

Gestion optimale d'un réservoir en avenir déterminé Optimal operations of a reservoir with a deterministic future

H. J. Morel-Seytoux

Volume 11, numéro 4, 1998

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/705322ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/705322ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

Université du Québec - INRS-Eau, Terre et Environnement (INRS-ETE)

ISSN

0992-7158 (imprimé)

1718-8598 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer cet article

Morel-Seytoux, H. J. (1998). Gestion optimale d'un réservoir en avenir déterminé. *Revue des sciences de l'eau / Journal of Water Science*, 11(4), 569–598. <https://doi.org/10.7202/705322ar>

Résumé de l'article

Massé, dans ses deux volumes (1946), discute le problème de la gestion optimale des lâchures dans le cas d'un seul réservoir quand le bénéfice est dérivé de la production d'énergie hydroélectrique. Massé obtint ses résultats à la fois par un raisonnement économique et par une généralisation du Calcul des Variations. Sa méthode lui permit de fournir la preuve rigoureuse de la méthode graphique de Varlet (1923), dite du "fil tendu". Dans cet article on généralise la procédure de Massé au cas où (1) le bénéfice est réalisé bien en aval du point de lâchure, et (2) il y a plusieurs "point-cibles" (points où un certain objectif doit être assuré). Massé avait trouvé que la gestion optimale est celle qui maintient la valeur marginale du bénéfice constante dans le temps, pourvu que la gestion soit en régime libre, c' est à dire tant que le réservoir ne fonctionne ni à plein ni à vide. Par contre si le réservoir fonctionne par exemple à plein, Massé montra que la stratégie qui consiste à garder le réservoir plein ne peut être optimale que si la valeur marginale du bénéfice croît constamment avec le temps durant la période où le réservoir reste plein. On montre de manière rigoureuse dans le cas général que pour une gestion optimale ce qui doit rester constant c' est la valeur marginale future du bénéfice. Dans un article ultérieur on fournira la généralisation pour plusieurs réservoirs.

Gestion optimale d'un réservoir en avenir déterminé

Optimal operations of a réservoir with a deterministic future

H. J. MOREL-SEYTOUX

Reçu le 2 septembre 1997, accepté le 25 juin 1998*.

SUMMARY

The problem for operations of reservoirs is to choose on a day to day basis the value of the release at the dam location. The choice of the value of that discharge is conditioned by a criterion of satisfaction of one or several objectives. These objectives are defined in one or several points in the system on the river, or the rivers, downstream from the point, or the points, of release. Typical objectives may be to maximize electric production, or to minimize damage due to flooding downstream from the dams or due to shortages of water in the rivers at diversion points for municipal water supply or other uses, etc.

We have attempted to develop a procedure, which is simple, computationally efficient, adapted to the concerns of the managers, and relatively intuitive. The approach described in this article pursues the reasoning of MASSÉ (1946) but generalizes it and therefore makes it more applicable. At first we look at the case of a single reservoir, located directly on the stream for the production of electric energy. In this case the target-point (the point where an objective function is to be evaluated) coincides with the point of release. This was precisely the problem studied by MASSÉ (1946) in his classical two volumes on "Reserves and the Regulation of the Future". We pursue his reasoning but we use a more appropriate mathematical procedure which will allow us to obtain more general results. The same results are derived using two different approaches. The first one is more intuitive and uses the concept of marginal value to secure the necessary condition of optimality to be satisfied by the releases. The second procedure is more mathematical and uses, basically, the method of Calculus of Variations, generalized to the case where there are inequality constraints that must be satisfied. In the case of a single reservoir one shows that the optimality condition provides the rigorous proof of the graphical method of Varlet (1923). The results of MASSÉ are generalized to the case where the objective function is

evaluated downstream from the point of release and the management strategy must account for the phenomenon of propagation of discharges in the streams. Again in this case the results are obtained in two ways, (1) by the economic reasoning on the marginal values and (2) with the Constrained Calculus of Variations.

MASSÉ had found that the optimal policy for the releases was the one that maintained the marginal benefit constant in time. That applied for the case of a single reservoir and where the target-point coincides with the point of release. If $B\{x(t),t\}$ is the instantaneous benefit obtained from making the release at the dam at a rate $x(t)$ at time t , then the optimality condition is mathematically:

$$b\{x(t),t\} = \lambda = \text{constant with time}$$

where $b\{x(t),t\}$ is the marginal benefit, i.e. the partial derivative of $B\{x(t),t\}$ with respect to the argument x . λ is a constant, which in the mathematical formulation of the problem is the Lagrange multiplier associated with the mass balance constraint to be satisfied over the selected horizon of operations. In other words the cumulative volume of releases over the time horizon must be equal to the cumulative volume of inflows plus the drop in reservoir storage between the initial and final times. Economically the marginal benefit is the incremental benefit realized by making an extra release of one unit of water, given that the rate of release was $x(t)$. Typically the marginal benefit decreases as the rate of release increases and that is often referred to as the "law of decreasing returns". For the case of electric production the marginal benefit will depend on the amount of releases made through the turbines but also on the season of year or day of week or hour of day. The price of electricity is higher in winter than it is in summer. It is higher during peak hours during the week than it is on weekends, etc. If on the other hand the marginal benefit is only a function of the release, and not a function of time, then the constancy of the marginal benefit with time is equivalent to the constancy of the release with time. Optimality becomes synonymous with regulation, i.e. releasing at a constant rate. It is only under these conditions that the graphical method of Varlet is applicable. In the graphical domain of cumulative volume of releases versus time, the optimal "trajectory" is a straight line where such a strategy is feasible i.e. does not make the reservoir more than full nor less than empty. When the objective is evaluated at a point downstream from the point of release and the marginal benefit (or cost) has a seasonal character, neither the graphical procedure of Varlet nor the mathematical result of MASSÉ apply. For this more general case the derived optimality condition states that it is no longer an instantaneous marginal benefit that must remain constant in time. What must remain constant in time is a time integrated and weighted value of the marginal benefit (or damage) between the time the release is made and a later time. That later time is the release time plus the memory of the propagation system. The memory time is the time that must lapse before an upstream release is no longer felt at the target point downstream. The longer the distance between the release point and the target-point the longer is the memory of the propagation system. At the downstream point the damage depends on the discharge at that point, which is of course related to the release rate but also to the lateral inflows in between from tributaries and on the amount of attenuation that happens between the point of release and the target-point downstream. The integrand at dummy integration time τ is the marginal damage at that time multiplied by the instantaneous unit hydrograph at that time. Mathematically the integrand is: $f\{q(\tau),\tau\} * k(\tau-t)$ where f is marginal damage, $q(\tau)$ is discharge at target point and $k(\cdot)$ is instantaneous unit hydrograph of propagation between release and target points. This integrand is to be integrated between time t of the release and time $t + M$, where M is the memory of the system. It is that integral that we have called the "Integrated Marginal Future" (or IMF for short) value that must remain constant in time. That optimality condition applies as long as the trajectory remains in the feasible domain bounded by the

constraints of the problem, the "interior domain". When on a bound, the IMF value does not remain constant but must vary monotonically in a given direction, i.e. increases or decreases with time, depending on the constraint on which the solution rests.

Key-words: *optimization, reservoir operations, water resources management, large scale river basin model, propagation time, floods, low flows augmentation.*

RÉSUMÉ

MASSÉ, dans ses deux volumes (1946), discute le problème de la gestion optimale des lâchures dans le cas d'un seul réservoir quand le bénéfice est dérivé de la production d'énergie hydroélectrique. MASSÉ obtint ses résultats à la fois par un raisonnement économique et par une généralisation du calcul des variations. Sa méthode lui permit de fournir la preuve rigoureuse de la méthode graphique de Varlet (1923), dite du « fil tendu ». Dans cet article on généralise la procédure de MASSÉ au cas où (1) le bénéfice est réalisé bien en aval du point de lâchure, et (2) il y a plusieurs « point-cibles » (points où un certain objectif doit être assuré). MASSÉ avait trouvé que la gestion optimale est celle qui maintient la valeur marginale du bénéfice constante dans le temps, pourvu que la gestion soit en régime libre, c'est-à-dire tant que le réservoir ne fonctionne ni à plein ni à vide. Par contre si le réservoir fonctionne par exemple à plein, MASSÉ montra que la stratégie qui consiste à garder le réservoir plein ne peut être optimale que si la valeur marginale du bénéfice croît constamment avec le temps durant la période où le réservoir reste plein. On montre de manière rigoureuse dans le cas général que pour une gestion optimale ce qui doit rester constant c'est la valeur marginale future du bénéfice. Dans un article ultérieur on fournira la généralisation pour plusieurs réservoirs.

Mots clés : *optimisation, exploitation de réservoirs, gestion des eaux, modèle de grands bassins, temps de propagation, crues, étiages.*

1 – DÉFINITION DU PROBLÈME GÉNÉRAL ET PLAN DE L'ARTICLE

Le problème pour l'exploitation des barrages est de choisir, disons au jour le jour, la valeur du débit de lâchure au droit de ces barrages. Le choix de la valeur de ce débit est conditionné par un critère de satisfaction d'un ou plusieurs objectifs. Ces objectifs sont définis en un ou plusieurs points sur la rivière, ou les rivières, en aval du point, ou des points, de lâchure. La figure 1 illustre la géométrie de ce problème dans le cas d'un seul réservoir avec plusieurs « points objectifs » sur la rivière, les points B, E, F, etc.

Nous allons d'abord nous pencher sur le cas d'un seul réservoir placé directement sur le cours d'eau pour la production d'énergie électrique. Dans ce cas le point objectif coïncide avec le point de lâchure (section 3). C'est exactement le problème étudié par MASSÉ (1946) dans son ouvrage classique. Nous allons reprendre son raisonnement mais en utilisant une procédure mathématique plus appropriée, qui permettra par la suite d'obtenir des résultats plus généraux. On dérive les mêmes résultats par deux approches. La première est plus intuitive et utilise le concept de la valeur marginale pour obtenir la condition d'optimalité à satisfaire pour les lâchures. La deuxième est plus mathématique et utilise le calcul des variations, généralisé au cas où existent des contraintes d'inégalités.

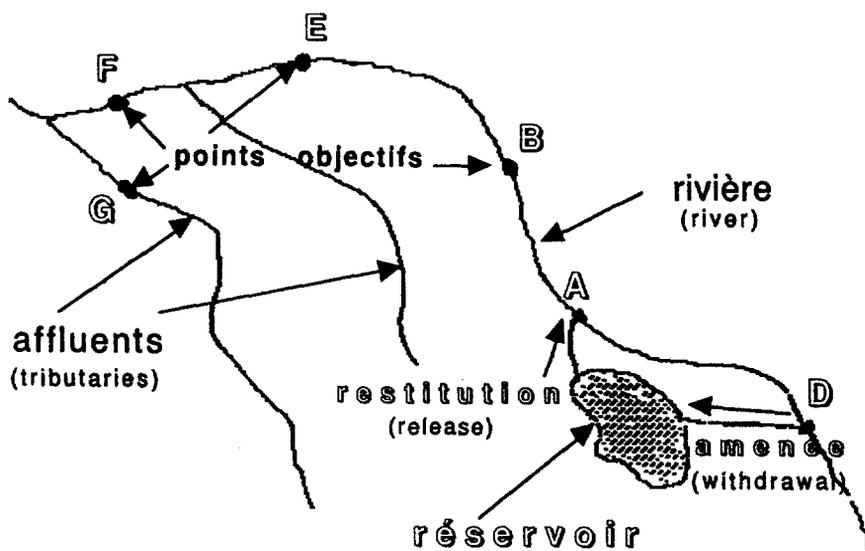


Figure 1 Géométrie du système et points importants.
System geometry and important points.

Dans le cas d'un seul réservoir on montre (section 3) que la condition d'optimalité fournit la preuve rigoureuse de la méthode graphique de Varlet (1923). Dans la section 4, on généralise le résultat de MASSÉ quand la fonction objectif est évaluée en aval du point de lâchure et la gestion doit tenir compte du phénomène de propagation des débits en rivière. Ici encore on obtient les résultats de deux manières, (1) par le raisonnement économique sur les valeurs marginales et (2) par le calcul des variations sous contraintes. Dans la section 5 on généralise les résultats de la section 4 au cas où il y a plusieurs fonctions objectifs et plusieurs points objectifs. La section 6 illustre graphiquement quelques résultats de la procédure numérique de calcul. La section 7 place ce travail en perspective par une brève revue bibliographique. On termine avec une conclusion sommaire sur le mérite de cette nouvelle approche.

2 – PERSPECTIVE SUR LE TRAVAIL DE MASSÉ

En 1946 MASSÉ publiait ses deux volumes remarquables sur « Les réserves et la régulation de l'avenir dans la vie économique ». Il s'agissait pour lui de tous genres de capacités de stockage, pour toutes sortes de produits, afin de diminuer les possibilités de leurs pénuries éventuelles, qu'il s'agisse de céréales, d'eau, de produits pétroliers, d'uranium, de cacao ou de café, etc. En pratique, travaillant pour Électricité de France (EDF), il démontra naturellement l'application de sa méthode à l'opération des réservoirs pour la production d'énergie hydroélectrique. Avec une intuition remarquable, il exprima ses résultats mathématiques, par le calcul des variations, en termes économiques simples utilisant le concept bien

connu (tout au moins parmi les économistes) de la valeur marginale (soit du bénéfice, soit du coût, soit, plus généralement, d'une certaine utilité). Il montra également par une procédure graphique simple ce dont aurait l'air une opération (trajectoire) optimale dans le domaine : « contenu du réservoir » en fonction du temps. Cette approche graphique avait déjà été découverte par Varlet (comme le faisaient remarquer KLEMES, 1979, et LAUFER et MOREL-SEYTOUX, 1979). Cependant MASSÉ était capable d'expliquer les résultats graphiques de VARLET (1923) d'une manière plus rigoureuse et de les généraliser pour des situations où la « valeur marginale » (nous ne spécifierons pas généralement s'il s'agit d'un coût ou d'un bénéfice, etc.) est non seulement une fonction de la lâchure mais aussi de l'époque de l'année. Ici encore le terme « lâchure » doit être compris dans un sens large car il pourrait s'agir effectivement d'une lâchure d'eau d'un réservoir de surface derrière un barrage, mais aussi d'un prélèvement par un puits de forage dans une nappe aquifère, ou de maïs dans un silo à grain, etc. Dans le reste de cet article nous utiliserons le vocable approprié à la gestion de réservoirs de surface mais le lecteur doit extrapoler à toute opération de « thésaurisation » d'une marchandise (produit, denrée) pour la restituer sur le marché à un moment propice quand le prix est élevé. MASSÉ développa une extension du calcul des variations qui pouvait tenir compte d'inégalités. Pendant longtemps le calcul des variations avait su éliminer élégamment les égalités par le biais des multiplicateurs de Lagrange, mais, (à ma connaissance) personne parmi les ingénieurs, n'avait jusqu'alors su adapter cette méthode aux inégalités. De plus il suggéra une procédure pour appliquer numériquement la théorie qui fut vulgarisée une dizaine d'années plus tard par BELLMAN (1957) sous le nom de Programmation Dynamique (Dynamic Programming, D.P.). En particulier il démontra comment appliquer cette technique en avenir incertain (MOREL-SEYTOUX, 1976). Il serait équitable de faire référence au « principe d'optimalité » sous le nom de « principe de Massé-Bellman », un principe qui n'est en fait qu'un vieil et simple résultat du Calcul des Variations.

3 – LE PROBLÈME DE MASSÉ POUR L'OPTIMISATION DE LA PRODUCTION D'ÉNERGIE HYDROÉLECTRIQUE

Il faut choisir, jour après jour, la valeur de la lâchure (débit) dans les turbines. Le choix dépend, en gros, d'un seul objectif, celui de maximiser la valeur monétaire de l'énergie produite sur un horizon de temps donné. Soit $B[x(t), t]$ le bénéfice instantané associé à la lâchure au temps t de flux $x(t)$. Selon l'heure dans la journée (heure de pointe ou heure creuse) et la saison de l'année (hiver ou été) cette puissance a un prix différent (e.g. LAUFER et MOREL-SEYTOUX, 1979). Ces facteurs définissent ce bénéfice instantané $B[x(t), t]$. Sur un horizon d'une ou plusieurs années, le bénéfice total est alors la valeur cumulée de tous les bénéfices instantanés dans le temps. Mathématiquement ce bénéfice total est donc :

$$B_T = \int_0^T B[x(\tau), \tau] d\tau \quad (1)$$

où T est l'horizon de temps sur lequel les bénéfices sont cumulés. Le problème est de trouver la fonction inconnue du temps $x(t)$ qui maximise B_T . Naturellement

le problème n'a pas de sens s'il n'y a pas de limites à la capacité de lâcher de l'eau. Clairement sur l'horizon T , la quantité maximum d'eau qui peut être lâchée est la somme des apports pendant cet horizon et le volume initial du stock, si l'on veut bien finir l'horizon avec un réservoir vide. Par ailleurs une partie de ces eaux est sans doute réservée à d'autres usages que la production d'électricité. Soit donc W_T le volume total disponible pour la production électrique à la discrétion de l'exploitant et connu dès le début de l'horizon $[0, T]$. L'exploitation est sujette à contrainte de ce fait, ou mathématiquement :

$$\int_0^T x(\tau) d\tau \leq W_T \quad (2)$$

(Nous ignorons pour le moment les contraintes sur le stock en tout temps qui exigent que le contenu du réservoir soit réalisable, c'est-à-dire reste entre zéro et la capacité du réservoir). Comme l'horizon est limité, il n'y a aucune raison d'épargner de l'eau au-delà de ce temps et la solution optimale utilisera toute l'eau disponible. Autrement dit si une stratégie présumée optimale n'utilisait qu'une partie de cette disponibilité W_T , alors le bénéfice total pourrait être augmenté en lâchant cette eau excédentaire à tout moment où la valeur de l'eau n'est pas nulle. Par conséquent on peut déduire que la contrainte sera « active » et on peut la réécrire comme une égalité :

$$\int_0^T x(\tau) d\tau = W_T \quad (3)$$

Nous sommes donc ramenés au problème d'optimisation avec une contrainte d'égalité, qui est le cas classique du calcul des variations. On peut alors procéder soit purement mathématiquement ou en raisonnant d'un point de vue économique. Nous commencerons par ce dernier point de vue en suivant la ligne de raisonnement de MASSÉ qui est plus intuitive et tout aussi contraignante.

3.1 Raisonnement économique

3.1.1 Régime libre (Solution intérieure)

Nous nous plaçons d'abord dans le cas où la stratégie d'exploitation ne conduit jamais à une situation où le réservoir est vide ou plein. Dans le domaine « contenu du réservoir » en fonction du temps, nous dirons que la trajectoire (image) de la stratégie est intérieure, c'est-à-dire ne touche jamais ni la borne supérieure, $s < C$, ni inférieure, $s > 0$, où « s » est le contenu (stock) courant du réservoir et « C » est la capacité du réservoir. D'abord définissons la valeur marginale. C'est la valeur (bénéfice) gagnée par le lâcher d'une unité supplémentaire d'eau, étant donné qu'on a déjà lâché un débit x au temps t . Par définition ce bénéfice marginal est :

$$b = \frac{\partial B[x(t), t]}{\partial x} = b[x(t), t] \quad (4)$$

Remarquons que nous nous sommes limités au cas où B dépend uniquement du débit de lâcher $x(t)$ et du temps t , mais d'autres facteurs peuvent influencer le bénéfice. Dans le cas de la production électrique, le bénéfice dépend aussi de la charge (donc du stock). Par ailleurs dans tout cet article nous supposons que la

« loi du rendement décroissant » s'applique, ce qui veut dire mathématiquement que, dans le cas d'un problème de minimisation la fonction de coût est convexe et que pour la maximisation la fonction bénéfique est au contraire concave. Cela garantit que la fonction $b[x(t), t]$ est monotone en $x(t)$ et que la condition nécessaire pour l'optimalité sera également suffisante.

Considérons une politique arbitraire de lâchure. Au temps t_1 la valeur marginale est b_1 et au temps t_2 plus tard la valeur marginale est b_2 . Supposons alors qu'au temps t_1 on choisisse de lâcher une unité supplémentaire d'eau. Le bénéfice supplémentaire sera donc $(b_1 \times 1 \text{ unité}) = b_1$. Comme le volume total disponible est limité, il sera alors nécessaire de réduire la lâchure d'une unité par exemple au temps t_2 . Cela résultera en une perte égale à b_2 . Le gain net sera donc la différence $\Delta B = b_1 - b_2$. Si le bénéfice marginal au temps t_1 est plus grand que celui au temps t_2 , alors cela vaut la peine de lâcher plus au temps t_1 , moins au temps t_2 , et vice versa dans le cas contraire. Par définition une politique est optimale s'il n'est pas possible de la modifier (perturber) et ce faisant d'accroître le bénéfice total. On peut immédiatement conclure qu'à moins que $b_1 = b_2$, la politique initiale, qui avait été perturbée, n'était pas optimale en premier lieu et c'est pour cela qu'il était possible de l'améliorer. Comme les temps t_1 et t_2 sont arbitraires, on doit conclure que la condition **nécessaire** pour qu'une politique de lâchure soit optimale est qu'elle garantisse la constance de la valeur marginale dans le temps, ou mathématiquement :

$$\frac{db}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad b = b[x(t), t] = \lambda \quad (5)$$

où λ est une constante. Nous avons donc obtenu le résultat fondamental : **Une politique optimale est celle qui garde la valeur marginale constante dans le temps**. Comme la valeur marginale dépend de $x(t)$, la solution de l'Eq.(5) fournira la valeur optimale de la lâchure en fonction du temps et du paramètre λ , ou de manière symbolique : $x(t, \lambda)$. La valeur de λ est obtenue par substitution de la solution $x(t, \lambda)$ dans l'Eq.(3), qui donne une équation algébrique pour la seule inconnue restante λ . Notons que si la valeur marginale dépend du temps seulement par sa dépendance sur $x(t)$ (et non par l'argument temps) alors la constance de la valeur marginale est équivalente à la constance de la lâchure. Ceci est vrai quelle que soit la forme fonctionnelle de $b[x(t)]$.

3.1.2 Régime bloqué (« Solution bornée »)

S'il arrive que la solution se trouve sur une borne, alors le raisonnement précédent doit être modifié un tant soit peu. Supposons qu'au temps t_1 le contenu du réservoir soit zéro (borne inférieure). Le bénéfice marginal correspondant, b_1 , est donc celui pour une lâchure égale au débit entrant. Si b_1 est supérieur à b_2 , le bénéfice marginal à un temps t_2 plus tard, il vaudrait alors mieux lâcher une unité supplémentaire au temps t_1 , plutôt que de la garder en stock pour la lâcher plus tard au temps t_2 . Mais ce n'est pas réalisable de lâcher plus, puisque le réservoir est vide car on lâche le débit entrant dans le réservoir. Par contre si b_1 est plus faible que b_2 il vaut mieux lâcher moins pour lâcher davantage plus tard. Dans ce cas le réservoir ne reste pas vide. On conclut qu'**une politique qui garde le réservoir vide ne peut être optimale que si le bénéfice marginal diminue dans le temps**. De même on montrerait qu'une politique qui garde le réservoir plein ne peut être optimale que si la valeur marginale augmente avec le temps.

Nous avons donc défini les conditions nécessaires d'optimalité pour l'exploitation d'un réservoir, nommément :

$$\frac{db}{dt} = 0 \quad \text{si la solution est intérieure} \quad (6a),$$

$$\text{ou } \frac{db}{dt} \geq 0 \quad \text{si la solution est sur la borne supérieure} \quad (6b),$$

$$\text{ou } \frac{db}{dt} \leq 0 \quad \text{si la solution est sur la borne inférieure} \quad (6c).$$

Ces conditions d'optimalité sur le bénéfice marginal furent dérivées pour le cas de la maximisation (par exemple des revenus de la production d'électricité). Pour un problème de minimisation (par exemple des dégâts causés par les inondations) le sens des inégalités dans les Eq.(6b et 6c) doit être inversé et « b » serait un coût marginal. Ces conditions sont l'équivalent *continu* des conditions de Kuhn-Tucker en Programmation NonLinéaire (LAUFER et MOREL-SEYTOUX, 1979). Le problème avec ces conditions, comme pour les conditions de Kuhn-Tucker, est leur caractère combinatoire. On ne sait pas *a priori* laquelle des conditions parmi 6a, 6b, ou 6c s'applique. Par suite la ***solution des conditions d'optimalité requerra généralement une procédure itérative.***

3.2 Méthode du calcul des variations sous contrainte

Nous allons procéder avec le cas général. La quantité d'eau en stock au temps t , le contenu du réservoir, $s(t)$, dépend des lâchures passées et des apports, $q(t)$ et à tout moment la relation de conservation de masse doit être satisfaite, soit la contrainte d'égalité :

$$s(t) = s_i + \int_0^t q(\tau) d\tau - \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (7)$$

et la contrainte d'inégalité :

$$s_m \leq s(t) \leq s_M \quad (8)$$

où s_i est le stock initial (au temps zéro, origine des temps), s_m le stock minimum (contrainte physique, zéro, ou contrainte écologique) et s_M le stock maximum (physique ou réglementaire, par exemple pour des raisons de sécurité, etc.). De même sur la lâchure il y aura des contraintes, soit :

$$x_m \leq x(t) \leq x_M \quad (9)$$

Le problème est de maximiser la fonctionnelle $\int_0^T B[x(t), t] dt$ par rapport à la fonction inconnue $x(t)$ tout en satisfaisant l'égalité (7). Dans le cas où il existe des contraintes, la formulation classique est d'introduire le Lagrangien, soit donc dans le cas d'un seul réservoir et d'un seul point objectif qui coïncide avec le point de restitution de la lâchure :

$$L = - \int_0^T B[t, x(t)] dt + \int_0^T \frac{d\lambda t}{dt} \left[\int_0^t [x(\tau) - q(\tau)] d\tau + s(t) - s_i \right] dt \quad (10)$$

Remarquons que le négatif du bénéfice est maintenant utilisé pour que l'optimisation soit une minimisation au lieu d'une maximisation. Dans la suite le sym-

bole de la fonction « B » sera changé en « - F ». Remarquons aussi l'utilisation non traditionnelle du symbole $\lambda' = \frac{d\lambda}{dt}$ comme multiplicateur de Lagrange et que par suite le symbole $\lambda(t)$ dans l'équation (10) est tout à fait différent du symbole λ utilisé précédemment dans (5). Intégration par partie de la seconde intégrale dans l'Eq.(10), facilitée formellement par ce choix de notation, donne :

$$L = \int_0^T F[t, x(t)]dt + \left[\lambda(t) \int_0^t [x(\tau) - q(\tau)]d\tau \right] \Big|_0^T \quad (11)$$

$$- \int_0^T \lambda(t)[x(t) - q(t)]dt + \int_0^T \frac{d\lambda}{dt} [s(t) - s_1]dt$$

Il faut minimiser le Lagrangien par rapport à la fonction inconnue $x(t)$. La procédure classique est de calculer la variation de L suite à une variation de $x(t)$ d'une petite quantité $\delta x(t)$ et de montrer que si $x(t)$ est candidat à l'optimalité il n'est pas possible de trouver des $\delta x(t)$ différents de zéro qui rendent $\delta L < 0$. On cherche les conditions que doit satisfaire $x(t)$ de sorte que pour toute variation faisable $\delta x(t)$, δL reste positif. Pour toute variation de $x(t)$ il y aura automatiquement une variation de $s(t)$. Nous appellerons ces variations δx et δs sans toujours indiquer leur dépendance de la variable temps. On suppose que δx est petit, et donc δs l'est aussi. On fait un développement en série de Taylor pour toutes les fonctions en ne gardant que les termes de premier ordre, et ce faisant on obtient :

$$\delta L = \int_0^T \frac{\partial F[t, x(t)]}{\partial x} \delta x dt + \left[\lambda(t) \int_0^t \delta x(\tau) d\tau \right] \Big|_0^T - \int_0^T \lambda(t) \delta x(t) dt + \int_0^T \frac{d\lambda}{dt} \delta s dt \quad (12)$$

Étant données les conditions, initiale et finale, imposées sur le stock, une variation faisable δx doit satisfaire la condition :

$$\int_0^T \delta x(t) dt = 0 \quad (13)$$

Par suite le terme entre crochets disparaît, laissant le résultat simple :

$$\delta L = \int_0^T \frac{\partial F[t, x(t)]}{\partial x} \delta x(t) dt - \int_0^T \lambda(t) \delta x(t) dt + \int_0^T \frac{d\lambda}{dt} \delta s dt \quad (14)$$

Mettant en facteur la variation $\delta x(t)$ l'expression pour la variation de L prend une forme encore plus simple :

$$\delta L = \int_0^T \left[\frac{\partial F[t, x(t)]}{\partial x} - \lambda(t) \right] \delta x(t) dt + \int_0^T \frac{d\lambda}{dt} \delta s dt \quad (15)$$

3.2.1 Solution optimale en régime libre

On dit que la solution est en régime libre si la solution ne touche ni une borne inférieure ni une borne supérieure que ce soit à propos du stock ou de la lâchure. On dit aussi que la solution est intérieure. Dans ce cas δs peut être positif ou négatif. Le choix de la fonction arbitraire $\lambda(t)$ étant à notre discrétion, il est pratique, comme les variations δx et δs ne sont pas indépendantes, de choisir $\frac{d\lambda}{dt} = 0$. Du fait de ce choix, la variation de L est seulement fonction de δx . Pour

éviter que pour toute variation réalisable de $x(t)$ en régime libre (donc x_m strictement inférieur à $x(t)$ et $x(t)$ strictement inférieur à x_M) L ne puisse être diminué, il est nécessaire que la condition :

$$\frac{\partial F}{\partial t}[t, x(t)] - \lambda(t) = 0$$

ou, au vu du choix précédent :

$$\frac{\partial F}{\partial x}[t, x(t)] = \lambda \quad (16)$$

soit satisfaite à tout instant t , avec λ constant. On a donc trouvé à nouveau le résultat qu'en opérations optimales, si la solution est intérieure, la valeur marginale doit rester constante dans le temps. Le multiplicateur de Lagrange est la valeur constante du coût marginal en exploitation optimale.

3.2.2 Solution optimale en régime bloqué

Supposons que la solution repose sur une borne pendant un certain intervalle de temps. Par exemple $s(t) = s_M$ et le réservoir est plein, disons pendant plusieurs jours. Dans ce cas la seule variation réalisable pour s est $\delta s \leq 0$ (il est possible de drainer le réservoir davantage mais on ne peut le remplir plus). Dans ce cas pour empêcher que δL ne devienne négatif il est nécessaire que $\frac{d\lambda}{dt}$ soit négatif ou nul. Autrement dit, une stratégie qui garderait le réservoir plein pendant une certaine période de temps ne peut être optimale que si pendant cette période la valeur marginale diminue avec le temps (rappelons pour mémoire que nous raisonnons sur le coût marginal ; le bénéfice marginal, son négatif, devrait croître avec le temps). À l'inverse, une stratégie qui garderait le réservoir vide pendant une certaine période de temps ne peut être optimale que si pendant cette période la valeur marginale (coût marginal) augmente avec le temps.

Supposons que la solution soit sur la borne $x = x_M$. Donc pendant cette période la lâchure est faite à capacité. Comme la seule solution faisable pour δx est ≤ 0 , d'après l'Eq.(15), il s'en suit que maintenir la lâchure à son maximum possible est optimal seulement si la valeur marginale de la lâchure est moins que sa valeur en régime libre, nommément :

$$\frac{\partial F}{\partial x}[t, x(t)] \leq \lambda \quad (17)$$

C'est bien sûr l'inverse pour une stratégie qui lâche à la valeur minimum requise.

3.3 La Règle du « fil tendu »

3.3.1 Le cas le plus simple

Dans le cas où la valeur marginale des lâchures n'est pas saisonnière et est seulement fonction du débit de lâchure, la stratégie optimale est celle qui garde la lâchure aussi constante que possible. On peut alors donner à cette stratégie une solution graphique (VARLET, 1923 ; MASSÉ, 1946). Sur la figure 2 nous avons montré dans le « domaine des volumes cumulés des lâchures » les images de

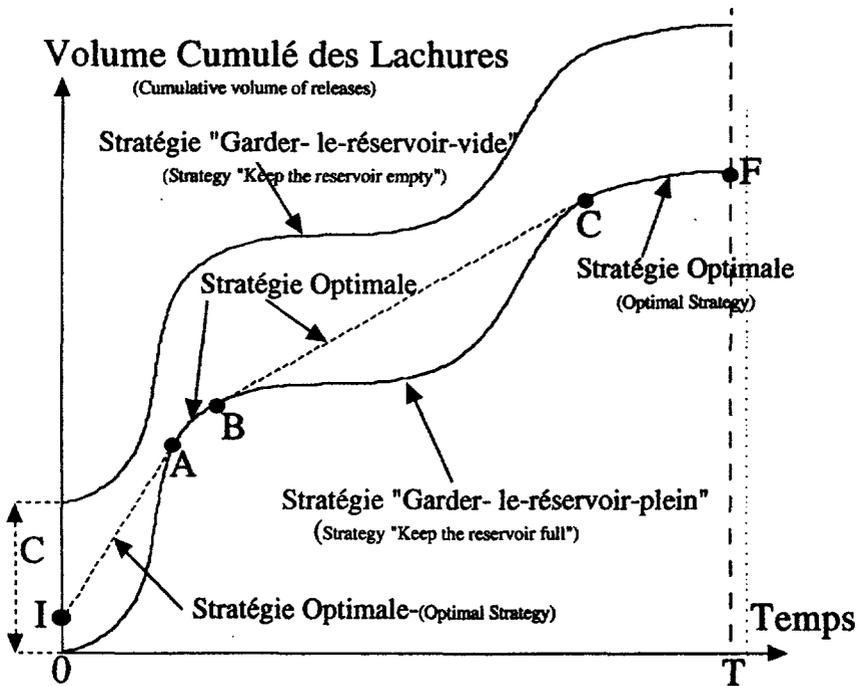


Figure 2 La Procédure du Fil Tendru.
The Stretched Thread Method.

deux stratégies extrêmes pour lesquelles la lâchure est toujours égale au flux entrant (l'« entrée ») dans le réservoir. Dans un cas les opérations commencent avec un réservoir plein ; dans l'autre, elles commencent avec un réservoir vide. À titre d'exemple, considérons la situation où le stock initial est élevé (point I) et que pour des raisons administratives (ou autres), on exige qu'au temps T le réservoir soit plein (point F). Étant données les conditions d'optimalité requises sur les valeurs marginales, on peut donc dire que la trajectoire optimale entre I et F est la ligne droite IA, la courbe AB, la ligne droite BC, et la courbe CF. Les lignes droites sont tangentes aux courbes AB et CF. Il est clair que pour être faisable une trajectoire doit se trouver dans le couloir défini par les stratégies extrêmes « garder-le-réservoir-vider » et « garder-le-réservoir-plein ». La trajectoire définie par ligne IA, courbe AB, ligne BC et courbe CF, est optimale car en régime libre la pente de $X(t)$, volume cumulé des lâchures depuis le début des opérations jusqu'au temps t courant, doit rester constante puisque c'est la lâchure. Toute courbe joignant les points I et A, sauf la ligne droite IA, ne peut être optimale. La courbe AB est optimale parce que de A à B la pente (donc le débit de lâchure, égale au débit amont d'entrée dans le réservoir) diminue avec le temps (la condition $d\lambda/dt \leq 0$ est satisfaite). La ligne BC est optimale car en régime libre l'image de la trajectoire pour être optimale doit être une ligne droite. Finalement le long de la courbe CF, la pente diminue donc les lâchures diminuent et la valeur marginale diminue ($d\lambda/dt \leq 0$ sur une borne supérieure pour le stock). Tout le long de la trajectoire les débits sont connus et les valeurs marginales associées également. Si les

bords du couloir étaient faits en matériau dur, la configuration optimale serait la position de repos d'un élastique épinglé aux points finaux I et F. L'élastique reposerait sur les parties du mur qui sont concaves pour la stratégie « garder-le-réservoir-plein » et convexes pour la stratégie « garder-le-réservoir-vide » et serait tendu entre les points de contact avec les murs.

Notre preuve n'est pas complète. Il faut aussi montrer que parmi tous les points possibles de raccordement entre une ligne droite pour une solution intérieure et la partie concave de la stratégie « garder-le-réservoir-plein », le point de tangence correspond à l'optimum. Cette preuve est donnée en annexe.

3.3.2 Une extension simple

Prenons le cas d'un bénéfice marginal de la forme :

$$b = b[x(t), t] = b_0 e^{-\frac{x}{x_0}} e^{-rt} = b_0 e^{-\left(\frac{x}{x_0} + rt\right)} \quad (18)$$

où « r » est le taux d'escompte des bénéfices futurs, b_0 est le bénéfice marginal maximum possible quand on ne fait aucune lâchure au temps zéro, et x_0 est une valeur de référence avec la dimension d'un débit. Notons que le bénéfice marginal suit bien la loi des rendements décroissants. Soit le volume cumulé des entrées, Q_T , sur tout l'horizon T , et exigeons, pour la simplicité de la présentation, que le stock final soit égal au stock initial. La contrainte sur la disponibilité de la ressource est :

$$\int_0^T x(t) dt = Q_T \quad (19)$$

Pour une solution optimale intérieure la valeur marginale doit être constante. Désignons par λ cette valeur. Alors d'après l'Eq.(18) il suit que :

$$x = x_0 \left[\ln\left(\frac{b_0}{\lambda}\right) - rt \right] \quad (20)$$

Bien que la valeur marginale doive rester constante pour que la politique de lâchure soit optimale, par contre la lâchure varie dans le temps. En fait il faut que la lâchure varie pour que la valeur marginale, elle, reste constante. La substitution de l'expression de x depuis l'Eq.(20) dans l'Eq.(19) donnera la valeur de λ , explicitement après intégration :

$$\lambda = b_0 e^{-\left(\frac{Q_T}{x_0 T} + \frac{r}{2} T\right)} \quad (21)$$

En substituant dans l'Eq.(20) et résolvant pour x , on obtient de manière complètement explicite la valeur de x :

$$x = x_0 \left[\frac{Q_T}{x_0 T} + \frac{r}{2} T - rt \right] \quad (22)$$

Comme on peut vérifier, pour « r » égal à zéro (le taux d'escompte est nul) on retombe sur le résultat attendu que la lâchure optimale est un débit constant, qui est tout simplement la disponibilité totale divisée par l'horizon de temps. L'Eq.(22) montre que dans des conditions de taux d'escompte non nul, la lâchure doit décroître linéairement avec le temps. Naturellement la solution est seulement

valable si l'on ne touche pas une borne sur le stock. Essayons de donner une expression graphique à ce résultat mathématique. Au lieu de tracer le volume cumulé des lâchures en fonction du temps, on trace le bénéfice marginal cumulé en fonction du temps. C'est-à-dire au lieu de tracer :

$$X(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (23a)$$

on trace la fonction :

$$\Lambda(t) = \int_0^t b[x(\tau), \tau] d\tau \quad (23b)$$

Il est évident que dans le domaine (t, Λ) , pour une solution intérieure, l'image de la ressource marginale cumulée sera une ligne droite puisque sa pente « b » est constante. Pour les deux politiques extrêmes « garder-le-réservoir-plein » et « garder-le-réservoir-vide » les courbes de Λ sont parfaitement définies. Il suffit dans l'Eq.(23b) de remplacer $x(t)$ par $q(t)$, le flux amont entrant dans le réservoir. Le problème restant (qui est loin d'être trivial) est de choisir la distance entre les deux politiques extrêmes dans ce domaine de « l'utilité marginale cumulée ». Dans le domaine physique, celui des lâchures cumulées, le problème est simple car cette distance est la capacité du réservoir. Dans le domaine économique, c'est la valeur économique de cette capacité, qui malheureusement dépend de la politique de lâchure et n'est donc pas connue *a priori*. Au mieux peut on l'estimer au départ d'une manière raisonnable mais il faudra par la suite se rapprocher peu à peu de sa valeur en trajectoire optimale.

3.3.3 Les enseignements de cette illustration

La condition d'optimalité fait intervenir la fonction économique par des règles simples sur la valeur marginale. Si l'on examine l'Eq.(20) qui donne la relation fonctionnelle pour la lâchure optimale, on voit que les aspects physiques du problème n'interviennent qu'indirectement et de manière intégrée par le biais de la valeur constante de λ . Par contre la faisabilité fait intervenir les aspects physiques du problème. Le domaine physique des lâchures cumulées est le domaine privilégié pour les contraintes sur le stock et sur les lâchures. Le domaine économique (ou marginal) est privilégié vis-à-vis de la « **contrainte d'optimalité** ». Dans le cas où la valeur marginale n'est fonction que de la lâchure (cas d'application de la méthode de Varlet) il se trouve que les deux domaines sont confondus. Sorti de ce cas là, les deux domaines ne se confondent plus et la méthode graphique sur les lâchures cumulées n'est plus valable. La question se pose alors de savoir dans quel domaine il vaut mieux travailler pour arriver à la solution optimale le plus rapidement possible. La réponse est claire : dans le domaine marginal car la fonction $\lambda(t)$ est constante sur la plus grande partie de l'horizon de temps tandis que la lâchure n'est pratiquement jamais constante. Ceci est spécialement important lorsque le problème est résolu numériquement. La procédure est donc de supposer une solution complètement intérieure vérifiant la contrainte d'optimalité. Ensuite l'on vérifie si les contraintes sur le stock sont satisfaites ou non. Si oui, on a la solution. Si non, on fait machine arrière et comme on a trouvé où la contrainte de stock est la plus sérieusement violée, on connaît le centre de la plage qui repose sur la borne. Analytiquement, ou dans le cas général par essais successifs, on détermine les moments qui délimitent l'étendue de cette plage en l'élargissant petit à petit jusqu'à ce que la contrainte ne soit plus violée. S'il n'y avait

qu'une violation, on a la solution. S'il subsiste encore une violation de la contrainte sur le stock ailleurs, alors on suit la même procédure pour éliminer cette autre violation, et ainsi de suite.

Au vu de ces enseignements, nous pouvons maintenant passer aux cas plus réalistes et mathématiquement plus complexes. Heureusement grâce à l'interprétation des valeurs marginales les résultats sont assez intuitifs.

4 – LE CAS OÙ LE COÛT EST ÉVALUÉ EN AVAL DU POINT DE LÂCHURE

4.1 Définition du problème

Il s'agit toujours de choisir la valeur du débit de lâchure au droit d'un ou de plusieurs barrages. Dans cet article nous ne discutons que le cas d'un seul barrage. D'une manière pratique on veut gérer le barrage pour réduire la sévérité des crues et des étiages. La figure 1 illustre la géométrie de ce problème dans le cas d'un seul réservoir avec plusieurs points objectifs sur la rivière, les points B, E, F, etc. Comme en pratique la distance entre le point de dérivation D pour le canal d'amenée et le point de restitution A est faible par rapport aux distances AB, AE et AF, on définit le débit instantané de la lâchure nette $x(t)$ comme la différence entre le débit de restitution et le débit d'amenée, et nous l'appellerons tout simplement la lâchure. De manière pratique les points D et A coïncident et l'on appelle $q_A(t)$ le débit de la rivière au temps t juste en amont du point de restitution de la lâchure (nette). Le débit en aval de A est la somme de $q_A(t)$, le débit incontrôlé de la rivière, et de la lâchure $x(t)$. En B (et de manière générale en E, F, etc.), le débit est $q_B(t)$, le résultat de la propagation du débit amont [$q_A(t) + x(t)$] de A en B et des contributions latérales tout le long du segment de rivière AB, soit $q_{LB}(t)$. Il y a donc en B une contribution au débit que l'on peut appeler le débit « naturel », c'est-à-dire la propagation de $q_A(t)$ de A en B plus la contribution latérale $q_{LB}(t)$. Il existe une contribution contrôlée qui est la propagation de $x(t)$ de A en B.

Nous supposons qu'il existe un modèle (hydrologique) du comportement des bassins versants qui permet de définir l'hydrogramme $q_A(t)$ et de même l'hydrogramme $q_{LB}(t)$. La structure de ce (ou ces) modèle(s) n'a pas d'importance quant à la démarche poursuivie ici. Par contre nous supposons que la propagation d'un débit de A à B peut se représenter sous la forme d'une convolution, où $k_B(t)$ est l'hydrogramme unitaire instantané de propagation des débits de A en B, soit :

$$q_B(t) = \int_0^t k_B(t-\tau)[q_A(\tau) + x(\tau)]d\tau \quad (24)$$

c'est-à-dire que l'on peut traiter le système comme se comportant de manière linéaire invariant dans le temps, tout au moins en première approximation pour des débits dans la gamme des valeurs résultant d'une gestion réaliste.

4.2 La fonction objectif

Nous supposons que l'on peut exprimer les dégâts occasionnés par une inondation en B comme un coût lié au débit en B, $q_B(t)$. Il s'agit du coût instantané dû

au débit instantané $q_B(t)$ et nous appellerons cette fonction $F_B[q_B(t)]$. Si le critère de gestion est uniquement la protection contre les crues en B sur un horizon de temps $(0, T)$ alors la gestion optimale serait celle qui minimise l'objectif, J, intégrale dans le temps des coûts instantanés, de manière symbolique :

$$\text{Min. } \left\{ J = \int_0^T F_B[t, q_B(t)] dt \right\} \tag{25}$$

$x(t)$

Dans l'éq.(25) on a indiqué que le coût peut avoir un caractère saisonnier. Une inondation due à un certain débit, disons 160 m^3 par seconde, n'a pas forcément le même coût en hiver qu'en été, par exemple si les terrains inondés sont agricoles. La structure de la fonction F (sa forme analytique par exemple, linéaire, quadratique, exponentielle, etc.) n'a pas d'incidence sur la démarche suivie. Par contre on supposera qu'elle suit la loi « économique » du coût marginal croissant, autrement dit la fonction F est convexe dans la gamme des débits débordants.

4.3 Les contraintes et les équations d'état

Les contraintes exprimées par les équations (7) à (9) s'appliquent toujours. En plus le débit en B est lié aux débits amonts et latéraux par la relation :

$$q_B(t) = \int_0^t k_B(t-\tau)[q_A(\tau) + x(\tau)]d\tau + q_{BL}(t) \tag{26}$$

Remarquons qu'il existe toujours un débit amont « fictif » $q_{Aa}(\tau)$ tel que :

$$q_{BL}(t) = \int_0^t k_B(t-\tau)q_{Aa}(\tau)d\tau \tag{27}$$

et que par suite on peut écrire l'Éq.(26) sous la forme :

$$q_B(t) = \int_0^t k_B(t-\tau)[q_{Aa}(\tau) + q_A(\tau) + x(\tau)]d\tau$$

ou encore en posant :

$$q_{Aa}(\tau) + q_A(\tau) = q_A^*(\tau) \tag{28}$$

$$q_B(t) = \int_0^t k_B(t-\tau)[q_A^*(\tau) + x(\tau)]d\tau = q_{BN}(t) + q_{Bx}(t) \tag{29}$$

où $q_{BN}(t)$ est le débit naturel en B au temps t et $q_{Bx}(t)$ est la « variation » par rapport au débit naturel due à la présence et à la gestion du réservoir. Au temps zéro la rivière n'est pas en équilibre et il existe une condition initiale de débit. On peut toujours simuler une condition initiale comme le résultat de débits amonts passés précédant le temps initial dans l'intervalle $(-M, 0)$ où M est la mémoire du système de propagation de A vers B. Donc de manière générale, on réécrira l'Éq.(29) comme :

$$q_B(t) = \int_{-M}^t k_B(t-\tau)[q_A^*(\tau) + x(\tau)]d\tau \tag{30}$$

Rappelons que si l'argument u de $k(u)$ est négatif ou supérieur à M, la valeur de $k(u)$, le noyau de convolution, est identiquement nulle.

Nous allons maintenant donner deux dérivations de la condition d'optimalité, l'une plus intuitive, mais parfaitement rigoureuse, par raisonnement économique et l'autre plus mathématique.

4.4 Raisonnement économique

Nous reprenons le raisonnement de la section 3.1. Considérons une lâchure unitaire instantanée au temps t_1 . Cette lâchure donnera à l'aval un débit sur une durée finie étalée selon la mémoire, M , de l'hydrogramme unitaire instantané de propagation du point de lâchure au point B aval, $k_B(t - t_1)$ à tout temps t dans l'intervalle $t_1 \leq t \leq t_1 + M$. Au temps t la valeur marginale au point aval est $\frac{\partial F_B[t, q_B(t)]}{\partial q_B}$ et à cet instant t le débit résultant de la lâchure unitaire sera seule-

ment $k_B(t - t_1)$. Sa contribution à la valeur marginale sera $\frac{\partial F_B[t, q_B(t)]}{\partial q_B} k_B(t - t_1)$.

Mais il y aura contribution sur tout l'intervalle de temps : $t_1 \leq t \leq t_1 + M$. La contribution totale de la lâchure unitaire au temps t_1 sera donc l'intégrale dans le temps, que nous appellerons la valeur marginale future de la lâchure, vmf , au temps t_1 , soit :

$$vmf(t_1) = \int_{t_1}^{t_1+M} \frac{\partial F_B[t, q_B(t)]}{\partial q_B} k_B(t - t_1) dt \quad (31)$$

Comme la quantité d'eau disponible est limitée, la lâchure supplémentaire au temps t_1 devra être compensée par une réduction égale de lâchure à un temps t_2 plus tard. Le gain net sera donc la différence : $\Delta vmf = vmf(t_1) - vmf(t_2)$. Si la solution qu'on vient de perturber était vraiment optimale il n'est pas possible d'augmenter le gain ou de réduire le coût. On en conclut qu'en gestion optimale $vmf(t_1)$ doit être égal à $vmf(t_2)$ et comme ces temps étaient arbitraires, la condition d'optimalité est que la valeur marginale future de la lâchure soit constante dans le temps ou mathématiquement que $q_B(t)$ soit tel que :

$$\int_{t_1}^{t_1+M} \frac{\partial F_B[\tau, q_B(\tau)]}{\partial q_B} k_B(\tau - t) d\tau = \lambda \quad (32)$$

où λ est une constante. Bien sûr ce résultat n'est valable qu'en régime libre. Pour que garder le réservoir plein soit une gestion optimale il faut que le coût marginal futur décroisse avec le temps, car il y a intérêt alors à garder les débits entrant au maximum pour lâcher plus tard quand le coût marginal futur aura diminué.

4.5 La procédure mathématique

Nous allons maintenant obtenir le même résultat par le Calcul des Variations sous contraintes. Dans le cas d'un seul réservoir et d'un seul point objectif le Lagrangien est :

$$L = \int_0^T F_B[t, q_B(t)] dt + \int_0^T \frac{d\lambda(t)}{dt} \left\{ \int_0^t (x(\tau) d\tau + s(t) - s_i) \right\} dt \quad (33)$$

Intégration par parties de la deuxième intégrale donne :

$$L = \int_0^T F_B[t, q_B(t)] dt + \left[\lambda(t) \int_0^t x(\tau) d\tau \right] \Big|_0^T - \int_0^T \lambda(t) x(t) dt + \int_0^T \frac{d\lambda}{dt} (s - s_i) dt \quad (34)$$

Il faut minimiser le Lagrangien par rapport à la fonction inconnue $x(t)$. On cherche les conditions que doivent satisfaire $x(t)$ pour que pour toute variation faisable $\delta x(t)$, la variation du Lagrangien, δL , reste ≥ 0 . Procédant comme auparavant on obtient :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^T \frac{\partial F_B}{\partial q_B}[t, q_B(t)] \delta q_B dt + \left[\lambda(t) \int_0^t \delta x(\tau) d\tau \right] \Big|_0^T \\ & - \int_0^T \lambda(t) \delta x(t) dt + \int_0^T \frac{d\lambda}{dt} \delta s dt \end{aligned} \quad (35)$$

Les conditions initiales et finales de stock étant données (ce que nous supposons) une variation réalisable sur x , δx , doit satisfaire la condition :

$$\int_0^T \delta x(t) dt = 0 \quad (36)$$

De ce fait le terme entre crochet disparaît et explicitant q_B en termes de x , on obtient :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^T \frac{\partial F_B}{\partial q_B}[t, q_B(t)] \left\{ \int_0^t k_B(t - \tau) \delta x(\tau) d\tau \right\} dt \\ & - \int_0^T \lambda(t) \delta x(t) dt + \int_0^T \frac{d\lambda}{dt} \delta s dt \end{aligned} \quad (37)$$

Comme $k_B(t - \tau)$ est zéro pour $\tau \geq t$, on peut prendre T comme limite supérieure d'intégration dans l'intégrale interne. Changeant l'ordre d'intégration on peut écrire :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^T \left\{ \int_0^T \frac{\partial F_B}{\partial q_B}[t, q_B(t)] k_B(t - \tau) dt \right\} \delta x(\tau) d\tau \\ & - \int_0^T \lambda(t) \delta x(t) dt + \int_0^T \frac{d\lambda(t)}{dt} \delta s(t) dt \end{aligned} \quad (38)$$

Dans la double intégrale on peut changer les symboles des variables d'intégration et remplaçant t par τ et τ par t , on obtient après regroupement de termes :

$$\delta L = \int_0^T \left\{ \int_0^T \frac{\partial F_B}{\partial q_B}[\tau, q_B(\tau)] k_B(\tau - t) d\tau - \lambda(t) \right\} \delta x(t) dt + \int_0^T \frac{d\lambda(t)}{dt} \delta s(t) dt \quad (39)$$

4.5.1 Solution optimale en régime libre

On dit que l'on est en régime libre si la solution ne touche aucune contrainte, donc par exemple $s > s_m$ et $s < s_M$. Dans ce cas δs peut être positif ou négatif. Examinant le dernier terme au deuxième membre de l'éq.(42) on voit que pour

que δL ne puisse être négatif il faut que $\frac{d\lambda}{dt} = 0$. En régime libre λ ne varie pas avec le temps. Le même raisonnement indique qu'en régime libre (donc $x_m < x(t) < x_M$) il faut que la condition :

$$\int_0^T \frac{\partial F_B}{\partial q_B}[\tau, q_B(\tau)] k_B(\tau - t) d\tau = \lambda \quad (40)$$

soit satisfaite à tout temps t . Vue la structure du noyau $k(\cdot)$, on peut réécrire cette dernière condition sous la forme plus parlante :

$$\int_t^{t+M} \frac{\partial F_B}{\partial q_B}[\tau, q_B(\tau)] k_B(\tau - t) d\tau = \lambda = \text{constante} \quad (41)$$

(Cette forme n'est pas exactement équivalente à l'équation (40) car la limite supérieure doit être rigoureusement le minimum de $t + M$ et T , où M est la mémoire du système, pour la propagation d'un signal de A à B . La différence est négligeable pour un horizon important car elle n'a d'influence que sur l'intervalle de temps $T - M$ à T , mais est significative pour des horizons courts). L'intégrale a une signification économique claire. C'est la valeur marginale d'une lâchure faite au temps t , et cette valeur marginale est l'intégrale dans le temps futur des valeurs margi-

nales $\frac{\partial F_B}{\partial q_B}$ pondérées par le noyau de convolution de la propagation car bien évi-

demment une impulsion unitaire de lâchure au temps t crée une variation sur $q_B(t)$ au temps τ égale à $k_B(\tau - t)$. Cette condition pour la gestion optimale généralise le résultat de MASSÉ (1946). En effet, dans ses travaux MASSÉ était intéressé par la valeur de la lâchure elle-même pour la production d'énergie hydroélectrique. Il avait donc trouvé qu'en gestion optimale la valeur marginale de la lâchure doit rester constante dans le temps et dans son cas $q_B = x$. Posant donc

$\frac{\partial F_B}{\partial q_B} = b$, il faut en gestion optimale que b reste constant dans le temps. On

retrouve bien ce résultat par l'éq.(41) en prenant pour le noyau $k_B(\cdot)$ une fonction delta de Dirac, qui est bien la limite de l'hydrogramme unitaire instantané $k_B(\cdot)$ quand le point B coïncide avec le point A .

On montre d'ailleurs facilement que dans le cas d'un seul point objectif, la condition (41) est réalisée si :

$$\frac{\partial F_B}{\partial q_B}[t, q_B(t)] = \lambda \quad (42)$$

En effet, si $\frac{\partial F_B}{\partial q_B}[\tau, q_B(\tau)]$ est une constante, C , l'éq.(41) donne :

$$C \int_t^{t+M} k_B(\tau - t) d\tau = C K_B(u) \Big|_0^M = C = \lambda$$

où $K_B(t)$ est la réponse du système à un palier unitaire (l'intégrale dans le temps de l'hydrogramme unitaire instantané, aussi dite « courbe en S ») et pour un système conservatif $K(0) = 0$ et $K(M) = 1$. Par contre, ce résultat n'est pas générali-

sable à plusieurs points objectifs, mais l'éq. (41) s'applique toujours. Dans le cas où la valeur marginale $b = \frac{\partial F_B}{\partial q_B}$ dépend seulement de q_B et pas du temps, la constance de la valeur marginale (coût ou bénéfice marginal) implique la constance de q_B (et de la lâchure seulement dans le cas où le bénéfice est évalué au point de lâchure). La gestion optimale est donc d'opérer en régime permanent (régularisation des débits).

4.5.2 Solution optimale en régime bloqué

Supposons que la solution bute sur une contrainte, c'est-à-dire que par exemple sur un intervalle de temps le réservoir soit plein, donc $s(t) = S_M$ pendant cet intervalle de temps. Dans ce cas la seule variation possible pour s est $\delta s \leq 0$ (on peut vider mais on ne peut remplir plus). Dans ce cas pour empêcher que δL soit négatif il faut que $\frac{d\lambda}{dt}$ soit négatif. Une gestion qui garderait le réservoir plein pendant une certaine période de temps ne peut être optimale que si pendant cette période le coût marginal décroît dans le temps. À l'inverse pour une gestion qui garderait le réservoir vide.

Supposons que la solution bute sur la contrainte $x = x_M$. Donc pendant cette période la lâchure est à sa capacité maximum. Comme alors la seule variation possible pour x est $\delta x \leq 0$, d'après l'éq.(39) il s'ensuit que pour cette période garder la lâchure à son maximum n'est optimal que si la valeur marginale de la lâchure est inférieure à ce qu'elle est en régime libre, symboliquement :

$$\int_t^{t+M} \frac{\partial F_B}{\partial q_B}[\tau, q_B(\tau)]k_B(\tau-t)d\tau \leq \lambda \quad (43)$$

C'est l'inverse pour une gestion qui lâche au débit minimum imposé.

4.6 La règle du « fil tendu » généralisée

Nous ne répéterons pas ici la discussion présentée à la section 3.3.1 et nous faisons référence à nouveau à la figure 2. Comme l'objectif est de se protéger contre les crues, on voit d'après la trajectoire optimale qu'il faut vider partiellement le réservoir à l'approche de la crue. Le réservoir est plein en A quand la pointe de la première crue est déjà passée. Pour la deuxième crue, on a presque vidé totalement le réservoir pour le remplir en C mais après le passage de la pointe de la deuxième crue. La gestion optimale anticipe les crues et vide le réservoir avant l'arrivée de la pointe de la crue. Naturellement tout ceci est facile en avenir déterminé quand on connaît le futur. Il est clair qu'en avenir incertain une bonne gestion dépendra pour une large part d'une bonne prévision des crues. Nous discuterons ce sujet dans un article suivant.

La condition d'optimalité présentée par les éqs.(40) ou (41) montre que la solution du fil tendu est généralisable bien au-delà du cas où le débit d'intérêt est au droit de la lâchure et où le coût (ou le bénéfice) marginal varie seulement en fonction du débit et non également en fonction du temps. En effet sa base est le fait simple qu'en régime libre (comme λ est constant) l'intégrale de la valeur marginale dans le temps est une ligne droite si on prend le temps en abscisse. Par

suite si l'on prend en ordonnée la valeur cumulée :

$$Z(t) = \int_0^t \left\{ \int_{\tau}^{\tau+M} \frac{\partial F_B}{\partial q_B} [u, q_B(u)] k_B(u-\tau) du \right\} d\tau \quad (44)$$

l'image de la trajectoire dans le domaine $[t, Z(t)]$ est une ligne droite en régime libre. En régime bloqué supérieur la pente de $Z(t)$ doit diminuer avec le temps et c'est l'inverse en régime bloqué inférieur. Par conséquent, on peut construire un graphique analogue à celui de la figure 2. Connaissant les débits d'apport $q_A(\theta)$ pour $-M \leq \theta \leq T$, on peut calculer les $q_B(u)$ d'après la formule :

$$q_B(u) = \int_{-M}^u k_B(u-\theta) q_A(\theta) d\theta \quad (45)$$

et l'on peut ensuite calculer l'intégrale intérieure dans l'éq.(44) puis l'intégrale extérieure, car tout est connu. Il reste à définir la « distance » entre les deux trajectoires (réservoir toujours vide et réservoir toujours plein). Mais là le problème reste entier, car cette distance dépendra de la solution optimale, qui n'est pas connue *a priori*. Par suite de manière pratique nous devons poursuivre la procédure de manière algébrique, mais l'interprétation dans le domaine économique reste la plus parlante.

5 – GÉNÉRALISATIONS POUR UNE SEULE RIVIÈRE

5.1 Cas de plusieurs fonctions objectifs en un point objectif

Par exemple au point B, sur la figure 1, on peut avoir un objectif de protection à la fois contre les crues et contre les étiages sévères (e.g. pour l'alimentation en eau potable). Soit $E_B[t, q_B(t)]$ le coût associé au manque d'eau. Cette fonction croît rapidement quand q_B diminue. Les résultats précédents s'appliquent sans grand changement car il suffit de remplacer $\frac{\partial F_B}{\partial q_B}$ dans les équations par

$$\frac{\partial F_B}{\partial q_B} + \frac{\partial E_B}{\partial q_B}.$$

5.2 Cas d'une seule fonction objectif avec plusieurs points objectifs

En plus du point B, la fonction objectif doit être évaluée en d'autres points. Soit $\omega = 1, 2, \dots, \Omega$ l'indice de tous ces points. La généralisation pour ce cas de l'éq.(44) est :

$$\sum_{\omega=1}^{\Omega} \int_t^{t+M_{\omega}} \frac{\partial F_{\omega}}{\partial q_{\omega}} [\tau, q_{\omega}(\tau)] k_{\omega}(\tau-t) d\tau = \lambda \quad (46)$$

F_{ω} étant la fonction objectif au point ω , q_{ω} le débit dans la rivière au point ω et $k_{\omega}(\cdot)$ le noyau de convolution depuis le point amont A jusqu'au point objectif. Par

contre il n'est plus possible de satisfaire l'éq.(42) en prenant les $\frac{\partial F_\omega}{\partial q_\omega}$ constants car ils dépendent tous de la seule lâchure $x(t)$ et l'on ne pourrait régulariser tous les débits $q_\omega(t)$ par la régularisation de $x(t)$ que dans le cas exceptionnel où il n'y aurait aucun apport latéral tout le long de la rivière. Par contre, en principe, la solution du fil tendu s'applique toujours si l'on généralise la définition de $Z(t)$ à la forme :

$$Z(t) = \int_0^t \left[\sum_{\omega=1}^{\Omega} \left\{ \int_{\tau}^{\tau+M_\omega} \frac{\partial F_\omega}{\partial q_\omega} [u, q_\omega(u)] k_\omega(u-\tau) du \right\} \right] d\tau \quad (47)$$

puisque en régime libre $Z(t)$ est une fonction linéaire du temps et donne une ligne droite dans le plan $[t, Z(t)]$. En régime bloqué, la pente de $Z(t)$ doit évoluer dans le temps d'une manière bien définie, qui correspond à la notion du fil tendu, la solution collant sur certaines parties concaves ou convexes (voir *figure 2*) des limites du domaine possible.

5.3 Cas de plusieurs fonctions objectifs en plusieurs points objectifs

Il suffit dans l'éq.(46) de remplacer les $\frac{\partial F_\omega}{\partial q_\omega}$ par $\left(\frac{\partial F_\omega}{\partial q_\omega} + \frac{\partial E_\omega}{\partial q_\omega} + \dots \right)$ où $F, E,$ etc. sont des fonctions objectifs (F pour les crues, E pour les étiages, etc.).

6 – ILLUSTRATIONS POUR UNE SEULE RIVIÈRE

6.1 Illustration numérique pour une rivière, un barrage et deux point-cibles

Le cas d'un seul point-cible n'est pas très intéressant car la valeur du débit en ce point est alors constante. Par suite nous passons tout de suite au cas de deux point-objectifs. Bien sur la mise en œuvre des conditions d'optimalité requiert la conversion des équations sous forme algébrique discrète et le développement d'un logiciel, qui, dans ce cas particulier a été écrit en FORTRAN. Ces procédures seront éventuellement décrites dans d'autres articles et font déjà partie d'un rapport (MOREL-SEYTOUX, 1997).

6.2 Données-Premier cas

Comme fonction objectif nous prenons pour F la fonction simple $\frac{q^2}{2}$. Par suite l'expression pour la valeur marginale est simplement q . Les données pour ce cas de deux point-cibles sont inscrites dans le tableau 1.

Les deux premières lignes fournissent respectivement, pour les point-cibles 1 et 2, d'abord leur indice, puis la mémoire de l'hydrogramme unitaire de propagation, et enfin ses ordonnées. Comme la mémoire pour le point-cible 1 est 2, à part

Tableau 1 Données pour le cas de deux point-cibles et d'un seul réservoir.**Table 1** Data for the case of two objective points and a single reservoir.

1	2	0,800	0,200	0,000	0,000	0,000				
2	4	0,000	0,200	0,600	0,200	0,000				
		0,01	100,0	500,0	900,0					
		120,0	160,0	220,0	240,0	200,0	160,0	130,0	110,0	100,0
		180,0	260,0	380,0	340,0	300,0	220,0	180,0	150,0	120,0
		120,0	160,0	220,0	240,0	200,0	160,0	130,0	110,0	100,0
		180,0	260,0	380,0	340,0	300,0	220,0	180,0	150,0	120,0
		40,0	30,0	10,0	0,0	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0
		40,0	50,0	60,0	30,0	15,0	10,0	20,0	30,0	40,0
		40,0	30,0	10,0	0,0	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0
		40,0	50,0	60,0	30,0	15,0	10,0	20,0	30,0	40,0
		40,0	30,0	10,0	0,0	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0
		40,0	50,0	60,0	30,0	15,0	10,0	20,0	30,0	40,0
		40,0	30,0	10,0	0,0	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0
		40,0	50,0	60,0	30,0	15,0	10,0	20,0	30,0	40,0

les deux premières valeurs (0,8 et 0,2) toutes les autres sont nulles. De même pour le point-cible 2, comme la mémoire est 4, la cinquième valeur est nulle, etc. Le point 2 étant plus en aval son hydrogramme est plus étiré dans le temps et amorti. La troisième ligne fournit le stock minimum, son maximum, le stock initial puis le stock final. Les 4 lignes suivantes fournissent 40 valeurs journalières des débits juste en amont du canal d'amenée. Les 4 lignes suivantes fournissent les débits tributaires au point cible 1 et les 4 suivantes au point cible 2. La gestion a été faite sur 28 jours. La figure 3 compare l'hydrogramme naturel au point-cible 2, le plus en aval, l'hydrogramme résultant d'une gestion à lâchure uniforme et celui résultant de la gestion optimale en ce même point. Il est clair que la gestion « uniforme » n'écrête qu'un peu la crue la plus importante. Par contre la gestion optimale atténue de manière significative cette crue. Par rapport au cas où un seul point cible est considéré, la gestion optimale ne fournit plus un débit complètement régularisé.

6.3 Données-Deuxième cas

Nous changeons seulement la capacité du réservoir et nous la réduisons à 950 unités au lieu de 1 100. La solution obtenue précédemment n'est plus réalisable car la capacité du réservoir est dépassée sur plusieurs périodes. Il est évident au regard de la figure 5 que la gestion n'est plus entièrement en régime libre. On voit sur la figure 5 que l'horizon est divisé en 5 zones dont 2 en régime bloqué, durant les intervalles des jours 16 à 20 et à nouveau 25 à 27. On voit sur la figure 4 par comparaison avec la figure 3 que la perte de capacité rend la tâche de régulation plus difficile, mais l'hydrogramme avec gestion optimale reste bien supérieur à la gestion avec prise uniforme.

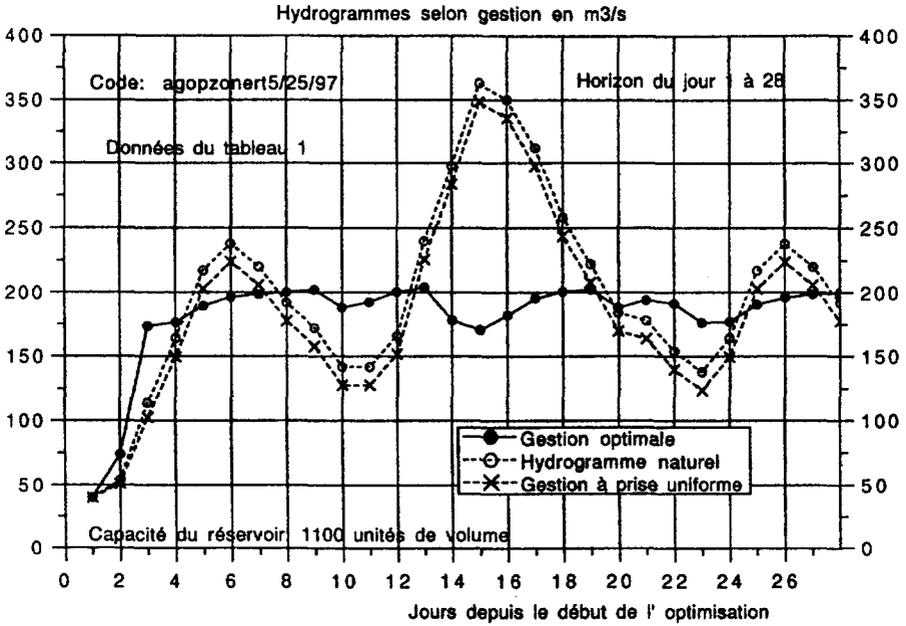


Figure 3 Hydrogrammes au point-cible # 2.
Hydrographs at target point # 2.

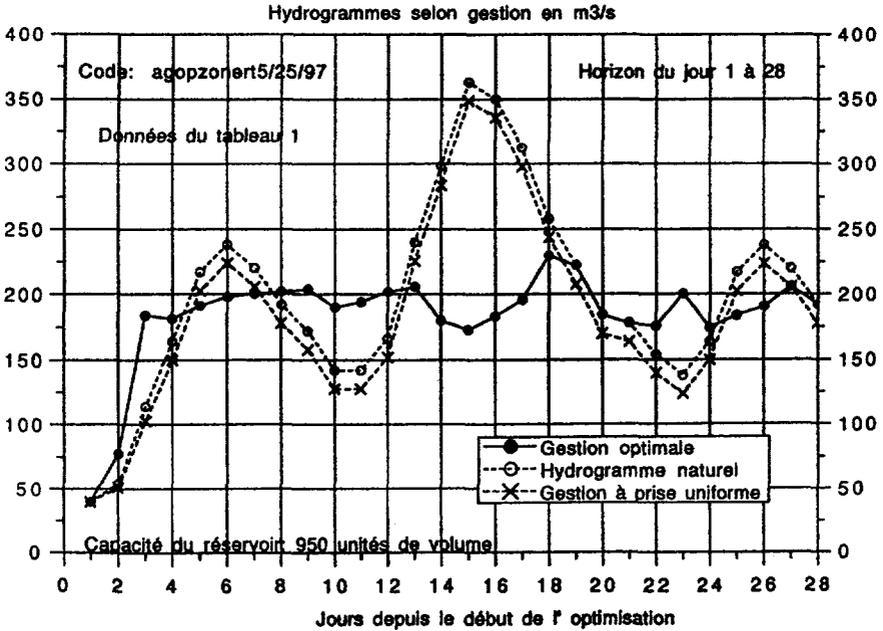


Figure 4 Hydrogrammes au point-cible # 2.
Hydrographs at target point # 2.

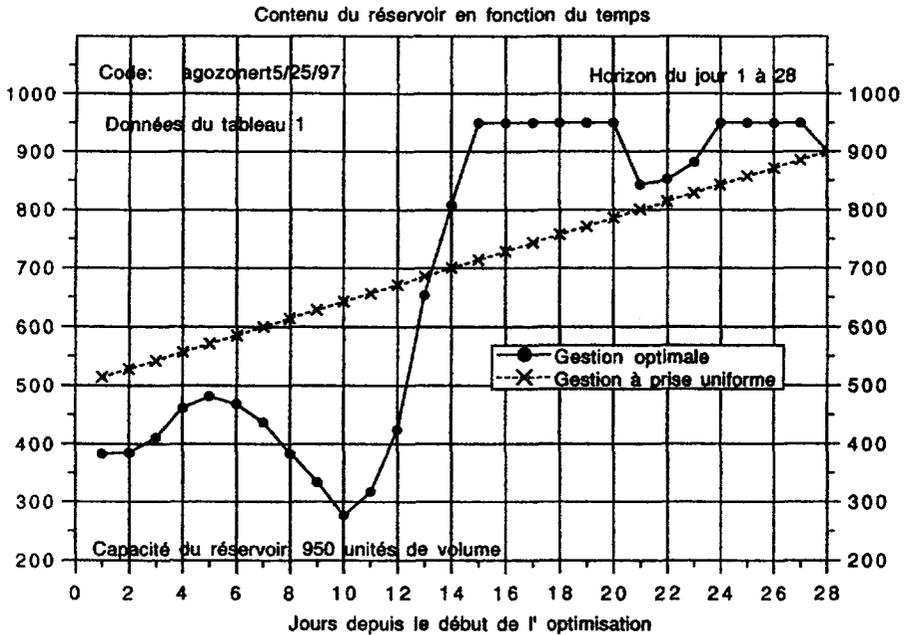


Figure 5 Évolution du Stock.
Reservoir content evolution with time.

7 – BRÈVE REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

GRYGIER et STEDINGER (1985) comparent plusieurs méthodes de formulation du problème d'exploitation de barrages (dont Dynamic Programming) et les algorithmes de calcul associés. Ils concluent que la formulation par « Optimal Control Theory » est celle qui fournit la meilleure solution du point de vue de la précision et de la rapidité des calculs. KLEMES (1979) avait conclu pareillement. Ils notent que cette formulation avait été utilisée par différents auteurs mais de manière incomplète car « Except for Laufer and MOREL-SEYTOUX (1979) and LANNA (1980), previous hydropower optimal control réservoir operations optimization algorithms have replaced constraints on state variables by penalty functions » (GRYGIER et STEDINGER, 1985, page 2). Ils continuent plus loin (page 3) : « LAUFER (1977), LAUFER and MOREL-SEYTOUX (1979), and LANNA (1980) also consider optimal control Lagrange multiplier approaches which explicitly deal with state variable constraints ». Autrement dit, GRYGIER et STEDINGER, dans leur approche, reprennent, sans grand changement, l'analyse de LAUFER et MOREL-SEYTOUX (L&M). Il y avait tout de même une différence. L&M « in their formulation of the Kuhn-Tucker conditions, neglect possible derivative of benefit function with respect to storage terms ». Effectivement dans leur problème cette dérivée était négligeable, mais ce n'est pas nécessairement toujours le cas. La formulation de

GRYGIER et STEDINGER (G&S) est plus complète dans ce sens. Néanmoins L&M avaient montré l'équivalence entre les conditions de KUHN-TUCKER et la forme discrétisée des conditions d'optimalité dérivées d'« Optimal Control Theory ». G&S ajoutent que L&M « employ a smooth invertible B function. As a result, their algorithm yielded almost closed form solutions for single réservoir operations ». Alors que l'algorithme de calcul de G&S est formellement plus complet dans le cas où la dérivée du bénéfice par rapport au stock n'est pas négligeable, en revanche il est beaucoup moins efficace que celui de L&M. Or dans le cas présent ce terme est identiquement nul car il ne s'agit pas de bénéfice associé à la production d'énergie. Plus fondamentalement l'algorithme proposé par G&S ne tient pas compte du tout des temps de propagation entre réservoirs et le bénéfice est évalué aux points de lâchure, pas du tout en des points qui peuvent être très en aval des barrages. Il y a deux autres différences. G&S discrétisent le temps dans leur formulation et puis dérivent sous forme algébrique les conditions d'optimalité. Ici la formulation du problème et la condition d'optimalité sont obtenues toutes deux **de manière continue dans le temps**. La discrétisation n'intervient qu'au niveau de l'algorithme de calcul pour les conditions d'optimalité. Par suite la possibilité d'obtenir des solutions analytiques quasiment exactes n'a pas été exclue *ab initio* de par la formulation du problème. Enfin on peut également signaler que dans cet article on n'utilise pas les contraintes sous forme différentielle mais sous forme intégrale. Cela a de nombreux avantages en particulier pour la stabilité des algorithmes de calcul, spécialement si couplés avec des solutions quasi-analytiques ou partiellement analytiques. En plus cela permet l'élimination explicite de certaines contraintes, avec la réduction résultante du nombre d'équations d'état et de multiplicateurs de Lagrange et donc de la dimension du problème.

Dans des articles plus récents (READ, 1989 ; READ et BOSHIER, 1989) les auteurs s'inspirent aussi du travail de base de MASSÉ dans le cas d'un avenir incertain. Ils disent : « The iterative method used here was based on that of Stage and Larsson (1961) and Lindquist (1962), following early work on « Marginal Expectations » by MASSÉ (1946). LANNA (1982) has recently provided a more formal statement of this theory, which we refer to as "Marginal SD" ». (L'auteur de cet article est responsable pour les caractères en italiques). Il est certain que la procédure de MASSÉ est particulièrement applicable en avenir incertain vu, comme nous l'avons déjà signalé, qu'il est l'inventeur de DP. Une description de cette théorie est fournie dans un article antérieur (MOREL-SEYTOUX, 1976). Par contre dans ces articles (READ, 1989 ; READ et BOSHIER, 1989) on ne s'attaque pas au problème qui nous concerne ici, à savoir le cas où la fonction objectif est évaluée en aval du point de lâchure, et enfin le problème est discrétisé dans le temps dès sa formulation.

8 – CONCLUSIONS

Dans cet article nous avons simplement pu jeter les bases d'une procédure d'optimisation pour la gestion de plusieurs réservoirs, gérés conjointement, en nous limitant à des fins pédagogiques pour le moment au cas d'un seul réservoir. Mais, même dans ce cas, on a pu étendre les résultats de MASSÉ à la situation où

la fonction objectif est évaluée en aval du point de lâchure et au cas où il y a plusieurs point-cibles. Le résultat fondamental est qu'en régime libre, la gestion optimale est celle qui maintient la « **valeur marginale future intégrale** » **constante dans le temps**, soit mathématiquement pour plusieurs point-cibles :

$$\sum_{\omega=1}^{\Omega} \int_t^{t+M_{\omega}} \frac{\partial F_{\omega}}{\partial q_{\omega}}[\tau, q_{\omega}(\tau)] k_{\omega}(\tau-t) d\tau = \lambda = \text{constante}$$

Cette formule, qui définit le concept de la valeur marginale future intégrale, montre bien l'influence à la fois de la fonction objectif et du système de propagation sur la politique de gestion. On a montré également comment ce coût marginal futur doit varier dans le temps pour qu'une gestion qui garde le réservoir vide ou plein pendant certaines périodes puisse être optimale. Dans un article suivant, le cas plus pratique de plusieurs réservoirs sera discuté. Un des avantages de la méthode présentée ici est que : à la fois (1) la formulation et (2) les conditions pour l'optimalité sont décrites de manière continue dans le temps. C'est-à-dire qu'il n'est pas exclu *a priori* que l'on puisse obtenir des solutions analytiques quasi-exactes pour des formes appropriées pour la fonction de bénéfice et les hydrogrammes unitaires instantanés de propagation, comme démontré précédemment dans le cas de la production hydroélectrique (LAUFER et MOREL-SEYTOUX, 1979).

8 – REMERCIEMENTS

L'auteur tient à exprimer ses remerciements aux équipes de l'Institution Interdépartementale des Barrages-Réservoirs du Bassin de la Seine (IIBRBS), en particulier M. Jean-Louis Rizzoli et Alain Romain, et du BCEOM-CEMAGREF, Mireille Raymond, Guy Chevereau et Jean-Baptiste Faure, et à Jean Le Bloas, ingénieur conseil, avec qui j'ai eu le plaisir de coopérer pour l'analyse, le développement et la validation du modèle PEGASE, outil d'aide à la gestion des lacs-réservoirs du bassin de la Seine. Je tiens à remercier l'IIBRBS pour son soutien financier. Enfin l'auteur n'aurait pas pu progresser autant sur ce sujet sans le travail préalable entrepris en coopération avec ses anciens étudiants en doctorat, Frédéric Laufer, Eduardo Lanna et Jorge Restrepo, dans les années 70-80, et plus récemment Xiaoniu Guo (MOREL-SEYTOUX et GUO, 1992) et Chuan-Mian Zhang (MOREL-SEYTOUX *et al.*, 1995).

ANNEXE

Au point de raccordement de la solution intérieure avec le régime bloqué, la lâchure doit être continue

La figure 6 illustre plusieurs courbes qui satisfont les conditions d'optimalité. Par exemple la tangente BA, la droite BM et l'arc MA, et la droite BI et l'arc IA. Le point I correspond au point d'inflexion sur la courbe. Nous allons montrer que le bénéfice entre les temps 0 et T est supérieur le long de la tangente IA à celui obtenu pour une trajectoire voisine telle que droite BM et arc MA. Pour cela nous calculons la variation du Lagrangien par rapport à la trajectoire présumée optimale IA. L'expression de cette variation est donc :

$$\delta L = \int_0^{T-\delta T} B(x - \delta x) dt - \int_0^{T-\delta T} B(x) dt + \int_{T-\delta T}^T [B(q) - B(x)] dt \quad (A1)$$

Procédant comme auparavant avec des développements en série de Taylor et tenant compte du fait que le long des droites BA et BM le bénéfice marginal et la lâchure sont constants :

$$\delta L = -b(x)T\delta x + [B(q) - B(x)]\delta T \quad (A2)$$

De par la conservation de masse les variations δx et δT ne sont pas indépendantes et en particulier comme :

$$xT = \int_0^T q(t) dt + S_i - C \quad (A3)$$

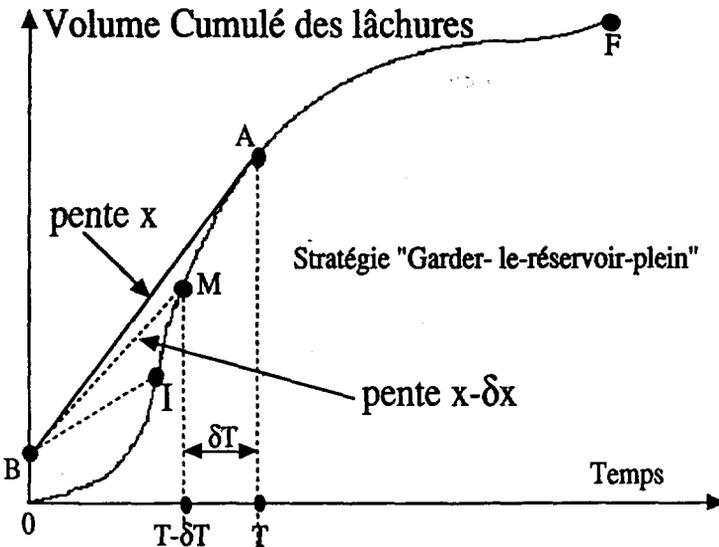


Figure 6 Choix de la solution optimale.
 Choice of the optimal solution.

où S_i et C sont le stock initial et la capacité du réservoir respectivement, nous obtenons la relation entre les variations :

$$T\delta x + x\delta T = q\delta T \tag{A4}$$

L'élimination de la variation de x entre les équations A2 et A4 donne :

$$\delta L = \{-b(x)[q-x] + [B(q) - B(x)]\}\delta T \tag{A5}$$

Pour que remplir le réservoir plus tôt qu'au temps T , donc $\delta T \geq 0$, produise un bénéfice supérieur il faudrait que le terme entre accolades soit positif, ou autrement dit il faudrait que la condition suivante soit remplie :

$$[B(q) - B(x)] > b(x)[q-x] \tag{A6}$$

Comme le problème est de maximiser les bénéfices nous avons donc supposé que la loi du rendement décroissant s'applique. Par conséquent la courbe $B(x)$ est concave comme indiqué sur la figure 7. Pour une fonction concave la courbe est au-dessous de sa tangente en tout point. Par suite la condition (A6) n'est jamais satisfaite, au contraire, et la tangente IA fournit bien la solution optimale. Autrement dit, au point de raccordement pour la solution optimale, la lâchure doit être continue. C'est bien le cas pour le point A sur la figure 6 (et sur la figure 2) mais ce n'est pas le cas pour les points M ou I.

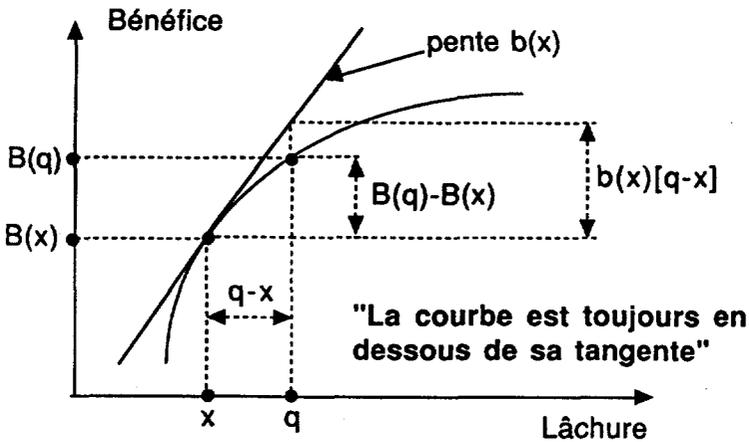


Figure 7 Propriétés d'une fonction concave.
Properties of a concave function.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BELLMAN R.E., 1957. *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 340 pages.
- GRYGIER J.C., STEDINGER J.R., 1985. Algorithms for Optimizing Hydropower System Operation. *Water Resour. Res.*, 21(1), 1-10.
- KLEMES V., 1979. Storage Mass Curve Analysis in a Systems-Analytic Perspective. *Water Resour. Res.*, 15(2), 359-370.
- LANNA A.E., 1982. Engineering Optimization, 6, 51-57.
- LAUFER F., MOREL-SEYTOUX H.J., 1979. « Optimal Weekly Releases from a Seasonal Reservoir, 1, Deterministic Future » *Water Resour. Res.*, 15(2), 383-398.
- MASSÉ P., 1946. Les Réserves et la Régulation de l'Avenir dans la Vie Économique : I. Avenir Déterminé. Hermann & Cie, Publishers, Paris, France, 138 pages.
- MOREL-SEYTOUX H.J., 1976. Optimization and Uncertainty, Chap. 9 dans « *Stochastic Approaches to Water Resources* », vol. 1., H.W. Shen, [Ed.], P.O. Box 606, Fort Collins, Colorado, 1976, 1-37.
- MOREL-SEYTOUX H.J., 1997. Gestion Optimale de Plusieurs Réservoirs en Avenir Déterminé. *HYDROWAR Report # 97.3*, Hydrology Days Publications, 57 Selby Lane, Atherton, CA 94027, 80 pages.
- MOREL-SEYTOUX H.J., GUO X., 1992. Illustrative Calibration of Hydraulic Conductivity with Observations of Head and Solute Concentration. Proc. 12th Annual AGU Hydrology Days, Hydrology Days Publications, 57 Selby Lane, Atherton, CA 94027, 301-321.
- MOREL-SEYTOUX H.J., ZHANG C.M., FLUG M., 1995. An Optimization Computational Technique for Management of Reservoirs for Recreation. Proc. 15th Annual AGU Hydrology Days, Hydrology Days Publications, 57 Selby Lane, Atherton, CA 94027, 185-194.
- READ E.G., 1989. A Dual Approach to Stochastic Dynamic Programming for Reservoir Release Scheduling, dans « *Dynamic Programming for Optimal Water Resources Systems Analysis* », A.O. Esogbue, [Ed.], Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 361-372.
- READ E.G., BOSHIER J.F., 1989. Biases in Stochastic Reservoir Scheduling Models, dans « *Dynamic Programming for Optimal Water Resources Systems Analysis* », A.O. Esogbue, [Ed.], Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 386-397.
- VARLET H., 1923. Étude Graphique des Conditions d'Exploitation d'un Réservoir de Régularisation. Ann. Ponts et Chaussées Mem. Doc., Partie Tech., 93, 61-79.