L'Actualité économique

Ensemble des possibilités de production, fonction de production et fonction de coût : une présentation de la dualité

Josep M. Pla

Volume 64, numéro 3, septembre 1988

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601456ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601456ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Pla, J. M. (1988). Ensemble des possibilités de production, fonction de production et fonction de coût : une présentation de la dualité. *L'Actualité économique*, *64*(3), 416–441. https://doi.org/10.7202/601456ar

Résumé de l'article

L'ensemble des possibilités de production est la représentation première des contraintes technologiques qui font face à une entreprise mono-produit. Sous des hypothèses de régularité de cet ensemble et si le producteur considère les prix comme des données, on construit une fonction de production et une fonction de coût qui contiennent toute l'information économiquement pertinente sur la technologie et on dégage les propriétés minimales que doivent vérifier une fonction de production et une fonction de coût. On indique l'effet que des hypothèses supplémentaires sur l'ensemble des possibilités de production entraînent sur ces fonctions. On montre sous quelles hypothèses on peut construire la fonction de coût directement à partir de la fonction de production et réciproquement; la dualité, ou équivalence informationnelle entre les deux fonctions, est alors mise en évidence par l'égalité entre la fonction de départ et la fonction construite à partir de la fonction duale.

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 64, n° 3, septembre 1988

ENSEMBLE DES POSSIBILITÉS DE PRODUCTION, FONCTION DE PRODUCTION ET FONCTION DE COÛT : UNE PRÉSENTATION DE LA DUALITÉ

Josep M. PLA
Université des sciences sociales de Toulouse *

L'ensemble des possibilités de production est la représentation première des contraintes technologiques qui font face à une entreprise mono-produit. Sous des hypothèses de régularité de cet ensemble et si le producteur considère les prix comme des données, on construit une fonction de production et une fonction de coût qui contiennent toute l'information économiquement pertinente sur la technologie et on dégage les propriétés minimales que doivent vérifier une fonction de production et une fonction de coût. On indique l'effet que des hypothèses supplémentaires sur l'ensemble des possibilités de production entraînent sur ces fonctions. On montre sous quelles hypothèses on peut construire la fonction de coût directement à partir de la fonction de production et réciproquement; la dualité, ou équivalence informationnelle entre les deux fonctions, est alors mise en évidence par l'égalité entre la fonction de départ et la fonction construite à partir de la fonction duale.

The production possibility set is the basic representation of technological constraints faced by a single output firm. If the set satisfies some regularity conditions and if the producer is price-taker, we construct a production function and a cost function containing all the economically relevant information about the technology and we list the minimal properties these functions must satisfy. We exhibit the effects that some additional conditions on the production possibility set have on these functions. We show under which conditions it is possible to construct a cost function directly from the production function and conversely to construct a production function directly from the cost function; the informational equivalence between these functions, the so-called duality, is then presented as the equality of the original function and the function built from the dual one.

*GREMAQ

Je remercie Jean-Pierre Florens, Jean Fraysse et Michel Moreaux de leur aide et de leur disponibilité.

1. INTRODUCTION

Dans la théorie microéconomique de la production on utilise, entre autres formes fonctionnelles, la *fonction de production* et la *fonction de coût* pour représenter les contraintes technologiques que rencontre le producteur. Quelles hypothèses économiques fait-on sur ces contraintes quand on utilise l'une ou l'autre de ces fonctions que l'on appelle duales ? En quoi consiste cette dualité ?

Pour répondre à ces questions, d'une part on dégage les hypothèses économiques sur la technologie qui permettent de définir ces fonctions ; on étudie aussi l'impact des hypothèses qui sont faites couramment sur chacune d'elles. D'autre part, on explique leur caractère dual qui tient à leur définition comme des optimums sous contrainte : maximum de production pour la fonction de production, minimum du coût pour la fonction de coût. Ce caractère apparaît dans l'équivalence de l'information que chacune d'elles contient et que l'on s'attache à déterminer en présentant les hypothèses qui permettent de passer d'une représentation à l'autre.

Des éléments de réponse importants existent déjà dans la littérature. Diewert (1982) a présenté un exposé très complet des différentes formes fonctionnelles qui ont été proposées. L'équivalence informationnelle entre la fonction de production et la fonction de coût a été exposée par Diewert (1971), mais il ne détaille pas les hypothèses nécessaires à l'obtention de chaque résultat ; à la liste des hypothèses correspond la liste des résultats et leurs liens n'apparaissent que dans le détail des démonstrations. Pour démontrer ces résultats, il utilise les *ensembles de facteurs nécessaires* qui sont des sous-ensembles de *l'ensemble des possibilités de production*. On utilise ce dernier pour mettre en évidence les hypothèses économiques que l'on fait sur la technologie. Si les démonstrations s'en trouvent parfois légèrement modifiées, elles restent fondées sur les mêmes arguments.

La deuxième partie présente le cadre théorique du modèle, les notations utilisées et l'ensemble des possibilités de production. La troisième partie expose l'équivalence informationnelle entre l'ensemble des possibilités de production et la fonction de production, entre l'ensemble des possibilités de production et la fonction de coût et entre ces deux fonctions ; les hypothèses qui permettent de construire ces fonctions sont soulignées dans cette partie.

2. CADRE THÉORIQUE

a) Position du problème

Le cadre théorique est celui de la théorie microéconomique de la production. On suppose que pour déterminer leur comportement les agents économiques maximisent une fonction objectif en tenant compte des contraintes qu'ils rencontrent.

On pose que la fonction objectif du producteur est le gain monétaire qu'il retire de la vente de sa production, égal à sa recette moins ses dépenses. Les contraintes qui s'adressent à lui sont de deux types: les contraintes liées à l'organisation des marchés et les contraintes technologiques.

On suppose que les marchés sont concurrentiels, donc que le producteur considère que ses actions ne modifient pas les prix.

On suppose que le producteur possède une technologie telle qu'il produit un seul bien en utilisant n facteurs de production, $n \geq 1$. La dualité permet de choisir entre différentes représentations de la technologie économiquement équivalentes quand les marchés sont concurrentiels et que le producteur maximise son gain [1].

b) Notations

Les minuscules (y, λ) représentent des nombres entiers ou réels, les minuscules en gras ($\mathbf{x}$) des vecteurs de R^n, $n \geq 1$, les majuscules (F) des fonctions à valeurs dans R, les majuscules en gras ($\mathbf{P}$) des ensembles de vecteurs de R^m, $m \geq 1$. On note x_i, $i=1,\ldots,n$, la i-ème composante de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sa transposée. On note $\mathbf{0} \equiv (0,\ldots,0)' \in R^n$. Quels que soient les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de R^n, on note :

$\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$	$<=> (u_i \geq v_i, i=1,\ldots, n)$,	**u** supérieur ou égal à **v**,
$\mathbf{u} > \mathbf{v}$	$<=> (\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{v})$,	**u** supérieur à **v**,
$\mathbf{u} >> \mathbf{v}$	$<=> (u_i > v_i, i=1,\ldots, n)$,	**u** strictement supérieur à **v**,

et en particulier pour $\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$	$<=> (u_i \geq 0, i=1,\ldots, n)$,	**u** positif ou nul,
$\mathbf{u} > \mathbf{0}$	$<=> (\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{0})$,	**u** positif,
$\mathbf{u} >> \mathbf{0}$	$<=> (u_i > 0, i=1,\ldots, n)$,	**u** strictement positif.

On indique la fin des démonstrations par le signe ♦.

On note $y \geq 0$ la quantité de produit, encore appelée *niveau de production*, $q > 0$ son prix de vente, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ le vecteur des quantités de chacun des n facteurs de production, $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$ le vecteur des prix correspondant.

Sous les hypothèses de prix des facteurs et du produit non nuls, $q > 0$, $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, et de comportement de maximisation en environnement concurrentiel, le programme du producteur est le suivant:

$$\max_{y,\, \mathbf{x}} \{qy - \mathbf{p}'\mathbf{x} \,/\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ y \text{ est réalisable, } \mathbf{x} \text{ permet de produire } y\}.$$

c) Représentation de la technologie

Pour formaliser les notions de « y est réalisable » et de « $\mathbf{x}$ permet de produire y» on définit les deux ensembles suivants.

---

1. La dualité a été étudiée entre autres auteurs par Diewert (1971, 1974, 1982), Fuss, McFadden, Mundlak (1978), Shephard (1953, 1970), Varian (1978).

Définition.

On appelle *ensemble des possibilités de production* l'ensemble $\mathbf{P}$:
$\mathbf{P} \equiv \{ (\mathbf{x}, y) \,/\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ y \geq 0,\ \mathbf{x}$ permet de produire $y \} \subset R_{+}^{n+1}$.

Définition.

On appelle *ensemble des productions réalisables* l'ensemble $\mathbf{Y}$:
$\mathbf{Y} \equiv \{ y \,/\, \exists\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} : (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P} \} \subset R_{+}$.

On suppose que l'ensemble des possibilités de production $\mathbf{P}$ vérifie une ou plusieurs des conditions suivantes :

$P0$ (Régularité) : $\forall\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} : (\mathbf{x}, 0) \in \mathbf{P}$.
$P1$ (Fermeture) : $\mathbf{P}$ fermé.
$P2$ (Production finie à facteurs finis) : $\forall\ (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}, \exists\ \bar{y} \in R+ : \bar{y} \geq y$ et $(x, \bar{y}) \notin \mathbf{P}$.
$P3$ (Libre disposition des facteurs) : $\forall\ (\mathbf{x}^1, y) \in \mathbf{P}, \forall\ \mathbf{x}^2 \geq \mathbf{x}^1 : (\mathbf{x}^2, y) \in \mathbf{P}$.
$P4$ (Libre disposition du produit) : $\forall\ (\mathbf{x}, y^1) \in \mathbf{P}, \forall\ y^2 \geq 0,\ y^1 \geq y^2 : (\mathbf{x}, y^2) \in \mathbf{P}$.
$P5$ (Convexité) : $\forall\ (\mathbf{x}^1, y) \in \mathbf{P}, \forall\ (\mathbf{x}^2, y) \in \mathbf{P}, \forall\ \lambda \in [0, 1]$: $(\lambda \mathbf{x}^1 + (1\text{-}\lambda)\ \mathbf{x}^2,\ y) \in \mathbf{P}$.
$P6$ (Rendements d'échelle constants) : $\forall\ (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}, \forall\ \lambda > 0 : (\lambda \mathbf{x}, \lambda y) \in \mathbf{P}$.

L'hypothèse $P0$ est une première hypothèse de libre disposition des facteurs qui suppose que le producteur peut, sans coût, se débarrasser de la *totalité* des facteurs pour ne rien produire.

L'hypothèse $P1$ est une hypothèse de régularité de l'ensemble des possibilités de production qui servira surtout dans les démonstrations d'existence et de continuité.

L'hypothèse $P2$ énonce que le producteur ne peut pas produire une infinité de produit avec des quantités de facteurs finies.

L'hypothèse $P3$ suppose que le producteur peut produire avec une certaine quantité de facteurs tout ce qu'il pourrait produire s'il disposait de quantités de facteurs moindres. Une autre interprétation est de la considérer comme une seconde hypothèse de libre disposition des facteurs, plus forte que $P0$: le producteur peut se débarrasser sans coût d'une *partie* des facteurs de production.

L'hypothèse $P4$, comme $P3$, pourrait s'énoncer « qui peut le plus peut le moins ». Quand un vecteur de facteurs de production permet de produire une certaine quantité de produit, il permet de produire toutes les quantités inférieures. On peut aussi l'interpréter comme une hypothèse de libre disposition de la production : le producteur peut se débarrasser sans coût d'une *partie* de la quantité produite.

L'hypothèse $P5$ est une hypothèse de convexité de l'ensemble des facteurs qui permettent de produire une quantité donnée de produit.

L'hypothèse $P6$ est une hypothèse de rendements d'échelle constants : le producteur n'est pas en présence d'économies ou de déséconomies d'échelle.

En utilisant ces définitions, le programme du producteur devient :

$$\max_{y,\,\mathbf{x}} \{\, qy - \mathbf{p}'\,\mathbf{x} \;/\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ y \in \mathbf{Y},\ (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P} \,\} .$$

Dans l'ensemble des possibilités de production **P** le producteur opère des choix qui découlent exclusivement de sa fonction d'objectif et de l'organisation des marchés qu'il rencontre, puisque les autres contraintes sont exprimées par **P** lui-même. On peut se demander quels choix peuvent être réalisés a priori, sans tenir compte de la valeur des prix, et poser les questions suivantes :

Q1 : Quelle est la quantité de produit y^* que choisit le producteur quand il dispose de quantités de facteurs **x** données ?

Q2 : Quelles sont les quantités de facteurs $\mathbf{x}^*$ que le producteur utilise quand il veut produire un montant de produit y donné ?

3. DUALITÉ

a) Ensemble des possibilités de production — Fonction de production

Définition.

Un niveau de production $y^* \in \mathbf{Y}$ est *techniquement efficace* pour un vecteur de facteurs de production **x** donné s'il n'existe pas un niveau de production, réalisable avec **x**, supérieur à y^* :

$$(\mathbf{x}, y^*) \in \mathbf{P} \text{ et } \forall\, y \in \mathbf{Y},\, y > y^* \Rightarrow (\mathbf{x}, y) \notin \mathbf{P}.$$

Si les quantités de facteurs **x** sont données, le programme du producteur a la même solution en y que le programme suivant : $\max\limits_{y} \{y / y \in \mathbf{Y}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\}$.

Donc à vecteur de facteurs de production **x** donné le producteur choisit le niveau de production techniquement efficace. Du point de vue du comportement du producteur, l'adverbe *techniquement* masque le caractère économique du choix que réalise le producteur parmi les productions réalisables à facteurs donnés.

Maintenant on peut répondre à la question Q1 et construire une représentation du choix du niveau de production que réalise le producteur quand il dispose de facteurs de production et énoncer ses propriétés.

Proposition 1. Si **P** vérifie $P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P2$ (Production finie à facteurs finis),
on définit la *fonction de production* F de R^n_+ dans **Y** qui donne pour tout vecteur de facteurs de production $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ le niveau de production techniquement efficace associé :

$$F(\mathbf{x}) = \max_{y} \{y / y \in \mathbf{Y}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\}.$$

F vérifie $F1$ (Semi-continuité supérieure).

Démonstration.

Existence : Il faut montrer que le maximum existe $\forall\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
Soit $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. D'après $P0$, $\exists\ \bar{y} \in \mathbf{Y} : (\mathbf{x}, \bar{y}) \in \mathbf{P}$. D'après $P2$, $\forall\ y : (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$, $\exists\ \bar{\bar{y}} \in R_+ : \bar{\bar{y}} \geq y$ et $(\mathbf{x}, \bar{\bar{y}}) \notin \mathbf{P}$. Le maximum peut alors s'écrire :

$$\max_y \{y / y \in \mathbf{Y}, \bar{y} \leq y \leq \bar{\bar{y}}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\}.$$

Soit $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) \equiv \{y / y \in \mathbf{Y}, \bar{y} \leq y \leq \bar{\bar{y}}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\}$. $\bar{y} \in \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \neq \emptyset$. $\forall\ y \in \mathbf{Z}(\mathbf{x}) : \bar{y} \leq y \leq \bar{\bar{y}} \Rightarrow \mathbf{Z}(\mathbf{x})$ borné. Soit $\{y^n\}_{n \in N}$ une suite de $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ qui converge vers y. $\forall\ n \in N$, $\bar{y} \leq y^n \leq \bar{\bar{y}} \Rightarrow \bar{y} \leq y \leq \bar{\bar{y}}$. $\forall\ n \in \mathrm{N}, (\mathbf{x}, y^n) \in \mathbf{P}$ et $\{(\mathbf{x}^n, y^n)\}_{n \in N}$, avec $\forall\ n \in \mathrm{N}$, $\mathbf{x}^n = \mathbf{x}$, converge vers $(\mathbf{x}, y)$; d'après $P1$, $\mathbf{P}$ fermé $\Rightarrow (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P} \Rightarrow y \in \mathbf{Y} \Rightarrow y \in \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{Z}(\mathbf{x})$ fermé. Le maximum d'une fonction continue sur un sous-ensemble de R non vide fermé borné existe.

$F1$: Soit une suite de vecteurs qui converge vers une limite tels que leurs images sont supérieures à l'image de cette limite. Il faut montrer que la limite des images est l'image de la limite.
Soit $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Soit $\{\mathbf{x}^n\}_{n \in N}$ une suite de vecteurs positifs ou nuls qui converge vers $\mathbf{x}$ telle que $\forall\ n \in N$, $F(\mathbf{x}^n) \geq F(\mathbf{x})$. $\forall\ n \in N$, on note $y^n \equiv F(\mathbf{x}^n)$. D'après $P2$, l'image de tout vecteur fini est finie, donc $\{y^n\}_{n \in N}$ est bornée. Donc il existe un point d'accumulation y^*, et $y^* \geq F(\mathbf{x})$. Soit $\{y^m\}_{m \in N}$ une suite extraite de $\{y^n\}_{n \in N}$ qui converge vers y^*. $\{(\mathbf{x}^m, y^m)\}_{m \in N}$ converge vers $(\mathbf{x}, y^*)$ et d'après $P1$, $(\mathbf{x}, y^*) \in \mathbf{P}$, donc $F(\mathbf{x}) \geq y^*$, donc $y^* = F(\mathbf{x})$: le point d'accumulation est $F(\mathbf{x})$. Supposons qu'il existe un second point d'accumulation y^{**}. Alors en appliquant le raisonnement ci-dessus, on montre que $y^{**} = F(\mathbf{x})$. Donc la suite converge vers $F(\mathbf{x})$. ◆

L'existence de la fonction de production repose sur des hypothèses sur la technologie très peu restrictives. De plus $\forall\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $(\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) \in \mathbf{P}$ et $F(\mathbf{x}) \in \mathbf{Y}$. La fonction de production est définie comme un maximum, donc $\forall\ (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$, $F(\mathbf{x}) \geq y$.

La semi-continuité supérieure de la fonction de production découle des mêmes hypothèses sur la technologie que celles qui permettent de montrer son existence. C'est en fait une conséquence de la définition de la fonction de production comme un maximum. Pour qu'une fonction définie de R^n_+ dans R_+ puisse être interprétée comme une fonction de production, il faut donc qu'elle soit semi-continue supérieurement.

Proposition 2. Si $\mathbf{P}$ vérifie $P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P2$ (Production finie à facteurs finis),
$P3$ (Libre disposition des facteurs),
F est définie et vérifie
$F1$ (Semi-continuité supérieure),
$F2$ (Croissance).

Démonstration.

$F2$: Il faut montrer que $\forall\, \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}, \forall\, \mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^2 \geq \mathbf{x}^1 \Rightarrow F(\mathbf{x}^2) \geq F(\mathbf{x}^1)$. Soit $\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$, soit $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}$, avec $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{x}^1$. D'après $P3$, $\forall\, y \in \mathbf{Y}$, $(\mathbf{x}^1, y) \in \mathbf{P}$ et $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{x}^1 \Rightarrow (\mathbf{x}^2, y) \in \mathbf{P}$, donc $\{y / y \in \mathbf{Y}, (\mathbf{x}^1, y) \in \mathbf{P}\} \subset \{y / y \in \mathbf{Y}, (\mathbf{x}^2, y) \in \mathbf{P}\}$, donc $F(\mathbf{x}^2) \geq F(\mathbf{x}^1)$. ♦

Proposition 3. Si **P** vérifie
- $P0$ (Régularité),
- $P1$ (Fermeture),
- $P2$ (Production finie à facteurs finis),
- $P4$ (Libre disposition du produit),
- $P5$ (Convexité),

F est définie et vérifie
- $F1$ (Semi-continuité supérieure),
- $F3$ (Quasi-concavité).

Démonstration.

$F3$: Il faut montrer que $\forall\, \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}, \forall\, \mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}, \forall\, \lambda \in [0, 1]$: $F(\lambda\, \mathbf{x}^1 + (1\text{-}\lambda)\, \mathbf{x}^2) \geq \min\, (F(\mathbf{x}^1), F(\mathbf{x}^2))$.
Soit $\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$, soit $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}$, avec $F(\mathbf{x}^2) \geq F(\mathbf{x}^1)$. Soit $\lambda \in [0, 1]$. $(\mathbf{x}^1, F(\mathbf{x}^1)) \in \mathbf{P}$ et $(\mathbf{x}^2, F(\mathbf{x}^2)) \in \mathbf{P}$. D'après $P4$, $F(\mathbf{x}^2) \geq F(\mathbf{x}^1) \Rightarrow (\mathbf{x}^2, F(\mathbf{x}^1)) \in \mathbf{P}$. D'après $P5$, $(\lambda\, \mathbf{x}^1 + (1\text{-}\lambda)\, \mathbf{x}^2, F(\mathbf{x}^1)) \in \mathbf{P}$, donc $F(\lambda\, \mathbf{x}^1 + (1\text{-}\lambda)\, \mathbf{x}^2) \geq F(\mathbf{x}^1)$. ♦

Proposition 4. Si **P** vérifie
- $P0$ (Régularité),
- $P1$ (Fermeture),
- $P2$ (Production finie à facteurs finis),
- $P6$ (Rendements d'échelle contants),

F est définie et vérifie
- $F1$ (Semi-continuité supérieure),
- $F4$ (Homogénéité positive de degré un).

Démonstration.

$F4$: Il faut montrer que $\forall\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \forall\, \lambda > 0, F(\lambda\, \mathbf{x}) = \lambda\, F(\mathbf{x})$.
Soit $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, soit $\lambda > 0$. $(\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) \in \mathbf{P}$. D'après $P6$, $(\lambda\, \mathbf{x}, \lambda\, F(\mathbf{x})) \in \mathbf{P}$. Donc $F(\lambda\, \mathbf{x}) \geq \lambda\, F(\mathbf{x})$. $(\lambda\, \mathbf{x}, F(\lambda\, \mathbf{x})) \in \mathbf{P}$. D'après $P6$, $\forall\, \mu > 0$, $(\mu\, \lambda\, \mathbf{x}, \mu\, F(\lambda\, \mathbf{x})) \in \mathbf{P}$. Soit $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$, $(\mathbf{x}, \dfrac{1}{\lambda} F(\lambda\, \mathbf{x})) \in \mathbf{P}$.

Donc $F(\mathbf{x}) \geq \dfrac{1}{\lambda} F(\lambda\, \mathbf{x})$. Donc $F(\lambda\, \mathbf{x}) = \lambda\, F(\mathbf{x})$. ♦

Ainsi, sous les hypothèses de coût des facteurs non nul et de comportement de maximisation en environnement concurrentiel, on peut déterminer le niveau de production qui choisit le producteur à vecteur de facteurs donné. Sous des hypothèses faibles sur la technologie on peut représenter ce choix à l'aide de la fonction de production F. L'information nécessaire sur les prix est minime, puisqu'il suffit de savoir qu'ils sont non nuls.

On définit les ensembles suivants qui permettent de reconstruire une représentation de la technologie analogue à celle de l'ensemble des possibilités de production. Pour cela on applique l'hypothèse $P4$ de libre disposition du produit au graphe de F, qui est l'ensemble des couples facteurs de production-quantité de produit $(\mathbf{x}, y)$ tels que y est l'image d'un vecteur de facteurs $\mathbf{x}$ positif ou nul. Le rôle de cette hypothèse est mis en évidence dans les propositions ci-dessous.

Définition.

On appelle *ensemble des productions réalisables implicite* induit par la fonction de production F l'ensemble $\mathbf{Y}^F \equiv [0, \sup_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}) \subset R_+$.

Quand le maximum est atteint, on pose qu'il appartient à $\mathbf{Y}^F$.

Proposition 5. Si $\mathbf{P}$ vérifie $P0$ (Régularité), $P1$ (Fermeture),

$\mathbf{Y} \subset \mathbf{Y}^F$.

Démonstration.

Soit $y \in \mathbf{Y}$. D'après la définition de $\mathbf{Y}$, $\exists\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$: $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$ et $F(\mathbf{x}) \geq y$, donc $y \in \mathbf{Y}^F$. ♦

Proposition 6. Si $\mathbf{P}$ vérifie $P0$ (Régularité), $P1$ (Fermeture), $P4$ (Libre disposition du produit),

$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^F$.

Démonstration.

Soit $y \in \mathbf{Y}^F$: $y \notin \mathbf{Y}$. Alors $\exists\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$: $F(\mathbf{x}) \geq y$ et $\forall\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $(\mathbf{x}, y) \notin \mathbf{P}$, ce qui contredit $P4$. ♦

Définition.

On appelle *ensemble des possibilités de production implicite* induit par la fonction de production F l'ensemble $\mathbf{P}^F \equiv \{(\mathbf{x}, y) / y \in \mathbf{Y}^F, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, F(\mathbf{x}) \geq y\}$.

Proposition 7. Si F est définie et vérifie
$F1$ (Semi-continuité supérieure),

$\mathbf{P}^F$ vérifie
$\mathbf{P} \subset \mathbf{P}^F$,
$P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P2$ (Production finie à facteurs finis),
$P4$ (Libre disposition du produit).

Démonstration.

$\mathbf{P} \subset \mathbf{P}^F$: Soit $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$. $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ et $y \in \mathbf{Y} \subset \mathbf{Y}^F$. $F(\mathbf{x}) \geq y \Rightarrow (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^F$.

$P0$: Soit $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. $F(\mathbf{x}) \in \mathbf{Y}^F \subset R_+ \Rightarrow F(\mathbf{x}) \geq 0$. Donc $\forall\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$: $(\mathbf{x}, 0) \in \mathbf{P}^F$.

$P1$: Soit $\{(\mathbf{x}^n, y^n)\}_{n \in N}$ une suite de $\mathbf{P}^F$ qui converge vers $(\mathbf{x}, y)$. $\forall\, n \in N$, $\mathbf{x}^n \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. $\forall\, n \in N$, $F(\mathbf{x}^n) \geq y^n$ donc, d'après $F1$, $F(\mathbf{x}) \geq y \Rightarrow y \in \mathbf{Y}^F \Rightarrow (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^F$.

$P2$: Soit $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^F$. $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $y \in \mathbf{Y}^F$ et $F(\mathbf{x}) \geq y$. Soit $\bar{y} \equiv F(\mathbf{x}) + 1 > F(\mathbf{x}) \geq y$. Si $(\mathbf{x}, \bar{y}) \in \mathbf{P}^F$ alors $F(\mathbf{x}) \geq \bar{y}$, contradiction. Donc $\forall\, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^F$, $\exists\, \bar{y} \in R_+ : \bar{y} \geq y$ et $(\mathbf{x}, \bar{y}) \notin \mathbf{P}^F$.

$P4$: Soit $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^F$, soit $z \geq 0 : z \leq y$. On a $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $y \in \mathbf{Y}^F$ et $F(\mathbf{x}) \geq y \geq z$, donc $z \in \mathbf{Y}^F \Rightarrow (\mathbf{x}, z) \in \mathbf{P}^F$. ♦

Cette proposition montre que la fonction de production ne contient pas l'information sur les couples $(\mathbf{x}, y)$ où la quantité de produit y n'est pas techniquement efficace pour les facteurs de production $\mathbf{x}$. Ainsi plusieurs ensembles de possibilités de production peuvent donner la même fonction de production s'ils ne diffèrent que pour les couples où y n'est pas techniquement efficace pour $\mathbf{x}$.

Proposition 8. Si $\mathbf{P}$ véfifie $P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P2$ (Production finie à facteurs finis),
$P4$ (Libre disposition du produit),

$\mathbf{P} = \mathbf{P}^F$.

Démonstration.

Il faut montrer que $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^F \Rightarrow (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$.
Soit $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^F$. $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $y \in \mathbf{Y}^F = \mathbf{Y}$ et $F(\mathbf{x}) \geq y$. $(\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) \in \mathbf{P}$, donc d'après $P4$, $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$. ♦

Cette proposition montre que si $\mathbf{P}$ vérifie les hypothèses $P0$ (Régularité), $P1$ (Fermeture), $P2$ (Production finie à facteurs finis), $P4$ (Libre disposition du produit), $\mathbf{P}$ et F représentent exactement la même technologie.

En appliquant la proposition 1 on définit une fonction de production F^F à partir de l'ensemble des possibilités de production $\mathbf{P}^F$. On obtient le résultat suivant.

Proposition 9. $\forall\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $F^F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$.

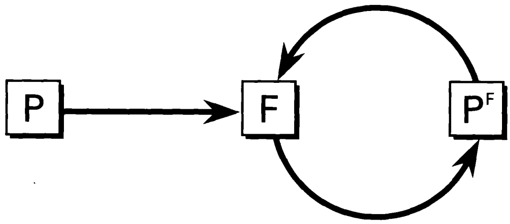
Démonstration.

$$\text{Soit } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.\ F^F(\mathbf{x}) = \max_y \{y / y \in \mathbf{Y}^F, (\mathbf{x}, y) \in \{(\mathbf{x}, z) / z \in \mathbf{Y}^F, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, F(\mathbf{x}) \geq z\}\}$$
$$= \max_y \{y / y \in \mathbf{Y}^F, F(\mathbf{x}) \geq y\} = F(\mathbf{x}).\ ♦$$

D'après ces propositions, les hypothèses minimales sur **P** pour construire une fonction de production sont $P0$ (Régularité), $P1$ (Fermeture), $P2$ (Production finie à facteurs finis). L'hypothèse $P0$ sert à définir F sur R_+ mais n'est pas nécessaire. Si elle n'est pas vérifiée, il suffit de définir un ensemble des facteurs utilisables **X** qui contienne tous les vecteurs de facteurs de production qui permettent de produire un niveau quelconque puis de définir F sur cet ensemble.

La figure 1, où les flèches signifient *permet de construire* et où les carrés représentent les *structures*, illustre ce résultat. Les structures sont de deux types : les ensembles ayant les caractéristiques des ensembles de possibilités de production et les fonctions de production.

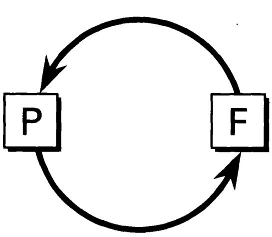
FIGURE 1



À partir de l'ensemble des possibilités de production **P** on peut construire une fonction de production F, qui permet elle-même de construire un ensemble de possibilités de production induit $\mathbf{P}^F$. Si on construit à partir de $\mathbf{P}^F$ une fonction de production F^F, celle-ci est égale à F d'après la proposition 9. On est donc en présence d'une boucle qui représente l'identité de l'information contenue dans les deux structures.

Si **P** vérifie les hypothèses $P0$ (Régularité), $P1$ (Fermeture), $P2$ (Production finie à facteurs finis), $P4$ (Libre disposition du produit), le shéma est réduit à la boucle puisque on a l'égalité $\mathbf{P} = \mathbf{P}^F$. On obtient alors la figure 2.

FIGURE 2



Les trois propositions suivantes montrent comment se transmettent les propriétés de F à l'ensemble: des possibilités de production implicite $\mathbf{P}^F$.

Proposition 10. Si F est définie et vérifie

$F1$ (Semi-continuité supérieure),
F2 (Croissance),

$\mathbf{P}^F$ vérifie $P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P2$ (Production finie à facteurs finis),
P3 (Libre disposition des facteurs),
$P4$ (Libre disposition du produit).

Démonstration.

Soit $(\mathbf{x}^1, y) \in \mathbf{P}^F$, soit $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{x}^1$. $F(\mathbf{x}^1) \geq y$. D'après $F2$, $F(\mathbf{x}^2) \geq F(\mathbf{x}^1) \geq y$, donc $(\mathbf{x}^2, y) \in \mathbf{P}^F$. ♦

Proposition 11. Si F est définie et vérifie

$F1$ (Semi-continuité supérieure),
F3 (Concavité),

$\mathbf{P}^F$ vérifie $P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P2$ (Production finie à facteurs finis),
$P4$ (Libre disposition du produit),
P5 (Convexité).

Démonstration.

Soit $(\mathbf{x}^1, y) \in \mathbf{P}^F$, soit $(\mathbf{x}^2, y) \in \mathbf{P}^F$, soit $\lambda \in [0, 1]$. $F(\mathbf{x}^1) \geq y$, $F(\mathbf{x}^2) \geq y$. D'après $F3$, $F(\lambda\, \mathbf{x}^1 + (1\text{-}\lambda)\, \mathbf{x}^2) \geq \min\, (F(\mathbf{x}^1), F(\mathbf{x}^2)\,) \geq y$, donc $(\lambda\, \mathbf{x}^1 + (1\text{-}\lambda)\, \mathbf{x}^2, y) \in \mathbf{P}^F$. ♦

Proposition 12. Si F est définie et vérifie

$F1$ (Semi-continuité supérieure),
F4 (Homogénéité positive de degré un),

$\mathbf{P}^F$ vérifie $P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P2$ (Production finie à facteurs finis),
$P4$ (Libre disposition du produit),
P6 (Rendements d'échelle constants).

Démonstration.

Soit $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^F$, soit $\lambda \geq 0$. $F(\mathbf{x}) \geq y$ et d'après $F4$, $F(\lambda\, \mathbf{x}) = \lambda\, F(\mathbf{x}) \geq \lambda\, y$, donc $(\lambda\, \mathbf{x}, \lambda\, y) \in \mathbf{P}^F$. ♦

Ainsi, toute fonction qui vérifie les propriétés d'une fonction de production peut être conçue comme la fonction de production dérivant de l'ensemble des possibilités de production qu'elle permet de construire. La structure circulaire de la figure 2 illustre l'équivalence entre les deux représentations de la technologie.

b) Ensemble des possibilités de production — Fonction de coût

Si le niveau de production y est donné, le programme du producteur a la même solution en $\mathbf{x}$ que le programme suivant : $\min\limits_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p'x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\}$.

Donc à niveau de production $y \geq 0$ donné, le producteur choisit le vecteur de facteurs de production $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ qui minimise ses dépenses.

On peut alors répondre à la question Q2 et construire une représentation du choix des facteurs de production que fait le producteur quand il veut atteindre un niveau de production et énoncer ses propriétés.

Proposition 13. Si $\mathbf{P}$ vérifie $P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
on définit la *fonction de coût* C de $\mathbf{Y} \times R^n_{*+}$ dans R_+ qui donne pour tout niveau de production réalisable $y \in \mathbf{Y}$ et pour tout vecteur de prix des facteurs $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$ strictement positif le coût minimum de production

$$C(y, \mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p'x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\}.$$

C vérifie $C1$ (Positivité),
$C2$ (Homogénéité positive de degré un en $\mathbf{p}$),
$C3$ (Croissance en $\mathbf{p}$),
$C4$ (Concavité en $\mathbf{p}$),
$C5$ (Continuité en $\mathbf{p}$),
$C6$ (Semi-continuité inférieure en y).

Démonstration.

Existence : Il faut montrer que le minimum existe $\forall\ y \in \mathbf{Y}, \forall\ \mathbf{p} >> \mathbf{0}$. Soit $y \in \mathbf{Y}$. D'après la définition de $\mathbf{Y}$, $\exists\ \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$: $(\bar{\mathbf{x}}, y) \in \mathbf{P}$. Le minimum peut s'écrire : $\min\limits_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p'x} / \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\}$.

Soit $\mathbf{W}(y) \equiv \{\mathbf{x} / \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\}$. $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{W}(y) \Rightarrow \mathbf{W}(y) \neq \emptyset$. $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbf{W}(y) : \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{W}(y)$ borné. Soit $\{\mathbf{x}^n\}_{n \in N}$ une suite de $\mathbf{W}(y)$ qui converge vers $\mathbf{x}$. $\forall\ n \in N$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{x}^n \leq \bar{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}$. $\forall\ n \in N$, $(\mathbf{x}^n, y) \in \mathbf{P}$ et $\{(\mathbf{x}^n, y^n)\}_{n \in N}$ avec $\forall\ n \in N, y^n = y$ converge vers $(\mathbf{x}, y)$; d'après $P1$, $\mathbf{P}$ fermé $\Rightarrow (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{W}(y)$ fermé. Pour $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $\mathbf{p'x}$ est une fonction continue de $\mathbf{x}$. Le minimum d'une fonction continue sur un sous-ensemble de R^n non vide fermé borné existe.

$C1$: Il faut montrer que $\forall\ \mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $C(0, \mathbf{p}) = 0$ et $\forall\ y \in \mathbf{Y}$, $C(y, \mathbf{p}) \geq 0$.
Soit $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, soit $y \in \mathbf{Y}$. D'après $P0$, $(\mathbf{0}, 0) \in \mathbf{P}$, donc $C(0, \mathbf{p}) = 0$.
Soit $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, soit $y \in \mathbf{Y}$. $\exists\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} : C(y, \mathbf{p}) = \mathbf{p'x} \geq 0$ car $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$ et $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

$C2$: Il faut montrer que $\forall y \in \mathbf{Y}, \forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}, \forall \lambda > 0 : C(y, \lambda \mathbf{p}) = \lambda C(y, \mathbf{p})$. Soit $y \in \mathbf{Y}$, soit $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, soit $\lambda > 0$. $C(y, \lambda \mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x}} \{(\lambda \mathbf{p})' \mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\}$

$= \lambda \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}' \mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\} = \lambda C(y, \mathbf{p})$.

$C3$: Il faut montrer que $\forall y \in \mathbf{Y}, \forall \mathbf{p}^1 >> \mathbf{0}, \forall \mathbf{p}^2 >> \mathbf{0}$:
$\mathbf{p}^2 \geq \mathbf{p}^1 \Rightarrow C(y, \mathbf{p}^2) \geq C(y, \mathbf{p}^1)$.
Soit $y \in \mathbf{Y}$, soit $\mathbf{p}^2 >> \mathbf{0}$, soit $\mathbf{p}^1 >> \mathbf{0}$, avec $\mathbf{p}^2 \geq \mathbf{p}^1$.
$C(y, \mathbf{p}^2) = \mathbf{p}^2 \mathbf{x}$ avec $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ et $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$
$\geq \mathbf{p}^1 \mathbf{x}$ car $\mathbf{p}^2 \geq \mathbf{p}^1$ et $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$
$\geq C(y, \mathbf{p}^1)$, puisque $\mathbf{x}$ n'est pas nécessairement optimal pour $\mathbf{p}^1$.

$C4$: Il faut montrer que $\forall y \in \mathbf{Y}, \forall \mathbf{p}^1 >> \mathbf{0}, \forall \mathbf{p}^2 >> \mathbf{0}, \forall \lambda \in [0, 1]$:
$C(y, \lambda \mathbf{p}^1 + (1\text{-}\lambda) \mathbf{p}^2 \geq \lambda C(y, \mathbf{p}^1) + (1\text{-}\lambda) C(y, \mathbf{p}^2)$.
Soit $y \in \mathbf{Y}$, soit $\mathbf{p}^1 >> \mathbf{0}$, soit $\mathbf{p}^2 >> \mathbf{0}$, soit $\lambda \in [0, 1]$. $C(y, \mathbf{p}^1) = \mathbf{p}^{1\prime} \mathbf{x}^1$ avec $\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$, $C(y, \mathbf{p}^2) = \mathbf{p}^{2\prime} \mathbf{x}^2$ avec $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}$, et $C(y, \lambda \mathbf{p}^1 + (1\text{-}\lambda) \mathbf{p}^2) = (\lambda \mathbf{p}^1 + (1\text{-}\lambda) \mathbf{p}^2)' \mathbf{x}^0 = \lambda \mathbf{p}^{1\prime} \mathbf{x}^0 + (1\text{-}\lambda) \mathbf{p}^{2\prime} \mathbf{x}^0 \geq \lambda \mathbf{p}^{1\prime} \mathbf{x}^1 + (1\text{-}\lambda) \mathbf{p}^{2\prime} \mathbf{x}^2 = \lambda C(y, \mathbf{p}^1) + (1\text{-}\lambda) C(y, \mathbf{p}^2)$ puisque $\mathbf{x}^1$ et $\mathbf{x}^2$ minimisent le coût pour $\mathbf{p}^1$ et $\mathbf{p}^2$.

$C5$: La concavité en $\mathbf{p}$ implique la continuité en $\mathbf{p}$.

$C6$: Soit une suite de niveaux de production qui converge tels que leurs images sont inférieures à l'image de la limite. Il faut montrer que la limite des images est l'image de la limite. Soit $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, soit $y \in \mathbf{Y}$. Soit $\{ y^n \}_{n \in N}$ une suite d'éléments de $\mathbf{Y}$ qui convergne vers y, avec $\forall n \in N, C(y^n, \mathbf{p}) \leq C(y, \mathbf{p})$. Comme la suite converge, elle est bornée. Soit $\bar{y}$ une borne supérieure. $\forall n \in N, \exists \mathbf{x}^n \geq \mathbf{0}$: $C(y^n, \mathbf{p}) = \mathbf{p}' \mathbf{x}^n$ et $(\mathbf{x}^n, y^n) \in \mathbf{P}$.

Soit $\mathbf{K} \equiv \{(\mathbf{x}, y) / 0 \leq z \leq \bar{y}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p}' \mathbf{x} \leq C(y, \mathbf{p}) \}$. $\mathbf{K}$ est un ensemble fermé et borné et $\forall n \in N, (\mathbf{x}^n, y^n) \in \mathbf{K}$, donc la suite $\{ (\mathbf{x}^n, y^n) \}_{n \in N}$ de $\mathbf{K}$ présente un point d'accumulation $(\mathbf{x}^*, y^*)$. Comme y est la limite de $\{ y^n \}_{n \in N}$, $y^* = y$. Soit $\{ (\mathbf{x}^m, y^m) \}_{m \in N}$ une suite extraite de $\{ (\mathbf{x}^n, y^n) \}_{n \in N}$ qui converge vers $(\mathbf{x}^*, y)$. D'après $P1$, $(\mathbf{x}^*, y) \in \mathbf{P}$, donc $C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}^* = \lim C(y^m, \mathbf{p})$. Comme $\forall n \in N, C(y^n, \mathbf{p}) \leq C(y, \mathbf{p})$, on a $\lim C(y^m, \mathbf{p}) \leq C(y, \mathbf{p})$, donc $C(y,\mathbf{p}) = \lim C(y^m, \mathbf{p}) = \mathbf{p}' \mathbf{x}^*$. Supposons qu'il existe un second point d'accumulation $(\mathbf{x}^{**}, y)$. Alors en appliquant le raisonnement ci-dessus, on, montre que $\mathbf{p}' \mathbf{x}^{**} = C(y, \mathbf{p})$. Donc la suite $\{ C(y^n, \mathbf{p}) \}_{n \in N}$ converge vers $C(y, \mathbf{p})$. ♦

L'existence de la fonction de coût repose sur des hypothèses moins restrictives encore que celles qui sont nécessaires pour obtenir une fonction de production. De plus, $\forall y \in \mathbf{Y}, \forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}, \exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$: $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$ et $C(y, \mathbf{p}) = \mathbf{p}' \mathbf{x}$. La fonction de coût est définie comme un minimum, donc $\forall (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}, \forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}, C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}$.

Les propriétés de la fonction de coût sont des conséquences de sa définition comme un minimum. Pour qu'une fonction définie de $R_+ \times R^n_{*+}$ dans R_+ puisse être interprétée comme une fonction de coût, il faut donc qu'elle soit positive, positivement homogène de degré un en **p**, croissante et concave en **p** et semi-continue inférieurement en y.

Proposition 14. Si **P** vérifie
$P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
P4 (Libre disposition du produit),

C vérifie
$C1$ (Positivité),
$C2$ (Homogénéité positive de degré un en **p**),
$C3$ (Croissance en **p**),
$C4$ (Concavité en **p**),
$C5$ (Continuité en **p**),
$C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
C7 (Croissance en y).

Démonstration.

Il faut montrer que $\forall\, y^1 \in \mathbf{Y}, \forall\, y^2 \in \mathbf{Y}, \forall\, \mathbf{p} >> \mathbf{0}, y^2 \geq y^1 => C(y^2, \mathbf{p}) \geq C(y^1, \mathbf{p})$.
Soit $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$, soit $y^1 \in \mathbf{Y}$, soit $y^2 \in \mathbf{Y}$, avec $y^2 \geq y^1$. D'après $P4$, $\forall\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $(\mathbf{x}, y^2) \in \mathbf{P}$ et $y^2 \geq y^1 => (\mathbf{x}, y^1) \in \mathbf{P}$, donc $\{ \mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y^2) \in \mathbf{P} \} \subset \{ \mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y^1) \in \mathbf{P} \}$, donc $C(y^2, \mathbf{p}) \geq C(y^1, \mathbf{p})$. ♦

Proposition 15. Si **P** vérifie
$P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
P2 (Production finie à facteurs finis),

C vérifie
$C1$ (Positivité),
$C2$ (Homogénéité positive de degré un en **p**),
$C3$ (Croissance en **p**),
$C4$ (Concavité en **p**),
$C5$ (Continuité en **p**),
$C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
C8 (Absence de borne).

Démonstration.

Si **Y** est borné supérieurement, soit $\bar{y}$ la borne. Alors $\forall\, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}, \bar{y} + 1 \geq y$ et $(\mathbf{x}, \bar{y}) \notin \mathbf{P}$, donc y ne peut pas tendre vers l'infini.
Si **Y** n'est pas borné supérieurement, soit $\{ y^n \}_{n \in N}$ une suite de **Y** qui tend vers l'infini. Soit $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$. $\forall\, n \in N$, $\exists\, \mathbf{x}^n \geq \mathbf{0}$: $(\mathbf{x}^n, y^n) \in \mathbf{P}$ et $C(y^n, \mathbf{p}) \geq \mathbf{p}'\, \mathbf{x}^n$. On suppose que $\forall\, n \in N$, $C(y^n, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}'\, \mathbf{x}^n \leq c$. Alors $\{ \mathbf{x}^n \}_{n \in N}$ est bornée et donc elle admet un point d'accumulation $\mathbf{x}^*$. Soit $\{ \mathbf{x}^m \}_{m \in N}$ une suite extraite de $\{ \mathbf{x}^n \}_{n \in N}$ qui converge vers $\mathbf{x}^*$, alors $\{ y^m \}_{m \in N}$ tend vers l'infini, ce qui contredit $P2$. ♦

Proposition 16. Si **P** vérifie
$P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
P6 (Rendements d'échelle constants),
C vérifie
$C1$ (Positivité),
$C2$ (Homogénéité positive de degré un en **p**),
$C3$ (Croissance en **p**),
$C4$ (Concavité en **p**),
$C5$ (Continuité en **p**),
$C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
C9 (Homogénéité positive de degré un en y).

Démonstration.

Il faut montrer que $\forall\, \mathbf{p} >> \mathbf{0}, \forall\, y \in \mathbf{Y}, \forall\, \lambda > 0, C(\lambda y, \mathbf{p}) = \lambda C(y, \mathbf{p})$. Soit $\mathbf{p} >> \mathbf{0}, y \in \mathbf{Y}, \lambda > 0$. $\exists\, \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} : C(y, \mathbf{p}) = \mathbf{p}'\, \mathbf{x}^*$ et $(\mathbf{x}^*, y) \in \mathbf{P}$. D'après $P6$, $(\lambda\, \mathbf{x}^*, \lambda\, y) \in \mathbf{P}$. Donc $C(\lambda y, \mathbf{p}) \leq \lambda\, \mathbf{p}'\, \mathbf{x}^* = \lambda\, C(y, \mathbf{p})$. $\exists\, \mathbf{x}^{**} \geq \mathbf{0}$: $C(\lambda\, y, \mathbf{p}) = \mathbf{p}'\, \mathbf{x}^{**}$ et $(\mathbf{x}^{**}, \lambda\, y) \in \mathbf{P}$. D'après $P6$, $\forall\, \mu > 0$, $(\mu\, \mathbf{x}^{**}, \mu\, \lambda\, y) \in \mathbf{P}$. Soit $\mu = \frac{1}{\lambda}$, $(\frac{1}{\lambda}\mathbf{x}^{**}, y) \in \mathbf{P}$. Donc $C(y, \mathbf{P}) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbf{p}'\, \mathbf{x}^{**} = \frac{1}{\lambda} C(\lambda\, y, \mathbf{p})$. Donc $C(\lambda\, y, \mathbf{p}) = \lambda\, C(y, \mathbf{p})$. ◆

On peut définir l'ensemble suivant en imposant les hypothèses $P3$ (Libre dispostion des facteurs) et $P5$ (Convexité) à l'ensemble des couples facteurs de production-quantité de produit $(\mathbf{x}, y)$ tels que $\mathbf{x}$ est la solution du problème de minimisation du coût de production de y pour un prix strictement positif. Le rôle de ces hypothèses est mis en évidence dans les propositions ci-dessous.

Définition.

On appelle *ensemble des possibilités de production implicite* induit par la fonction de coût C l'ensemble $\mathbf{P}^C \equiv \{ (\mathbf{x}, y) \,/\, y \in \mathbf{Y}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \forall\, \mathbf{p} >> \mathbf{0}, C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}'\, \mathbf{x} \}$.

Proposition 17. Si C est définie et vérifie
$C1$ (Positivité),
$C2$ (Homogénéité positive de degré un en **p**),
$C3$ (Croissance en **p**),
$C4$ (Concavité en **p**),
$C5$ (Continuité en **p**),
$C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
$\mathbf{P}^C$ vérifie
$\mathbf{P} \subset \mathbf{P}^C$,
$P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P3$ (Libre disposition des facteurs),
$P5$ (Convexité).

Démonstration.

$\boldsymbol{P} \subset \boldsymbol{P}^C$: Il faut montrer que $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P} \Rightarrow (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^C$.
Soit $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$, soit $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$. $C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}$, donc $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^C$.

$P0$: Soit $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. D'après $C1$, $\forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $C(0, \mathbf{p}) = 0 \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}$, donc $\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $(\mathbf{x}, 0) \in \mathbf{P}^C$.

$P1$: Soit $\{(\mathbf{x}^n, y^n)\}_{n \in N}$ une suite de $\mathbf{P}^C$ qui converge vers $(\mathbf{x}, y)$. $\forall n \in N$, $\mathbf{x}^n \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. $\forall n \in N$, $\forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $C(y^n, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}^n$ donc d'après $C6$, $C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}$. Donc $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^C$.

$P3$: Soit $(\mathbf{x}^1, y) \in \mathbf{P}^C$. $\forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}^1$. Soit $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$. $\forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}^1 \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}^2$, donc $(\mathbf{x}^2, y) \in \mathbf{P}^C$.

$P5$: Soit $(\mathbf{x}^1, y) \in \mathbf{P}^C$ et $(\mathbf{x}^2, y) \in \mathbf{P}^C$, soit $\lambda \in [0, 1]$. $\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$ et $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}$, donc $\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda) \mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}$. $\forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}^1$ et $C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}^2$, donc $\mathbf{p}' (\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda) \mathbf{x}^2) = \lambda \mathbf{p}' \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\ \mathbf{p}'\ \mathbf{x}^2 \geq \lambda\ C(y, \mathbf{p}) + (1-\lambda)\ C(y, \mathbf{p}) = C(y, \mathbf{p})$. Donc $(\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda) \mathbf{x}^2, y) \in \mathbf{P}^C$. ♦

Cette proposition montre que la fonction de coût ne contient que l'information sur les couples $(\mathbf{x}, y)$ où les facteurs de production minimisent le coût de production de y pour au moins un vecteur de prix $\mathbf{p}$ strictement positif. La même fonction de coût peut être obtenue à partir d'ensembles de possibilités de production différents s'ils ne diffèrent que pour les couples $(\mathbf{x}, y)$ où $\mathbf{x}$ ne minimise le coût de production de y pour aucun vecteur de prix strictement positif.

Proposition 18. Si $\mathbf{P}$ vérifie $P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P3$ (Libre disposition des facteurs),
$P5$ (Convexité),

$\mathbf{P} = \mathbf{P}^C$.

Démonstration.

Il faut montrer que $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^C \Rightarrow (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$.
Soit $y \in \mathbf{Y}$. On définit les ensembles suivants : $\mathbf{N}(y) \equiv \{\mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}\}$ et $\mathbf{N}^C(y) \equiv \{\mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^C\}$. D'après $P5$, $\mathrm{N}(y)$ est égal à l'intersection de ses demi-espaces supports qui sont de la forme $\{\mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p}' \mathbf{x}^f \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}\}$, où $\mathbf{x}^f$ est un point frontière de $\mathbf{N}(y)$. $C(y, \mathbf{p}) = \min\limits_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}' \mathbf{x} / \mathbf{x} \in \mathbf{N}(y)\}$
et $\mathbf{p}'\ \mathbf{x}$ est une fonction linéaire non constante, donc les points frontière vérifient $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(y)$ et $\mathbf{p}'\ \mathbf{x} = C(y, \mathbf{p})$. En utilisant $P3$, les demi-espaces supports sont les ensembles $\mathbf{H}_p \equiv \{\mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}\}$, avec $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Donc } \mathbf{N}(y) &= \bigcap_{\mathbf{p} >> \mathbf{0}} \mathbf{H}_p = \bigcap_{\mathbf{p} >> \mathbf{0}} \{\mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}\} \\
&= \{\mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}, C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}' \mathbf{x}\} \\
&= \{\mathbf{x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^C\} \equiv \mathbf{N}^C(y).
\end{aligned}
$$

Soit $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^C$, $\mathbf{x} \in \mathbf{N}^C(y) = \mathbf{N}(y)$, donc $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}$. ♦

Cette proposition montre que si **P** vérifie les hypothèses $P0$ (Régularité), $P1$ (Fermeture), $P3$ (Libre disposition des facteurs), $P5$ (Convexité), **P** et C représentent exactement la même technologie.

En appliquant la proposition 13 on définit une fonction de coût C^C à partir de l'ensemble des possibilités de production $\mathbf{P}^C$. On obtient le résultat suivant.

Proposition 19. $\forall\, y \in \mathbf{Y},\ \forall\, \mathbf{p} >> \mathbf{0},\ C^C(y, \mathbf{p}) = C(y, \mathbf{p})$.

Démonstration.

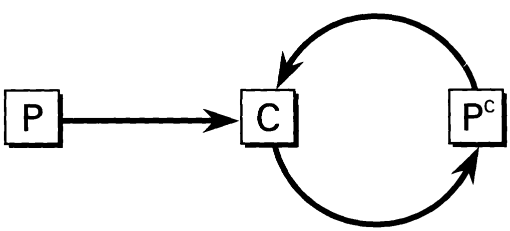
Soit $y \in \mathbf{Y},\ \mathbf{p} >> \mathbf{0}$. D'après la proposition 13, $C^C(y, \mathbf{p})$

$$= \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p'x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y) \in \{(\mathbf{x}, z) / z \in \mathrm{Y}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \forall\, \mathbf{p} >> \mathbf{0}, C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p'x}\}\}$$

$$= \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p'x} / \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p'x}\} = C(y, \mathbf{p}). \ \blacklozenge$$

La figure 3 illustre ce résultat. Les structures sont aussi de deux types : les ensembles ayant les caractéristiques des ensembles de possibilités de production et les fonctions de coût.

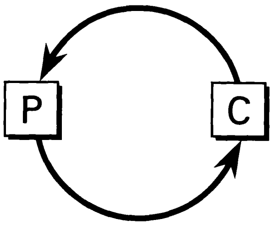
FIGURE 3



On peut construire à partir de l'ensemble des possibilités de production **P** une fonction de coût C, qui permet à son tour de construire un ensemble de possibilités de production induit $\mathbf{P}^C$. Si on construit alors une fonction de coût C^C, celle-ci est égale à C d'après la proposition 19. On trouve alors une boucle qui représente l'identité de l'information contenue dans les deux structures.

Si **P** vérifie les hypothèses $P0$ (Régularité), $P1$ (Fermeture), $P3$ (Libre disposition des facteurs), $P5$ (Convexité), alors le schéma est réduit à la boucle, puisque on a l'égalité $\mathbf{P} = \mathbf{P}^C$.

FIGURE 4



Les trois propositions suivantes montrent comment se transmettent les propriétés de C à l'ensemble des possibilités de production implicite $\mathbf{P}^C$.

Proposition 20. Si C est définie et vérifie

$C1$ (Positivité),
$C2$ (Homogénéité positive de degré un en $\mathbf{p}$),
$C3$ (Croissance en $\mathbf{p}$),
$C4$ (Concavité en $\mathbf{p}$),
$C5$ (Continuité en $\mathbf{p}$),
$C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
C7 (Croissance en y),

$\mathbf{P}^C$ vérifie

$P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P3$ (Libre disposition des facteurs),
P4 (Libre disposition du produit),
$P5$ (Convexité),

Démonstration.

Soit $(\mathbf{x}, y^1) \in \mathbf{P}^C$. $\forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $C(y^1, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p'}\,\mathbf{x}$. Soit $y^2 \leq y^1$. D'après $C7$, $C(y^2, \mathbf{p}) \leq C(y^1, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p'}\,\mathbf{x}$. Donc $(\mathbf{x}, y^2) \in \mathbf{P}^C$. ♦

Proposition 21. Si C est définie et vérifie

$C1$ (Positivité),
$C2$ (Homogénéité positive de degré un en $\mathbf{p}$),
$C3$ (Croissance en $\mathbf{p}$),
$C4$ (Concavité en $\mathbf{p}$),
$C5$ (Continuité en $\mathbf{p}$),
$C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
C8 (Absence de borne),

$\mathbf{P}^C$ vérifie

$P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
P2 (Production finie à facteurs finis),
$P3$ (Libre disposition des facteurs),
$P5$ (Convexité).

Démonstration.

Soit $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$. Si $\exists$ $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^C$: $\forall \bar{y} \in R_+ : \bar{y} \geq y$, $(\mathbf{x}, \bar{y}) \in \mathbf{P}^C$, alors $\forall \bar{y} \in R_+ : \bar{y} > y$, $C(\bar{y}, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}'\,\mathbf{x}$, contradiction. Donc $\mathbf{P}^C$ vérifie $P2$. ♦

Proposition 22. Si C est définie et vérifie
$C1$ (Positivité),
$C2$ (Homogénéité positive de degré un en $\mathbf{p}$),
$C3$ (Croissance en $\mathbf{p}$),
$C4$ (Concavité en $\mathbf{p}$),
$C5$ (Continuité en $\mathbf{p}$),
$C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
C9 (Homogénéité en y),
$\mathbf{P}^C$ vérifie $P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P3$ (Libre disposition des facteurs),
$P5$ (Convexité),
P6 (Rendements d'échelle constants).

Démonstration.

Soit $(\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^C$, soit $\lambda \geq 0$. $\forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}'\,\mathbf{x}$ et d'après $C9$, $C(\lambda\, y, \mathbf{p}) = \lambda\, C(y, \mathbf{p}) \leq \lambda\, \mathbf{p}'\,\mathbf{x}$, donc $(\lambda\,\mathbf{x}, \lambda\, y) \in \mathbf{P}^C$. ♦

Ainsi, toute fonction qui vérifie les propriétés d'une fonction de coût peut être considérée comme la fonction de coût dérivant de l'ensemble des possibilités de production qu'elle permet de construire. La structure circulaire de la figure 4 illustre l'équivalence entre les deux représentations de la technologie.

Proposition 23. Si C est définie et vérifie
$C1$ (Positivité),
$C2$ (Homogénéité positive de degré un en $\mathbf{p}$),
$C3$ (Croissance en $\mathbf{p}$),
$C4$ (Concavité en $\mathbf{p}$),
$C5$ (Continuité en $\mathbf{p}$),
$C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
soit $y > 0$, soit $\mathbf{p}^* >> \mathbf{0}$, soit $\mathbf{x}^*$ un vecteur positif qui vérifie $C(y, \mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^{*\prime}\,\mathbf{x}^*$ et $(\mathbf{x}^*, y) \in \mathbf{P}$.
Si C est dérivable en $\mathbf{p}$ au point $(y, \mathbf{p}^*)$, alors $\mathbf{x}^* = \nabla_{\mathbf{p}}(y, \mathbf{p}^*)$.

Démonstration.

Soit $y > 0$, soit $\mathbf{p}^* >> \mathbf{0}$, soit $\mathbf{x}^*$ un vecteur qui vérifie $C(y, \mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^{*\prime}\,\mathbf{x}^*$ et $(\mathbf{x}^*, y) \in \mathbf{P}$. $\forall\, \mathbf{p} >> \mathbf{0}$, on définit $g(\mathbf{p}) \equiv C(y, \mathbf{p}) - \mathbf{p}'\,\mathbf{x}^*$. Comme $C(y, \mathbf{p}^*)$ est le coût minimal associé à la production de y, $\forall\, \mathbf{p} >> \mathbf{0}$, $g(\mathbf{p}) \leq 0$, et $g(\mathbf{p})$ atteint son maximum global au point $\mathbf{p}^*$. Si C est dérivable en $\mathbf{p}$ au point $(y, \mathbf{p}^*)$, $g(\mathbf{p})$ est dérivable en $\mathbf{p}$ au point $\mathbf{p}^*$ et sa dérivée s'annule en $\mathbf{p}^*$: $\nabla_{\mathbf{p}}\, g(\mathbf{p}^*) = \nabla_{\mathbf{p}}\, C(y, \mathbf{p}^*) - \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. ♦

Cette proposition, qui répond à la question Q2, est le lemme de Shephard. Elle montre que sous les hypothèses de coût des facteurs non nul et de comportement de maximisation en environnement concurrentiel, les quantités de facteurs demandées par le producteur sont obtenues en différentiant la fonction de coût par rapport aux prix des facteurs.

Pour obtenir ces demandes en utilisant la fonction de production il faut résoudre le programme de maximisation du gain monétaire. Les conditions du premier ordre donnent un système d'équations mais il n'est toujours possible de le résoudre analytiquement.

c) Fonction de production — Fonction de coût

La combinaison des propositions 8 et 18 permet d'obtenir le résultat suivant qui est le résultat fondamental de la dualité.

Corollaire 1. Si **P** vérifie $P0$ (Régularité),
$P1$ (Fermeture),
$P2$ (Production finie à facteurs finis),
$P3$ (Libre disposition des facteurs),
$P4$ (Libre disposition du produit),
$P5$ (Convexité),

$\mathbf{P}^F = \mathbf{P}^C$.

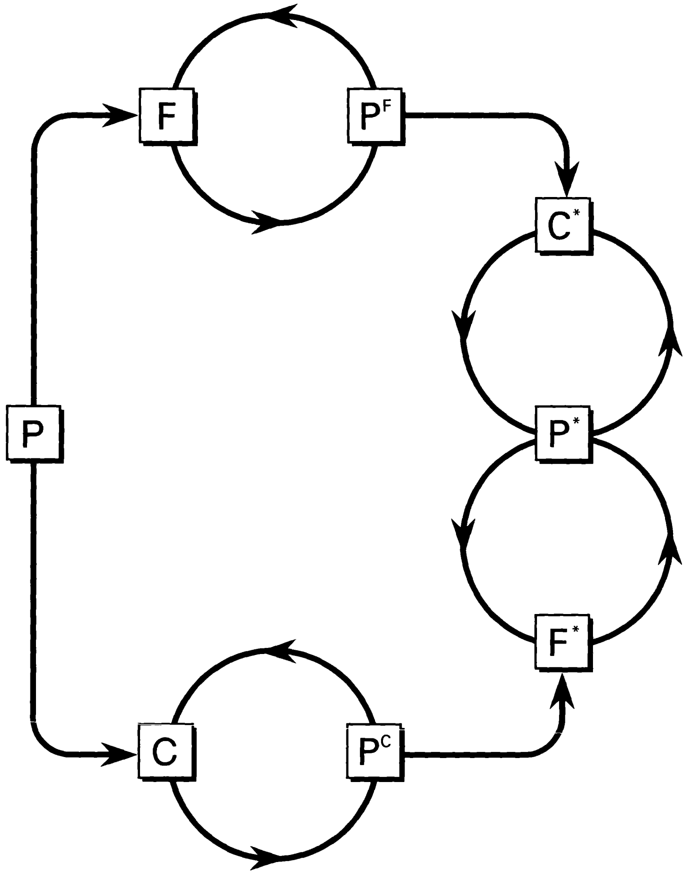
Ce corollaire permet d'aller plus loin encore que les propositions 9 et 19. On retrouve dans la figure 5 les figures 1 et 3 précédentes. On peut alors considérer chaque ensemble de possibilités de production induit comme un ensemble de départ pour construire de nouvelles fonctions de coût et de production :

En construisant une fonction de coût C^* à partir de $\mathbf{P}^F$, on obtient un ensemble de possibilités de production induit $\mathbf{P}^{FC}$ qui à sont tour permet de construire une fonction de coût égale à C^*, d'après la proposition 19.

En construisant une fonction de production F^* à partir de $\mathbf{P}^C$, on obtient un ensemble de possibilités de production induit $\mathbf{P}^{CF}$ qui à son tour permet de construire une fonction de production égale à F^*, d'après la proposition 9.

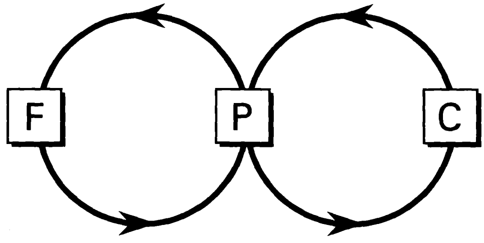
Le corollaire 1 permet alors de poser l'égalité $\mathbf{P}^{FC} = \mathbf{P}^{CF}$ (dans la figure 5 on note cet ensemble $\mathbf{P}^*$). La double boucle obtenue représente l'identité de l'information contenue dans F^*, C^* et $\mathbf{P}^*$. Ainsi si on recommençait la construction d'une fonction de production ou d'une fonction de coût une seconde fois à partir de $\mathbf{P}^{FC}$, on obtiendrait la même fonction de production F^* ou la même fonction de coût C^*.

FIGURE 5



Si **P** vérifie les hypothèses $P0$ (Régularité), $P1$ (Fermeture), $P2$ (Production finie à facteurs finis), $P3$ (Libre disposition des facteurs), $P4$ (Libre disposition du produit), $P5$ (Convexité), alors le schéma est réduit à la double boucle, puisque on a l'égalité $\mathbf{P} = \mathbf{P}^F = \mathbf{P}^C$.

FIGURE 6



On peut présenter directement l'équivalence entre la fonction de production et la fonction de coût sans utiliser l'ensemble des possibilités de production.

Si on dispose d'une fonction de production F, on définit l'ensemble des productions réalisables implicite $\mathbf{Y}^F \equiv \{ y \,/\, \exists\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} : F(\mathbf{x}) \geq y \}$. On obtient un résultat analogue à celui de la proposition 13.

Corollaire 2. Si F est définie et vérifie

$F1$ (Semi-continuité supérieure),

on définit la fonction de coût C^F de $\mathbf{Y}^F \times R^n_{*+}$ dans R_+ qui donne pour tout niveau de production réalisable $y \in \mathbf{Y}^F$ et pour tout vecteur de prix des facteurs $\mathbf{p} >> \mathbf{0}$ le coût minimum de production :

$$C^F(y, \mathbf{p}) = \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}'\mathbf{x} \,/\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, F(\mathbf{x}) \geq y\}.$$

C^F vérifie
- $C1$ (Positivité),
- $C2$ (Homogénéité positive de degré un en $\mathbf{p}$),
- $C3$ (Croissance en $\mathbf{p}$),
- $C4$ (Concavité en $\mathbf{p}$),
- $C5$ (Continuité en $\mathbf{p}$),
- $C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
- $C7$ (Croissance en y),
- $C8$ (Absence de borne).

Démonstration.

D'après la proposition 7, on peut construire $\mathbf{P}^F$ qui vérifie $P0$, $P1$, $P2$, $P4$. D'après la définition de $\mathbf{P}^F$ le minimum s'écrit $\min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}'\mathbf{x} \,/\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^F\}$.

En appliquant les propositions 13, 14 et 15 on obtient le résultat. ♦

Réciproquement, si on dispose d'une fonction de coût C on définit l'ensemble des facteurs utilisables implicite $\mathbf{X}^C \equiv \{ \mathbf{x} \,/\, \exists\ y \geq 0 : \forall\ \mathbf{p} >> \mathbf{0},\ C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}'\mathbf{x} \}$. On obtient un résultat analogue à celui de la proposition 1.

Corollaire 3. Si C est définie et vérifie
- $C1$ (Positivité),
- $C2$ (Homogénéité positive de degré un en $\mathbf{p}$),
- $C3$ (Croissance en $\mathbf{p}$),
- $C4$ (Concavité en $\mathbf{p}$),
- $C5$ (Continuité en $\mathbf{p}$),
- $C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
- $C7$ (Croissance en y),
- $C8$ (Absence de borne),

on définit la fonction de production F^C de $\mathbf{X}^C$ dans R_+ qui donne pour tout vecteur de facteurs de production $\mathbf{x} \in \mathbf{X}^C$ le niveau de production techniquement efficace associé : $F^C(\mathbf{x}) = \max_y \{y \,/\, y \geq 0, \forall\, \mathbf{p} >> \mathbf{0}, C(y, \mathbf{p}) \leq \mathbf{p}'\mathbf{x}\}$.

F^C vérifie $F1$ (Semi-continuité supérieure),
$F2$ (Croissance),
$F3$ (Quasi-concavité).

Démonstration.

D'après les propositions 20 et 21 on construit $\mathbf{P}^C$ qui vérifie $P0$, $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$. D'après la définition de $\mathbf{P}^C$, le maximum s'écrit : $\max_y \{ y \,/\, y \geq 0, (\mathbf{x}, y) \in \mathbf{P}^C \}$.
En appliquant les propositions 1, 2 et 3 on obtient le résultat. ♦

On définit l'ensemble des productions réalisables implicite $\mathbf{Y}^{FC}$ et en appliquant le corollaire 2 on construit une fonction de coût C^{FC} à partir de F^C.

Corollaire 4. Si C est définie et vérifie
$C1$ (Positivité),
$C2$ (Homogénéité positive de degré un en $\mathbf{p}$),
$C3$ (Croissance en $\mathbf{p}$),
$C4$ (Concavité en $\mathbf{p}$),
$C5$ (Continuité en $\mathbf{p}$),
$C6$ (Semi-continuité inférieure en y),
$C7$ (Croissance en y),
$C8$ (Absence de borne),
$\forall y \in \mathbf{Y}^{FC}, \forall \mathbf{p} >> \mathbf{0}, C^{FC}(y, \mathbf{p}) = C(y, \mathbf{p})$.

Démonstration.

On peut construire à partir de la fonction C l'ensemble $\mathbf{P}^C$ qui vérifie $P0$, $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$, qui permet à son tour de construire F^C, qui permet de construire $\mathbf{P}^{FC} = \mathbf{P}^C$ d'après la proposition 8. La démonstration du corollaire 2 montre que C^{FC} est égale à la fonction de coût que l'on construit d'après $\mathbf{P}^{FC} = \mathbf{P}^C$. Donc $C^{FC} = C$ d'après la proposition 19. ♦

On obtient le résultat suivant quand on définit l'ensemble des facteurs utilisables implicite $\mathbf{X}^{CF}$ et la fonction de production F^{CF} à partir de C^F en appliquant le corollaire 3.

Corollaire 5. Si F est définie et vérifie
$F1$ (Semi-continuité supérieure),
$F2$ (Croissance),
$F3$ (Quasi-concavité),
$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}^{CF}, F^{CF}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$.

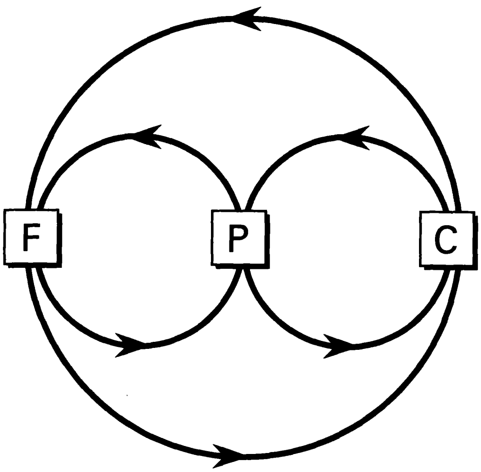
Démonstration.

On peut construire à partir de F l'ensemble $\mathbf{P}^F$ qui vérifie $P0$, $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$, qui permet à son tour de construire C^F, qui permet de construire

$\mathbf{P}^{CF} = \mathbf{P}^{F}$ d'après la proposition 18. La démonstration du corollaire 3 montre que F^{CF} est égale à la fonction de production que l'on construit d'après $\mathbf{P}^{CF} = \mathbf{P}^{F}$. Donc d'après la proposition 9, $F^{CF} = F$. ♦

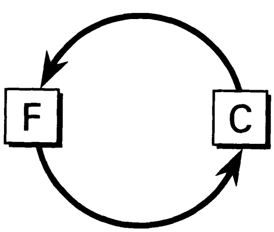
On peut illustrer l'équivalence de l'information contenue dans les deux représentations de la technologie avec le schéma suivant.

FIGURE 7



Ce schéma fait apparaître explicitement le rôle de l'ensemble des possibilités de production. Ce rôle est masqué dans le suivant, qui illustre les corollaires 4 et 5.

FIGURE 8



4. CONCLUSION

Quand l'ensemble des possibilités de production, qui est la représentation la plus proche de la technologie, vérifie les hypothèses $P0$ (Régularité), $P1$ (Fermeture), $P2$ (Production finie à facteurs finis), $P3$ (Libre dispositition des facteurs), $P4$ (Libre disposition du produit), $P5$ (Convexité), on peut utiliser indifféremment la fonction de production ou la fonction de coût pour présenter cette technologie : l'information contenue dans chacune des représentations est la même. Ceci ne signifie pas que les deux fonctions ont la même interprétation; comme on l'a vu, la fonction de production indique le niveau de production techniquement efficace associé à un vecteur de facteurs de production, la fonction de coût le coût minimal associé à la production d'une quantité de produit à des prix strictement positifs donnés[2]. Cependant l'information économique que contient globalement chacune des fonctions est la même.

Si on se donne une fonction de R_+^n dans R_+, elle ne représente une fonction de production que si elle vérifie au moins $F1$ (Semi-continuité supérieure). Pour déterminer les demandes de facteurs il faut résoudre le programme de maximisation du producteur, tâche qui devient ardue dès que la fonction a une forme compliquée[3].

Si on se donne une fonction de $R_+ \times R_{*+}^n$ dans R_+, elle ne représente une fonction de coût que si elle vérifie au moins $C1$ (Positivité), $C2$ (Homogénéité positive de degré un en $\mathbf{p}$), $C3$ (Croissance en $\mathbf{p}$), $C4$ (Concavité en $\mathbf{p}$), $C5$ (Continuité en $\mathbf{p}$), $C6$ (Semi-continuité inférieure en y). En imposant de plus la dérivabilité par rapport aux prix, on peut utiliser le lemme de Shephard pour déterminer les demandes de facteurs en fonction de la quantité de produit et des prix des facteurs par simple dérivation.

Cette propriété de la fonction de coût est le fondement des travaux économétriques qui estiment des fonctions de coût pour analyser le comportement du producteur. Il faut cependant souligner l'hypothèse fondamentale d'environnement concurrentiel : si le producteur ne considère pas les prix comme des données, toute la construction s'écroule.

BIBLIOGRAPHIE

DIEWERT, W. Erwin (1971). « An Application to the Shephard Duality Theorem : A Generalized Leontief Production Function », *Journal of Political Economy*, 79 (3), 481-507.

DIEWERT, W. Erwin (1974), « Applications of Duality Theory », *in* : M.D. Intriligator et D.A. Kendrick (*eds.*), *Frontiers of Quantitative Economics, Vol II*, Amsterdam : North-Holland, 106-354.

2. On peut étendre la fonction de coût aux vecteurs de prix positifs ou nuls par continuité.
3. Voir Fuss, McFadden, Mundlak (1978) pour la présentation de différentes formes fonctionnelles de la fonction de production.

DIEWERT, W. Erwin (1982), « Duality Approaches to Microeconomic Theory », *in*: K.J. Arrow et M.D. Intriligator (*eds.*), *Handbook of Mathematical Economics, Vol. II*, Amsterdam: North-Holland, 535-599.

FUSS, Melvyn et Daniel MCFADDEN (1978), *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications. Vol I: The Theory of Production*, Amsterdam: North-Holland.

FUSS, Melvyn, Daniel MCFADDEN et Yair MUNDLAK (1978), « A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production », *in*: M. Fuss ET D. McFadden (*eds.*), 219-268.

MALINVAUD, Edmond (1982), *Leçons de théorie microéconomique* (4 e ed.), Paris: Dunod.

MCFADDEN, Daniel (1978), « Cost, Revenue and Profit Functions », *in*: M. Fuss et D. McFadden (*eds.*), 3-109.

ROCKAFELLAR, R. Tyrrell (1970), *Convex Analysis*, Princeton: Princeton University Press.

SHEPHARD, Ronald W. (1953), *Cost and Production Functions*, Princeton: Princeton University Press.

SHEPHARD, Ronald W. (1970), *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton: Princeton University Press.

VARIAN, Hal R. (1978), *Microeconomic Analysis*, New York: Norton.