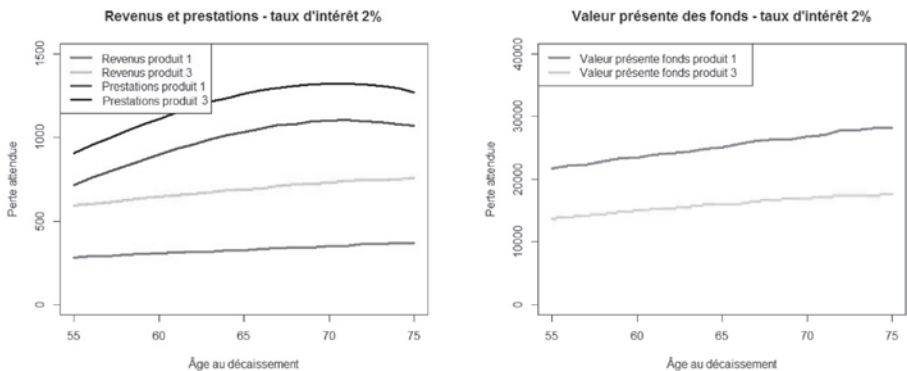
$$MP(t_w) = -E \left(V_0(t_w) / \left(\sum_{i=0}^{(w-x)/\Delta t} e^{-\int_0^{t_i} r(s) ds} {}_{t_i}P_x \cdot A_{t_i} \Big|_{T_w=t_w} \right) \right) \quad (30)$$

En premier lieu, on peut remarquer que pour tous les produits analysés, un profit est assuré uniquement pour des taux d'intérêt de 6% ou plus. Toutefois, l'utilisation de taux d'intérêt de 2% amènent une

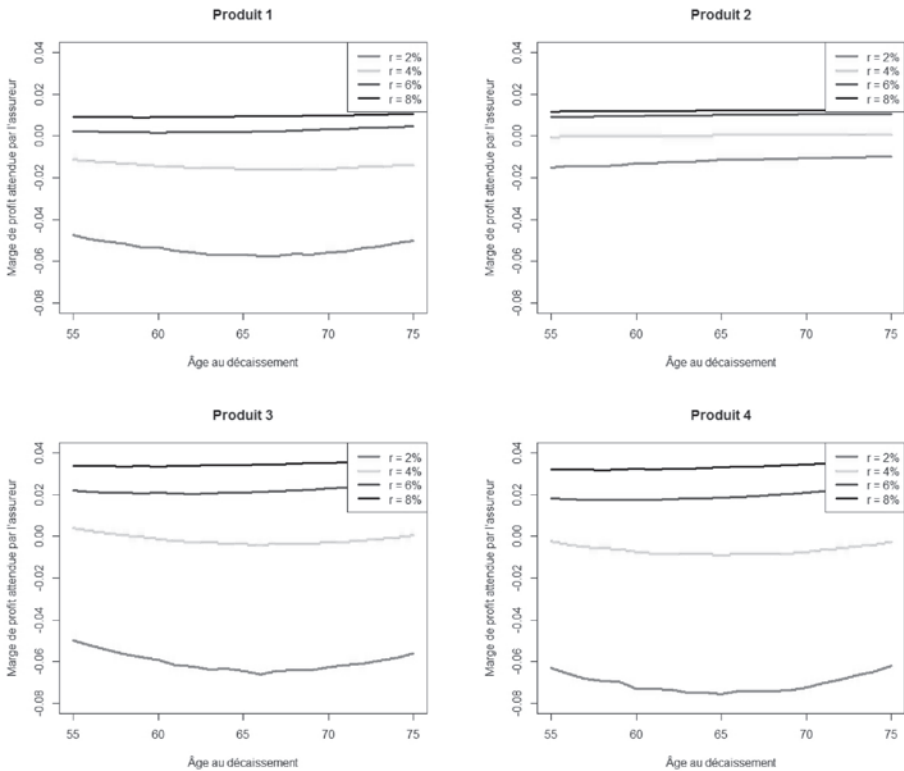
marge de profit négative, et ce, pour les deux niveaux de frais testés. Cette observation tend à indiquer que les produits GLWB sont plus sensibles à l'hypothèse des facteurs économiques qu'à la modélisation de l'âge au décaissement. Deuxièmement, on remarque que les produits 1, 3 et 4 ont une convexité plus importante lorsque les taux d'intérêt sont faibles. Cela démontre que la modélisation de l'âge au décaissement est davantage critique dans des environnements économiques défavorables car la rentabilité attendue du produit est alors davantage affectée par cette variable. Puisque les prestations attendues sont faibles lorsque les taux d'intérêt sont élevés, la marge de profit est majoritairement en fonction du niveau des revenus chargés et ainsi, demeure stable selon l'âge au décaissement.

Les produits 1 et 3 se distinguent par le niveau des frais de gestion chargés au contrat. Lorsque les taux d'intérêt sont élevés, on remarque une marge de profit plus importante pour le produit 3 car le niveau de revenu est plus élevé et les prestations payées sont faibles. Toutefois, pour des taux d'intérêt de 2%, le produit 3 présente une marge de profit inférieure au produit 1, et ce, malgré des frais chargés plus élevés (4,5% vs 1,3%) et une structure de garantie similaire entre les deux produits. La Figure 7 permet de voir pourquoi ce phénomène se présente. Bien que le produit 3 amène un niveau de revenu plus élevé, les prestations engendrées sont supérieures au produit 1 car les frais prélevés réduisent plus rapidement l'actif au contrat. Ainsi, l'actif devient nul plus rapidement, ce qui amène l'assureur à devoir payer davantage de prestations. Cela indique que pour des produits GLWB offrant des garanties généreuses dans un environnement de taux d'intérêt faible, un assureur ne peut pas simplement augmenter le niveau des frais afin d'assurer sa rentabilité.

■ FIGURE 7 *Analyse des revenus, prestations et projection des fonds selon l'âge à l'émission de 40 ans – MBG*



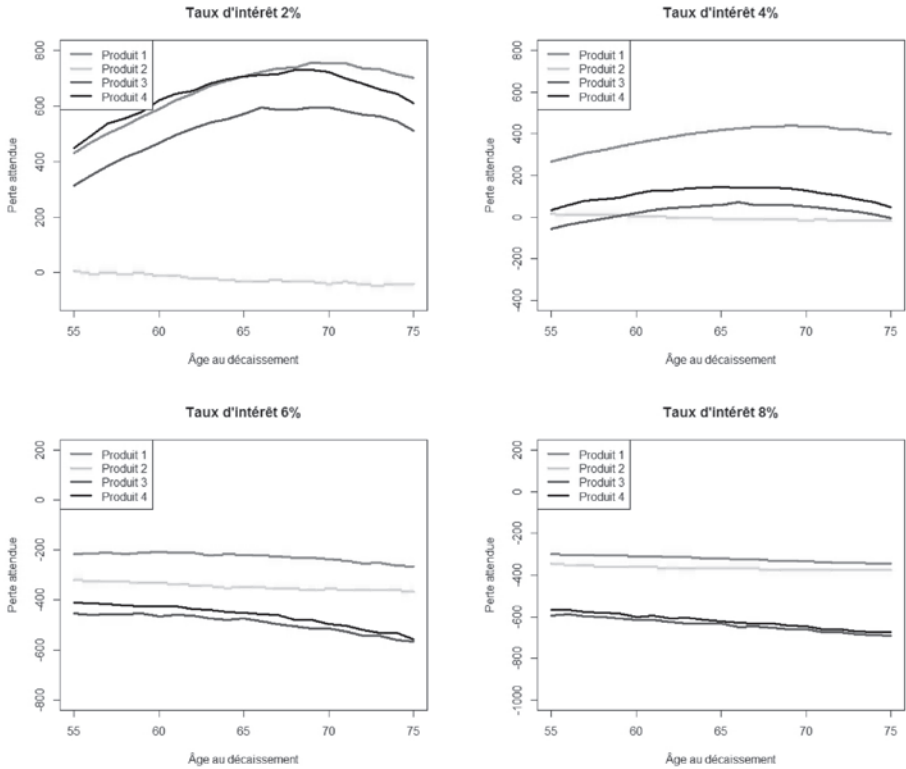
■ FIGURE 8 *Marge de profit possible selon l'âge à l'émission de 40 ans – MBG*



L'analyse de la perte attendue de l'assureur, $V(t_w)$, est une autre mesure possible afin d'analyser comment l'âge au décès peut affecter le profil de risque du contrat. Cette variable ne pondère pas la perte selon la valeur actualisée de l'actif au contrat et permet ainsi de mieux observer la convexité présente en fonction de l'âge au décès choisi. La Figure 9 permet de constater que ces effets de convexité sont prononcés pour des taux d'intérêt de 2% et 4%. Parmi les quatre produits analysés, les produits 1 et 4 sont ceux présentant la plus importante sensibilité à l'hypothèse de taux d'intérêt. Pour un environnement de taux à 2%, le produit 4 se compare au produit 1 en terme de profil de pertes attendues par l'assureur alors que le produit 3 présente des pertes légèrement inférieures. Toutefois, les pertes attendues s'apparentent davantage à celles du produit 2 dès que les taux atteignent 4%. Pour chaque produit et environnement de taux d'intérêt, l'optimum résultant des distributions représente l'âge optimal de décès pour l'assuré de 40 ans. On remarque que cet optimum a tendance à diminuer à mesure que le taux d'intérêt augmente. Pour

des taux de 6% et 8%, la perte maximale (gain minimal) attendue par l'assureur se retrouve à 55 ans, ce qui est cohérent avec les indications fournies à la Figure 3.

■ **FIGURE 9** Perte attendue selon l'âge à l'émission de 40 ans – MBG



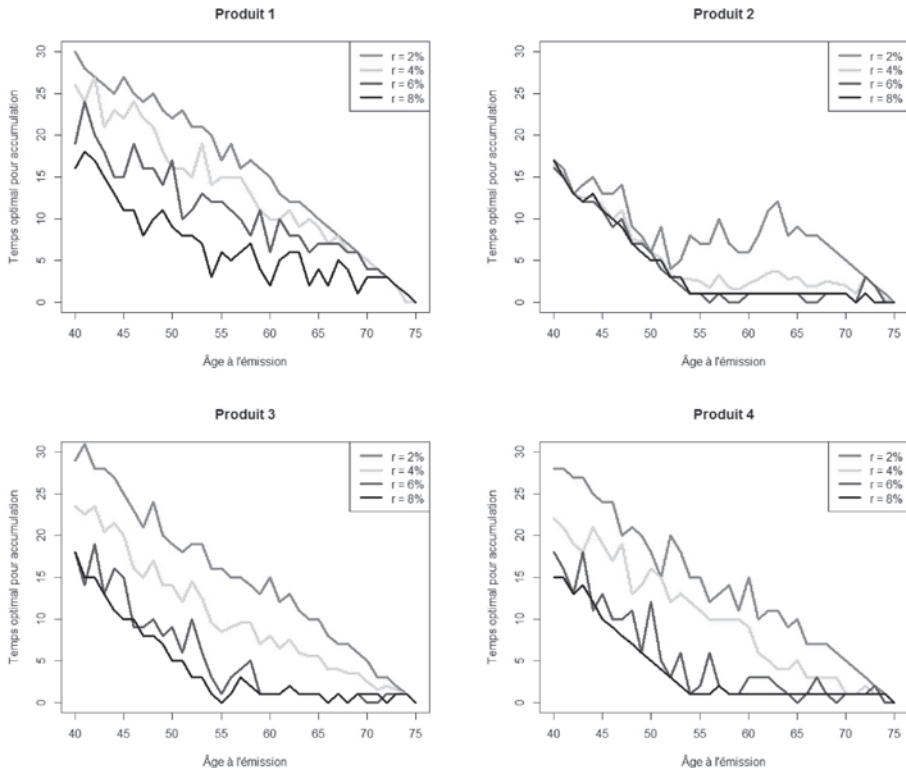
2.3.2. Modèle de volatilité stochastique Heston

Les Figures 1 à 14 montrent que les résultats obtenus sous un environnement de volatilité stochastique du sous-jacent demeurent en ligne aux observations effectuées lorsque ce dernier est défini par un mouvement brownien géométrique (MBG), c'est-à-dire que l'on observe une baisse du temps optimal pour décaissement lorsque les taux d'intérêt augmentent. De plus, le produit 2 demeure celui où la période de décaissement devrait être déclenchée le plus rapidement. Toutefois, certaines différences sont notables pour chacun des produits. Tout d'abord, le produit 1 montre un temps optimal avant décaissement plus élevé dans l'environnement de volatilité stochastique pour un scénario de taux d'intérêt de 8%. La présence de volatilité stochastique amenant

un niveau d'incertitude plus élevé autour des prestations de rachat viager, le détenteur du contrat a davantage intérêt à demeurer en période d'accumulation.

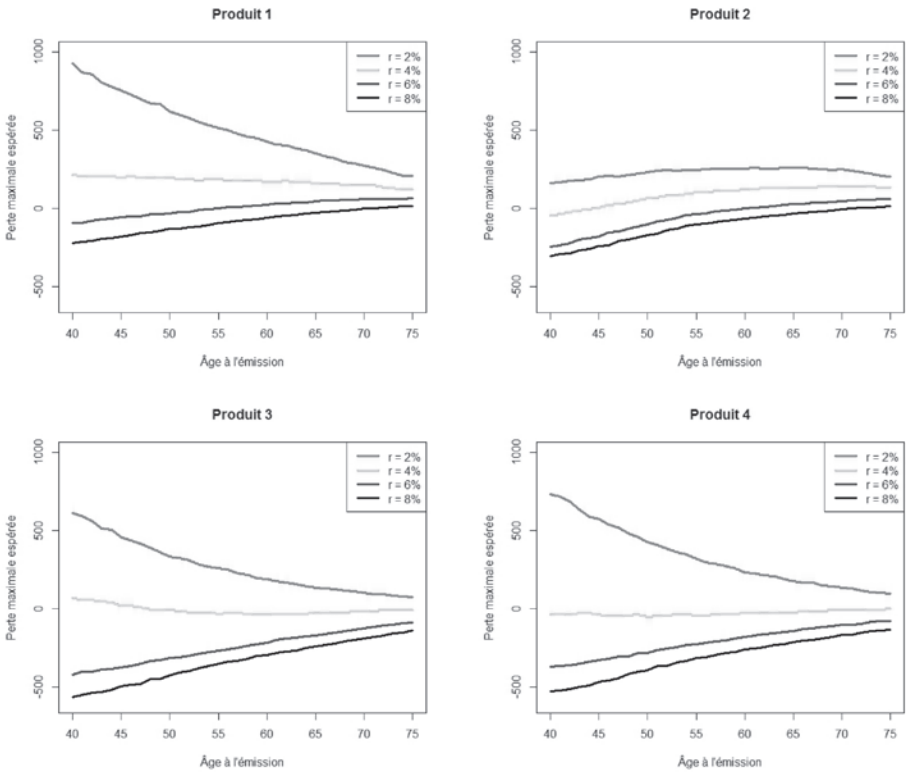
De son côté, le produit 2 présente un profil d'âge au décaissement significativement différent pour des taux d'intérêt de 2%. Puisqu'un «roll-up» de garantie n'est pas offert pour ce produit, ce dernier est peu généreux. Malgré la présence d'un environnement de taux d'intérêt faible, une modélisation de type MBG n'amène pas le contractant à vouloir repousser l'âge au décaissement. Ainsi, le niveau des prestations attendues demeure faible dans cette situation malgré les faibles taux d'intérêt en vigueur. Toutefois, une modélisation du sous-jacent par l'entremise d'un modèle de volatilité stochastique augmente le niveau des prestations attendues lorsque les taux d'intérêt sont faibles. Ainsi, cela affecte l'âge optimal au décaissement dans cette situation. Malgré que cet effet soit moins notable pour les produits 3 et 4, l'âge optimal au décaissement est retardé à certains points (particulièrement pour des taux d'intérêt de 6%, soit un niveau en ligne avec le «roll-up» offert).

■ FIGURE 10 *Temps d'attente optimal selon l'âge à l'émission – Heston*



Au niveau des pertes maximales attendues par âge à l'émission, la présence de volatilité stochastique mène à un profil de distribution similaire à la Figure 11. Malgré la similitude présente dans les distributions, les pertes maximales attendues sont supérieures sous l'environnement Heston. Cette observation n'est pas surprenante car l'ajout d'une incertitude dans l'un des paramètres élargit le spectre des résultats et ainsi, les valeurs maximales possibles. La même remarque s'applique aux autres résultats utilisant le modèle d'Heston présentés dans les figures ci-bas.

■ FIGURE 11 *Perte maximale attendue selon l'âge à l'émission – Heston*



■ FIGURE 12 *Écart maximal des pertes espérées par âge à l'émission – Heston*

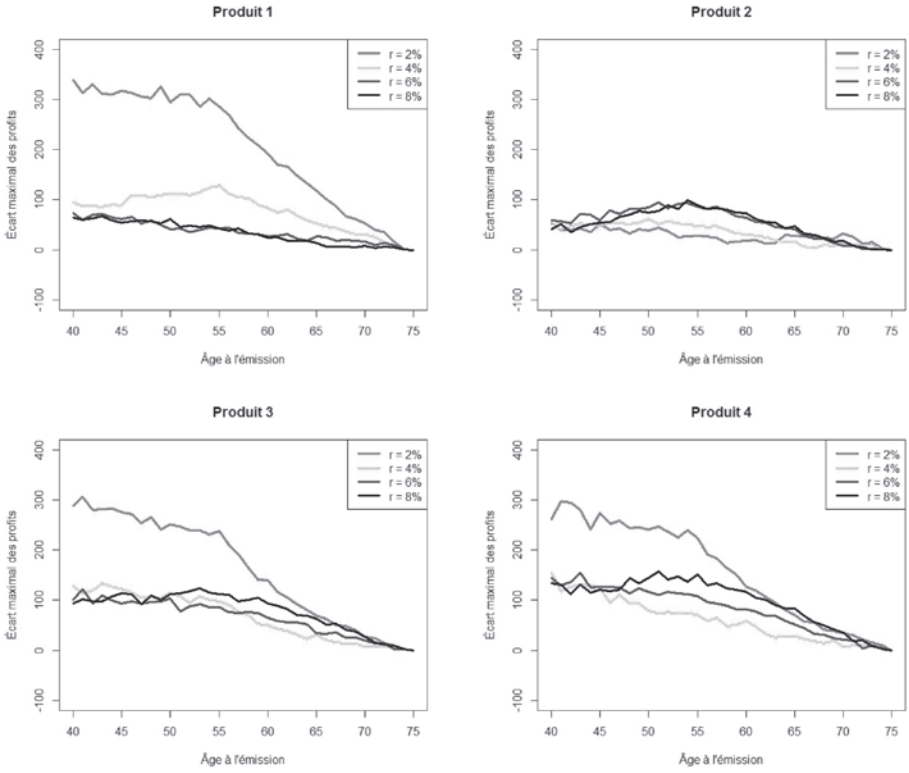
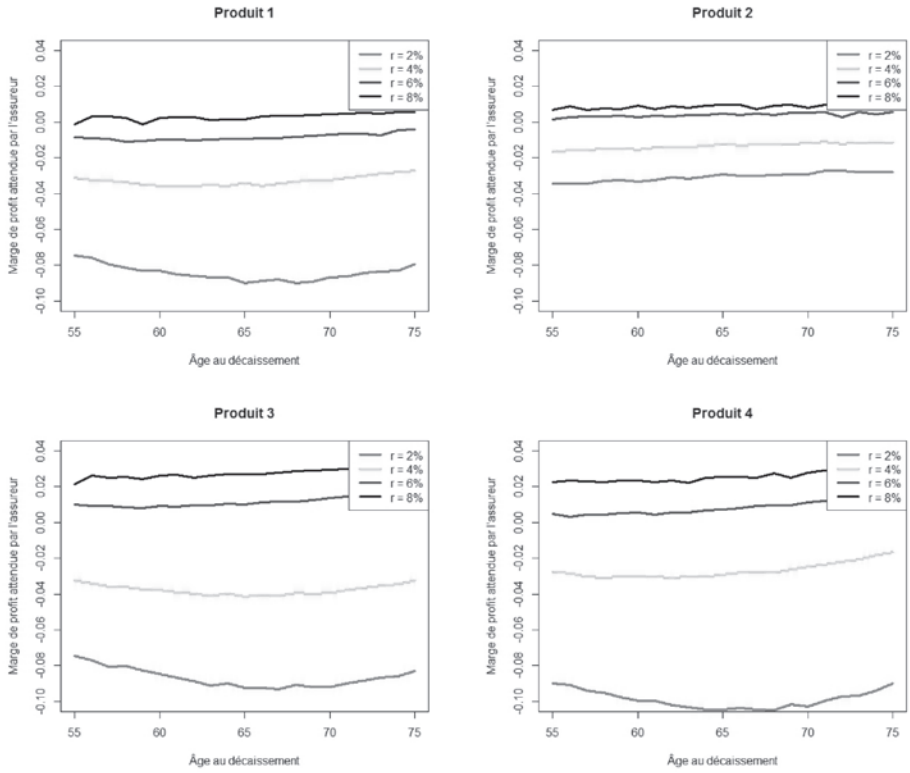
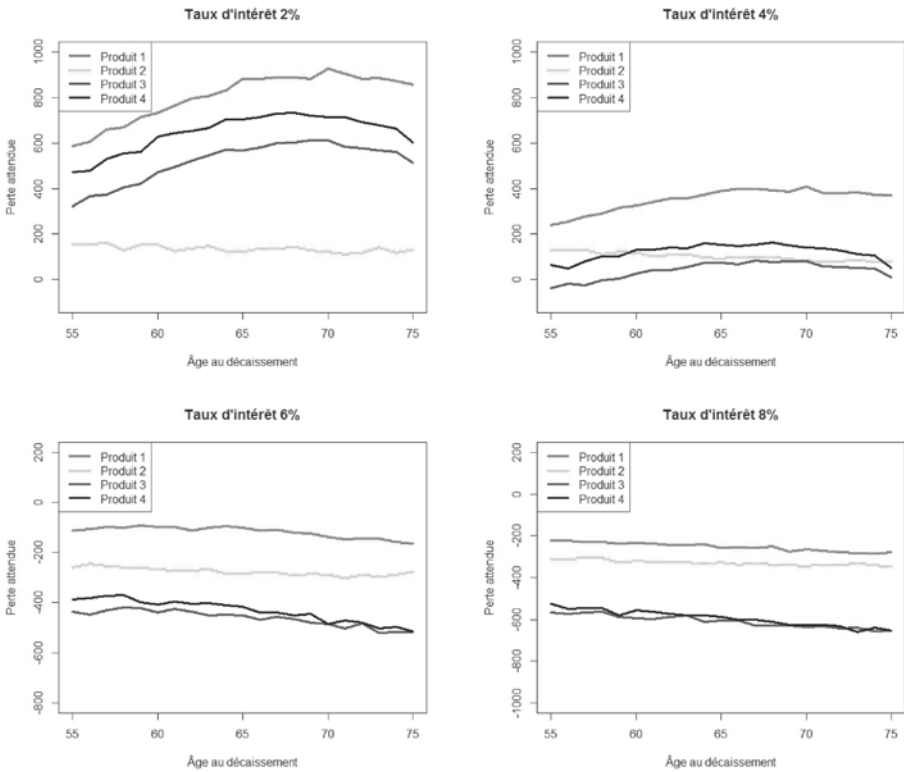


FIGURE 13 *Marge de profit possible selon l'âge à l'émission de 40 ans – Heston*



■ FIGURE 14 *Perte attendue selon l'âge à l'émission de 40 ans – Heston*



3. TARIFICATION DU PRODUIT EN CONSIDÉRANT L'OPTIMISATION DU MOMENT DU DÉCAIÈSSEMENT

La section précédente a permis de démontrer que pour des caractéristiques de produit données, le choix de l'assuré au moment de décaissement peut avoir des incidences importantes sur la rentabilité résultante des produits GLWB. L'objectif bien original de cette section est d'analyser comment l'assureur pourrait avoir à ajuster sa tarification afin de tenir compte de l'option offerte au client d'optimiser le moment du décaissement.

La convention au sein de l'industrie canadienne est de charger un niveau de frais de gestion constants, et ce, peu importe l'âge à l'émission de l'assuré. Dans cette situation, un assureur prenant comme hypothèse que le moment du décaissement est déterministe (par exemple, basé selon l'âge à la retraite attendu) s'expose au risque que la répartition

des ventes se fasse à son désavantage (c.-à-d., risque que la proportion des âges rentables soit moins importante que prévu) ainsi qu'au risque offert via l'option du décaissement. La suite de cette section vise à analyser le risque non-financier d'un fonds distinct ayant les caractéristiques du produit 1 tel qu'établi dans les sections précédentes selon deux stratégies de tarification différentes. Dans la stratégie 1, un assureur tarifie un niveau de frais de gestion constants pour tous les âges à l'émission en assumant un âge déterministe de 65 ans pour le début du décaissement pour l'ensemble des assurés. En assumant une répartition de contrats vendus w_j pour l'âge à l'émission j , le niveau de frais équitables g_{JV} est défini selon l'équation suivante :

$$E \left(\sum_{j=1}^n w_j V_0^{(j)}(65) \Big|_{g=g_{JV}} = 0 \right) \quad (31)$$

La stratégie 2 analyse quant à elle le niveau de frais de gestion à charger selon l'âge à l'émission du produit tout en tenant compte de l'option de décaissement offerte. Sous cette stratégie, les frais équitables sont déterminés en résolvant de manière itérative via le logiciel R^9 l'équation suivante :

$$E \left(\sup_{T_w \in \Xi} V_0(T_w) \Big|_{g^{(j)}=g_{JV}} \right) = 0 \quad (32)$$

Le tableau ci-dessous présente le niveau de juste frais en assumant un niveau de ventes de contrats à 25 % pour les âges 30, 40, 50 et 60 ans respectivement et un taux d'intérêt de 4 %.

■ TABLEAU 4 *Juste frais à charger selon l'âge à l'émission*

ÂGE À L'ÉMISSION	STRATÉGIE 1	STRATÉGIE 2
30 ans	2,75 %	3,65 %
40 ans	2,75 %	3,00 %
50 ans	2,75 %	2,40 %
60 ans	2,75 %	2,00 %

La stratégie 1 résulte en un niveau de frais de gestion plus élevés que la stratégie 2 pour les assurés de 50 et 60 ans alors qu'un constat opposé peut être fait pour les assurés de 30 et 40 ans. Cette observation permet de conclure que la stratégie 1 tend à être non équitable pour certains âges à l'émission puisque les assurés plus âgés auront tendance à financer ceux plus jeunes. Cette hypothèse est validée par le Tableau 5 ci-dessous, où l'on peut constater des pertes attendues

positives pour les assurés de 30 et 40 ans (c.-à-d., l'assureur ne charge pas assez de frais pour ces assurés). Ce tableau permet aussi de constater que l'écart attendu entre le coût maximal (obtenu lorsque l'assuré déclenche au moment qui lui est le plus avantageux) et le coût attendu (âge 65 ans dans cet exemple) est plus important pour les assurés de 60 ans. Bref, l'assureur est principalement exposé au risque que la proportion de jeunes assurés achetant ce produit soit supérieur à ses attentes. Malgré tout, le risque de l'option de décaissement demeure présent dans une moindre mesure pour ce produit spécifique et l'environnement économique analysé, en assumant que l'assureur choisit un âge au décaissement de 65 ans pour tous les assurés.

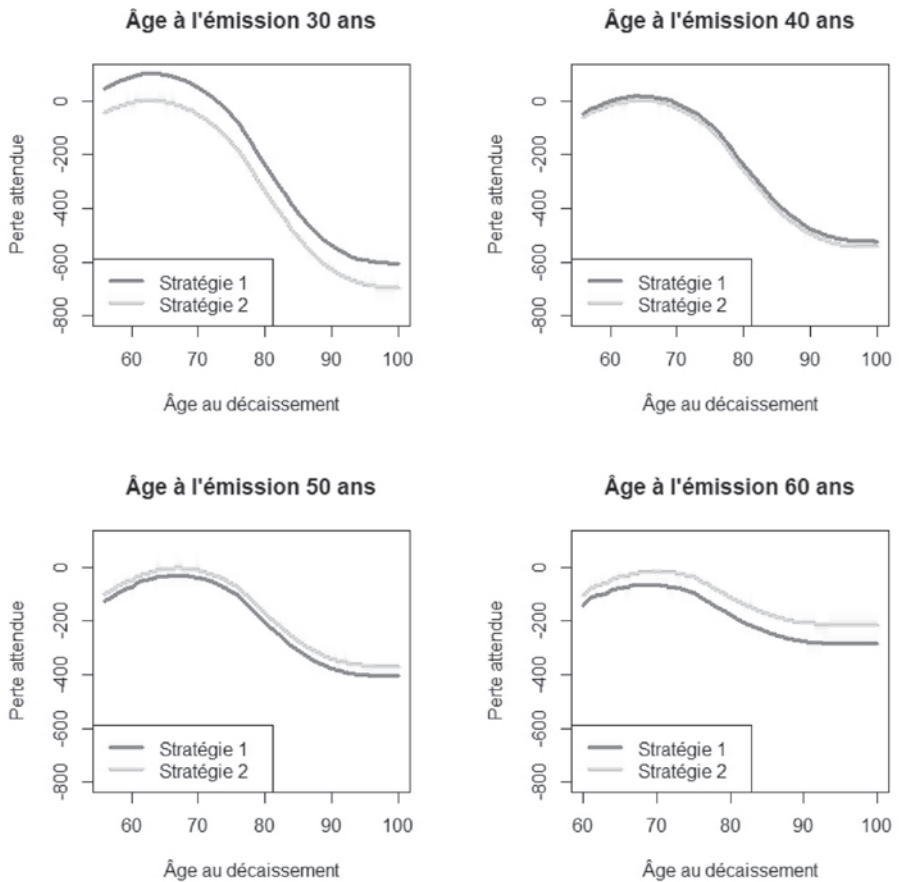
■ **TABLEAU 5** *Pertes attendues vs maximales – Stratégie de tarification 1*

ÂGE À L'ÉMISSION	ÂGE OPTIMAL	PERTE ATTENDU 65 ANS	PERTE MAXIMALE
30 ans	63	99 \$	104 \$
40 ans	64	18 \$	20 \$
50 ans	67	-34 \$	-29 \$
60 ans	71	-82 \$	-64 \$

Les graphiques dans la Figure 15 ci-dessous illustrent les pertes attendues selon les deux stratégies de tarification analysées. On peut constater que le stratégie 2 résulte en une perte maximale attendue de 0 \$ pour tous les âge à l'émission. Ainsi, cette stratégie de tarification a pour avantage d'éliminer les impacts défavorables pouvant être amenés par les écarts d'expérience d'un décaissement effectué à un moment imprévu. La distribution des pertes étant sensiblement translatée selon la stratégie de tarification observée, on peut donc constater que l'âge optimal au décaissement demeure équivalent pour ces deux stratégies.

Les résultats présentés permettent de tirer deux principales conclusions. Tout d'abord, un assureur s'expose à davantage de risque en utilisant la stratégie 1 en raison du risque de distribution des ventes présent et de la présence d'âge qui financent la rentabilité pour compenser les pertes attendues d'autres assurés. De plus, le succès de cette stratégie repose sur une hypothèse devant être établie par l'assureur qui pourrait ne pas se réaliser : l'âge de décaissement attendu à l'émission. La stratégie 2 réduit le risque amené par la distribution des ventes et établit un âge de décaissement non pas basé selon une hypothèse de l'assureur mais plutôt à partir d'une analyse lui permettant d'éliminer ce risque. Bien que les deux stratégies amènent l'assureur à

■ FIGURE 15 *Comparaison des pertes attendues pour les deux stratégies de tarification*



demeurer exposé au risque financier du produit, des stratégies de couverture telles qu'élaborées en introduction de cet article permettent de réduire considérablement ce dernier. Toutefois, la stratégie 2 demeure plus complexe dans la mesure où l'assureur doit résoudre de manière récursive l'équation de juste frais par âge, sans établir au préalable un âge de décès attendu.

4. CONCLUSION

Notre article a permis de bonifier l'analyse de [Huang *et al.*, 2014] en y incluant une analyse de risque et une méthode afin de tenir compte de l'option offerte via l'âge au décès lorsqu'une tarification de

produit avec garantie de rachat viager (c.-à-d., Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefit (GLWB)) est effectuée. Tout d'abord, l'analyse de quatre produits présentant différentes caractéristiques ont permis de constater que l'âge optimal au décaissement tend vers un niveau similaire lorsque les taux d'intérêt sont élevés. En effet, la présence d'un environnement économique favorable augmente la probabilité que les réclamations soient nulles. Ainsi, un assuré a intérêt à déclencher plus rapidement le moment du décaissement dans cette situation. L'analyse des quatre produits présentés a permis de constater que la variable du «roll-up» du solde de rachat garanti (SRG) est celle qui a la plus grande importance sur la distribution des pertes. En effet, le produit 2 (sans roll-up) a présenté une distribution des pertes et des âges au décaissement avec une distribution plus aplatie à l'opposé des trois autres produits analysés (ayant un roll-up de SRG). Bien que les frais de gestion et taux de décaissement puissent avoir un effet sur l'âge au décaissement et la distribution des pertes, ces variables ont principalement pour effet de translater ces distributions plutôt que modifier la forme de ces dernières. Un constat similaire à [Kling *et al.*, 2011] peut être fait via l'analyse du modèle de volatilité stochastique Heston. En effet, la présence de ce modèle a peu d'incidence sur la valeur des produits offerts et ainsi, l'âge optimal de décaissement.

L'analyse de tarification effectuée dans notre article a permis de proposer des pistes d'amélioration possibles pour tarifier les produits GLWB afin de réduire les risques non-financiers offerts dans ce produit. Tout d'abord, le risque de distribution des ventes peut être amenuisé si les assureurs offrent un niveau de frais de gestion en fonction de l'âge à l'émission. Cette façon de procéder élimine l'inéquité présente entre les assurés pour contribuer à la rentabilité du produit. Dans un second temps, l'introduction d'une approche itérative lors de la tarification pourrait permettre de réduire le risque présent via l'option d'âge au décaissement dans les produits. En effet, cette approche élimine la subjectivité amenée afin d'estimer l'âge au décaissement des assurés. Cette approche pourrait s'avérer efficace, entre autres, lorsque de nouveaux produits sont offerts sur le marché et que l'assureur a peu d'expérience afin d'établir une hypothèse de comportement des assurés.

Finalement, rappelons que nous avons fait des hypothèses similaires à celles de [Huang *et al.*, 2014]. Particulièrement, aucune notion d'utilité n'est considérée afin de guider le choix de l'assuré par rapport à l'âge au décaissement. Il est pertinent de noter que des variables externes pourraient toutefois amener ce dernier à débiter la phase de décaissement à un moment qui ne lui est pas optimal. Par exemple, des besoins de liquidités, des prestations sociales et un état de santé déviant

de la population canadienne sont autant d'éléments qui pourraient orienter le choix de ce dernier sur le moment du décaissement du produit.

5. RÉFÉRENCES

Anna Rita Bacinello, Pietro Millosovich, and Alvaro Montealegre. The valuation of GMWB variable annuities under alternative fund distributions and policyholder behaviours. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(5): p. 446-465, 2016.

Anna Rita Bacinello, Pietro Millosovich, Annamaria Olivieri, and Ermanno Pitacco. Variable annuities: A unifying valuation approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 49(3): p. 285-297, 2011.

Anna Rita Bacinello and Svein-Arne Persson. Design and pricing of equity-linked life insurance under stochastic interest rates. *The Journal of Risk Finance*, 3(2): p. 6-21, 2002.

Daniel Bauer, Alexander Kling, and Jochen Russ. A universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 38(2): p. 621-651, 2008.

[1] Phelim Boyle and Mary Hardy. Guaranteed annuity options. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 33(2): p. 125-152, 2003.

Michael J Brennan and Eduardo S Schwartz. The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee. *Journal of Financial Economics*, 3(3): p. 195-213, 1976.

Mark Broadie and Özgür Kaya. Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Operations Research*, 54(2): p. 217-231, 2006.

Zhang Chen, Ken Vetzal, and Peter A Forsyth. The effect of modelling parameters on the value of GMWB guarantees. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43(1): p. 165-173, 2008.

[2] Min Dai, Yue Kuen Kwok, and Jianping Zong. Guaranteed minimum withdrawal benefit in variable annuities. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 18(4): p. 595-611, 2008.

[3] David CM Dickson, Mary R Hardy, and Howard R Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, 2013.

- [4] Ryan Donnelly, Sebastian Jaimungal, and Dmitri H Rubisov. Valuing guaranteed withdrawal benefits with stochastic interest rates and volatility. *Quantitative Finance*, 14(2): p. 369-382, 2014.
- [5] Darrell Duffie, Peter Glynn, et al. Efficient Monte Carlo simulation of security prices. *The Annals of Applied Probability*, 5(4): p. 897-905, 1995.
- [6] Runhuan Feng. *An Introduction to Computational Risk Management of Equity-Linked Insurance*. CRC Press, 2018.
- [7] Man C Fung, Katja Ignatieva, and Michael Sherris. Systematic mortality risk: An analysis of guaranteed lifetime withdrawal benefits in variable annuities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 58(1): p. 103-115, 2014.
- [8] Hans U Gerber and Elias SW Shiu. Pricing lookback options and dynamic guarantees. *North American Actuarial Journal*, 7(1): p. 48-66, 2003.
- [9] Mary Hardy. *Investment Guarantees, Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*, volume 215. John Wiley & Sons, 2003.
- Steven L Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2): p. 327-343, 1993.
- Daniela Holz, Alexander Kling, and Jochen Russ. GMWB for life an analysis of lifelong withdrawal guarantees. *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft*, 101(3): p. 305-325, 2012.
- [10] Huaxiong Huang, Moshe A Milevsky, and Thomas S Salisbury. Optimal initiation of a GLWB in a variable annuity: No arbitrage approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 56: 102-111, 2014.
- [11] John Hull and Alan White. Pricing interest-rate-derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4): p. 573-592, 1990.
- [12] Huu Tue Huynh, Issouf Soumare, and Van Son Lai. *Stochastic Simulation and Applications in Finance with MATLAB Programs*, volume 633. John Wiley & Sons, 2011.
- [13] Tigran Kalberer and Kannoo Ravindran. *Variable Annuities: A global perspective*. Risk Books, 2009.
- [14] Ugur Karabey, Torsten Kleinow, and Andrew JG Cairns. Factor risk quantification in annuity models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 58: p. 34-45, 2014.
- Alexander Kling, Frederik Ruez, and Jochen Russ. The impact of stochastic volatility on pricing, hedging, and hedge efficiency of withdrawal benefit guarantees in variable annuities. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 41(2): p. 511-545, 2011.

Alexander Kling, Frederik Ruez, and Jochen Ruß. The impact of policyholder behavior on pricing, hedging, and hedge efficiency of withdrawal benefit guarantees in variable annuities. *European Actuarial Journal*, 4(2): p. 281-314, 2014.

X Sheldon Lin, Ken Seng Tan, and Hailiang Yang. Pricing annuity guarantees under a regime-switching model. *North American Actuarial Journal*, 13(3): p. 316-332, 2009.

Moshe A Milevsky and Thomas S Salisbury. Financial valuation of guaranteed minimum withdrawal benefits. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1): p. 21-38, 2006.

[15] Moshe A Milevsky. *Life annuities: An optimal product for retirement income*. Research Foundation of CFA Institute, 2013.

[16] Thorsten Moenig and Nan Zhu. Lapse and reentry in variable annuities. *Journal of Risk and Insurance*, 85(4): p. 911-938, 2018.

Jingjiang Peng, Kwai Sun Leung, and Yue Kuen Kwok. Pricing guaranteed minimum withdrawal benefits under stochastic interest rates. *Quantitative Finance*, 12(6): p. 933-941, 2012.

Gabriella Piscopo and Steven Haberman. The valuation of guaranteed lifelong withdrawal benefit options in variable annuity contracts and the impact of mortality risk. *North American Actuarial Journal*, 15(1): p. 59-76, 2011.

[17] Kannoo Ravindran. *The Mathematics of Financial Models: Solving Real-world Problems with Quantitative Methods*, volume 658. John Wiley & Sons, 2014.

[18] Premal Shah and Dimitris Bertsimas. An analysis of the guaranteed withdrawal benefits for life option. 2008.

[19] Petra Steinorth and Olivia S Mitchell. Valuing variable annuities with guaranteed minimum lifetime withdrawal benefits. *Insurance: Mathematics and Economics*, 64: 246-258, 2015.

[20] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2): p. 177-188, 1977.

[21] Gregory A Willard. Calculating prices and sensitivities for path-independent derivative securities in multifactor models. 1996.

[22] Bernard Wong and CC Heyde. On changes of measure in stochastic volatility models. *International Journal of Stochastic Analysis*, 2006.

[23] Sharon S Yang and Tian-Shyr Dai. A flexible tree for evaluating guaranteed minimum withdrawal benefits under deferred life annuity contracts with various provisions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(2): p. 231-242, 2013.

NOTES

1 Maxime Turgeon-Rhéaume, MSc (ing. fin.), FSA, FICA, Conseiller sénior en actuariat chez iA Groupe financier (Industrielle Alliance), Canada, maxime.turgeon-rheaume@ia.ca et Van Son Lai, Ph. D., CFA, Professeur de finance, FSA ULaval, Canada, vanson.lai@fsa.ulaval.ca.

2 Acronyme anglophone de Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefit. Les GLWB comportent non seulement un volet d'accumulation d'épargne mais aussi des garanties de taux de retrait lorsque le contractant souhaite décaisser ses épargnes.

3 Acronyme anglophone de Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit.

4 Les quantos sont des options écrites sur des titres d'un marché étranger mais payées en monnaie domestique.

5 Plus communément appelé programme de hedging.

6 Survivor forward.

7 En analyse de sensibilité, Hoeffding introduit une méthode de décomposition de variance basant sur la décomposition fonctionnelle de la sortie.

8 Calibration effectuée sur les données de l'indice S&P500.

9 La fonction préétablie dans ce logiciel utilise l'approche de résolution numérique Nelder-Mead.