L'Actualité économique

La programmation déterministe du budget de capital : un modèle financier
Deterministic Programming for Capital Budgeting: a Financial Model

Jean-Pierre D. Chateau

Volume 50, Number 3, juillet–septembre 1974

Montréal : problèmes de croissance et éléments d'une stratégie de développement

URI: https://id.erudit.org/iderudit/803057ar
DOI: https://doi.org/10.7202/803057ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Chateau, J.-P. D. (1974). La programmation déterministe du budget de capital : un modèle financier. *L'Actualité économique*, *50*(3), 415–449. https://doi.org/10.7202/803057ar

Article abstract

The financial model presented in the article attempts to further integrate capital budgeting into the firm's overall financial planning policy. Although it is an extension and generalization of Bernhard and Weingartner's previous models, it differs from these works by some basic assumptions related to both the objective function and constraint set.

First, the objective function stresses the growing role of managerial discretion as opposed to the common assumption of maximizing shareholders' wealth. In particular we assume that managers wish to maximize the size of the firm under their control at the end of some future time horizon. Since net cash flows of the investment projects selected are sources of future investment funds, the managers try to keep the shareholders' dividends to a minimum level, sufficient enough however to pacify them.

Secondly, the model constraints embody the complete set of financial instruments available to the corporation managers: in a sense, this enlarges the previous models' short-term external financing facilities by considering simultaneously the alternative long-term external financial instruments, namely equity and bond issues. In the latter case, the refunding features are incorporated in the constraints. The constraints also imply that managers prefer steady growth of net cash flows through time. This contrasts with the usual maximization approach which has been shown to favor long-term investment projects with somewhat more erratic net cash flows.

The derivation of the Kuhn and Tucker conditions for the model allows us to show the impact of the opportunity cost of the various instruments on that of the liquidity requirement and the investment projects selection criterion. Finally, the duality properties also highlight the reciprocal relationships existing between the various opportunity costs, both internal and external.

LA PROGRAMMATION DÉTERMINISTE DU BUDGET DE CAPITAL : UN MODÈLE FINANCIER*

I. INTRODUCTION ET SOMMAIRE

Le présent article a pour thème central la formulation d'une programmation financière déterministe du budget de capital, et ce, pour les firmes contemporaines. A l'encontre des programmations antérieures de Weingartner [17] et Bernhard [2] — quoique cette dernière constitue déjà une première ébauche de généralisation — le modèle vise à intégrer le budget de capital, et sa programmation, dans les décisions globales, surtout financières, de l'entreprise.

Tout en se voulant une synthèse des apports de modèles antérieurs, la présente approche s'avère surtout novatrice dans sa formulation d'une politique de décision contemporaine, ainsi que dans son élargissement du champ des contraintes d'environnement du modèle. Explicitons brièvement dès lors les hypothèses nouvelles émises.

Tout d'abord, pourquoi qualifier la politique de décision du modèle financier de contemporaine ? Elle nous semble contemporaine parce que nous considérons que la technostructure des grandes sociétés reflète, grosso modo, l'image de l'entreprise contemporaine, entreprise où le divorce entre les actionnaires et les managers est consommé ; ces derniers assument la prise de décision et imposent leurs vues au groupe des porteurs de titres. Aussi, en vue de perpétuer leur statut socio-professionnels, les managers vont promouvoir une politique d'accumulation de richesses [1] (les actifs), considérant évidemment les dividendes comme

* Au fil de diverses versions, nous avons bénéficié des avis et critiques constructives de nos collègues de l'U.E.R. de Sciences Economiques de Paris X, MM. A. Babeau, M. Desplas et R. Perez. Nous remercions particulièrement aussi notre collègue de l'Ecole des Hautes Etudes commerciales de Montréal, J.-L. Goffin, pour nous avoir poussé, lors de maintes sessions de discussions, à dépouiller et à améliorer la structure mathématique de notre modèle. Il va toutefois de soi que la pleine et entière responsabilité des opinions émises, ainsi que celle des erreurs éventuelles, nous incombent.

1. Cette approche des revenus (versus celle des dividendes) est à caractère stock, c'est-à-dire d'accumulation et de réinvestissement de flux financiers *(cash flows)* jusqu'à un horizon temporel ; comme avec le temps flux et stock croissants deviennent de

une fuite de liquidité qu'il convient de juguler en la maintenant à un minimum plancher, suffisant toutefois, pour prévenir une fronde des actionnaires.

Afin d'asseoir leur situation, les managers sont alors prêts à envisager un large éventail de paramètres et contraintes de la budgétisation du capital, pour autant cependant que les décisions d'investissement qu'ils prennent dans ce cadre leur assurent, pour les actifs — les *cash flows* nets des projets retenus —, la stabilité dans la croissance.

Aussi les contraintes d'environnement du modèle financier refléteront-elles des politiques comme celles de distribution de dividendes, de liquidité, de période de récupération et, surtout, de financement externe à court et long terme. C'est principalement d'ailleurs par ces politiques de financement, par actions et obligations (et leurs modalités de remboursement), que les contraintes d'environnement du modèle se singularisent des formulations antérieures. La prise en considération de l'ensemble des instruments de financement permet dès lors d'avancer que la programmation du budget de capital s'insère dans le cadre des décisions globales de l'entreprise.

Cet aperçu du thème central de l'article nous amène alors à donner les modalités d'analyse de celui-ci. Il s'agence autour des points principaux suivants : la symbolique du modèle, la définition et la formulation de la fonctionnelle et des contraintes, enfin, les conditions de Kuhn et Tucker et leurs implications financières. Parmi celles-ci, nous traiterons, entre autres, du critère d'acceptation des projets, du coût implicite des disponibilités financières et des coûts d'opportunité des instruments de financement externe. L'importance de ces derniers nous amènera d'ailleurs à consacrer, en fin d'analyse, certains développements à leurs relations réciproques ainsi qu'à celle existant avec le coût d'opportunité interne.

Deux mises en garde s'imposent toutefois avant d'aborder le modèle : d'une part, afin de nous concentrer sur ses aspects spécifiques, nous omettrons les développements qui s'avèrent être identiques à ceux de modèles antérieurs — principalement ceux de Weingartner et Bernhard — auxquels on se réfèrera. D'autre part, afin de ne point alourdir l'exposition, nous restreignons celle-ci aux considérations théoriques du modèle, la programmation empirique de celui-ci et les illustrations numériques faisant l'objet d'une publication ultérieure.

---

plus en plus importants par rapport aux activités en cours à la période initiale, la politique d'accumulation de richesses s'identifie progressivement à celle de maximisation de la valeur de la société. Il va de soi que ces richesses et ces investissements représentent des capacités, souvent monopolistiques, de production (grande société de marché ou d'intégration verticale) ou d'intervention financière (holding ou conglomérat).

II. LE MODÈLE FINANCIER

2.1 SYMBOLIQUE

Posons successivement les définitions des paramètres et variables du modèle. Soit, tout d'abord, celles des paramètres et constantes :

a_{tj} le *cash flow* net d'une unité de projet j à la période t. $j : 1 \dots n$. $t : 1 \dots T$. Etant donné que $a_{tj} = r_{tj} - c_{tj}$, la différence entre les revenus et coûts, un signe positif implique une entrée de fonds, un signe négatif, une sortie.

$\hat{a}_j$ la valeur actualisée, à l'horizon temporel T, des *cash flows* nets postérieurs à celui-ci d'une unité de projet j. En faisant l'hypothèse d'un taux d'actualisation externe unique pour la période postérieure à l'horizon temporel et égal au taux d'intérêt, souvent le taux créditeur, $\lambda_t = \lambda = 1 + r_l$, $\hat{a}_j$ se définit alors comme

$$\sum_{t=T+1}^{\infty} \left[a_{tj} \prod_{\tau=T+1}^{t} \lambda_{\tau-1}^{-1} \right]$$

b_{it} $1 + r_{bit}$ où r_{bit} désigne le taux d'intérêt débiteur (constant) de t en $t+1$ du ième segment de la courbe marginale d'offre de fonds (à pente positive) à court terme (ligne de crédit) $t : 1 \dots T$, $i : 1 \dots m$.

$b_{i-1,t} < b_{it} < b_{i+1,t}$ indique que la borne supérieure d'un segment est atteinte avant de procéder à des emprunts à un taux supérieur. La borne supérieure du m[ième] segment n'est jamais atteinte, le taux étant soit trop élevé, soit supérieur à celui d'autres instruments de financement disponibles à long terme. Enfin, $b_{iT} = b_{1T} = b_T$ dont la justification est donnée lors de la définition du symbole w_{it}.

$b_t =$ $1 + r_{Bt}$ où r_{Bt} désigne le taux d'intérêt débiteur (constant) de t en $t+1$ des dettes obligataires à long terme, $t : 1 \dots T-1$. Omettant les frais d'émissions des obligations industrielles, ce taux nominal est fonction du taux d'endettement et du *credit rating* de l'entreprise.

$b_{et} =$ $1 + r_{et}$ où r_{et} désigne le taux débiteur (constant) de t en $t+1$ des nouvelles émissions de titres (capital-actions), $t : 1 \dots T-1$. Ce taux est obtenu à partir de l'expression $D_a/P_a \cdot [T_c \cdot (D_a/P_{r,a})]^{-1}$ où D_a, P_a et $P_{r,a}$ représentent respectivement le dividende, le prix et le profit net par action et, T_c, le taux d'imposition des profits de sociétés[2]. Ce taux étant nominal, il omet les frais d'émission relatifs à l'accroissement du capital-actions.

$b_{jt} < b_t < b_{et}$ ou encore, par truisme, $r_{bit} < r_{Bt} < r_{et}$.

B_{it} — la borne supérieure de la capacité d'emprunt du i$^{\text{ème}}$ segment de la courbe marginale d'offre de fonds à court terme (ligne de crédit) au cours de la période t, $t : 1 \dots T - 1$.

D_t^A — le montant plafond de l'emprunt obligataire à long terme au cours de la période t, $t : 1 \dots T - 1$. Celui-ci est fonction du levier financier défini à la période initiale D_0^{LT}/E_0, où D^{LT} désigne les dettes obligataires à long terme.

$d_{min\,0}$ — dividende minimal versé au cours de la période initiale c'est-à-dire le montant plancher de la distribution au cours de cette période.

d_{tj} — la quantité de ressources physiques requises par unité de projet j au cours de la période t, $t : 1 \dots T$.

d_t — le montant de ressources physiques disponibles en t ; ces ressources représentent les intrants tels que la main-d'œuvre, les matières premières, etc. $t : 1 \dots T$.

E_t — Capital-actions émis et libéré au cours de la période t, $t : 1 \dots T - 1$; E_0 capital-actions à la période initiale.

F_0 — le montant minimal (plancher) de *cash flows* nets attendu à la période 0. Idem pour F_T, à l'horizon temporel.

l_t — $1 + r_{lt}$ où r_{lt} désigne le taux d'intérêt créditeur à court terme de t en $t + 1$ (e.g. le taux bancaire), $t : 1 \dots T - 1$.

$l_t < b_{1t}$ — ou encore, par truisme, $r_{lt} < r_{b1t}$. Il en va dès lors de même pour $l_t < b_{it}$ et $r_{lt} < r_{bit}$ respectivement.

M_t' — le montant de disponibilités financières (généralement l'autofinancement brut, c'est-à-dire l'épargne nette interne et les provisions d'amortissement de l'entreprise) dérivées de sources externes à l'analyse du budget de capital. Ces *cash throwoffs* anticipés d'activités en cours à la période initiale, seront généralement décroissants avec le temps ; éventuellement ils deviendront négatifs. $t : 1 \dots T$.

---

2. Ainsi, par exemple, pour une distribution monétaire *(dividend yield)* égale à 3% de la valeur boursière du titre, un taux d'imposition fiscale de 50% et un *payout ratio* de 50% (pourcentage des profits nets alloué à la distribution), le coût marginal du capital-actions additionnel est de 12%, [3%/(50%)(50%)].

$\hat{M}'$ la valeur ajoutée en T de disponibilités financières postérieures à cette date et dérivées de sources externes à la présente analyse. Sous l'hypothèse d'un taux d'actualisation unique au cours du temps et égal au taux d'intérêt, souvent le taux créditeur, $\lambda_t = \lambda = 1 + r_l$, $\hat{M}'$ se définit comme

$$\sum_{t=T+1}^{\infty} \left[\hat{M}'_t \prod_{\tau=T+1}^{t} \lambda_{\tau-1}^{-1} \right].$$

Soit maintenant la définition des variables du modèle financier.

OD_T le montant de dettes obligataires exigibles à la période T, l'horizon temporel.

G_T la valeur nette de l'entreprise, c'est-à-dire des actifs physiques et financiers, à l'horizon temporel T.

s_t le montant de fonds générés par l'émission additionnelle de capital-actions au cours de la période t, $t : 1 \ldots T-1$.

v_t le montant de fonds disponibles en vue de prêts à court terme de t en $t+1$. Ce montant s'entend au-delà de la contrainte de liquidité déterminée par la trésorerie, $C_t \, . \, v_0 \equiv 0$.

w_{it} le montant de fonds empruntés à court terme au taux b_{it} du $i^{ème}$ segment de la courbe marginale d'offre (lignes de crédit bancaire) au cours de la période t, $t : 1 \ldots T-1$, $i : 1 \ldots m$ et $w_{i0} \equiv 0$. En supposant de plus qu'à la période T le taux débiteur est constant, $b_{iT} = b_T$, le barème d'offre de fonds devient une droite et w_{iT} devient w_T uniquement. Enfin, à l'encontre des périodes antérieures, le financement à court terme n'est pas plafonné, c'est-à-dire que $B_T = \infty$.

$\hat{w}_t$ le montant de fonds générés par l'émission d'obligations industrielles (dettes obligataires) à long terme au cours de la période t, $t : 1 \ldots T-1$.

W_t le dividende monétaire distribué aux actionnaires au cours de la période t, $t : 1 \ldots T$.

x_j la portion ou le nombre d'unités du projet j retenu, $j : 1 \ldots n$.

$*$ indique le niveau optimum d'une variable active, i.e. x_j^*.

2.2 LA FONCTION OBJECTIF

Supposons que la grande entreprise soit le reflet de l'entreprise contemporaine ; si c'est le cas, les préoccupations des managers, les représentants de la technostructure, primeront très souvent celles des actionnaires. Aussi la fonction objectif du modèle visera plutôt à optimiser la valeur de la firme — c'est-à-dire, dans le cadre du budget de capital, la valeur des actifs physiques et financiers — qu'à maximiser la distribution de dividendes monétaires. Nous considérerons [3] dès lors la politique de distribution comme une contrainte d'environnement et ce, à l'encontre de Baumol et Quandt [1], Bernhard [2] et Weingartner [17b]. Pour les managers, qui sont souvent des professionnels de la gestion peu liés à la propriété financière de l'entreprise, la politique de distribution est perçue comme une contrainte qu'il convient toutefois de satisfaire pour éviter une fronde des actionnaires ; aussi cette politique est-elle régie par le principe du minimum plancher.

Etant donné, d'autre part, la nature humaine des managers, ceux-ci possèdent une fonction d'utilité qui leur permet d'actualiser, à la période initiale, toute valeur monétaire déterminée à l'horizon temporel. Sous l'hypothèse d'utilité marginale constante de la monnaie [4], $U_0 \geqq U_1 \dots \geqq U_T > 0$ d'où, lorsque $U_0 = 1$, $U_t/U_0 = (1 + i_t)^{-t}$ ou encore, lorsque $i_t = i$, $(1+i)^{-t}$. Cette hypothèse permet d'actualiser à un taux externe, i.e. un taux d'intérêt du marché à long terme, la valeur cumulée à l'horizon temporel, des actifs physiques et financiers.

Soit alors la fonction objectif à optimiser :

$$U_T(G_T) \text{ ou encore la structure particulière } (1-i)^{-T}G_T. \quad (0)$$

La fonction d'utilité $U_T(.)$ est par hypothèse concave et de classe C^2.

2.3 LES CONTRAINTES

Pour chaque contrainte, nous indiquons, entre crochets et à droite de l'expression, la variable de K-T correspondante. La dérivation et la signification de ces dernières seront explicitées ultérieurement à la section III.

2.3.1 *Contraintes de disponibilités financières [5], y compris celles de financement et de liquidité*

Faisons l'hypothèse que la firme requiert, au cours de chacune des périodes, des liquidités monétaires [6], C_t, sa trésorerie (contrainte de

---

3. Pour une discussion plus détaillée de la programmation déterministe du budget de capital et de ses questions connexes, on se référera à Chateau {7}.

4. Cette hypothèse n'exclut point, en vue d'incorporer l'aversion au risque, toute autre hypothèse sur la fonction d'utilité, i.e., une fonction exponentielle, quadratique ou logarithmique.

5. Sous forme d'égalité et après réarrangement des divers termes, ces contraintes deviennent des identités de *cash balance*.

6. A l'encontre de Bernhard {2}, la trésorerie n'implique ici aucun montant proportionnel à l'endettement à long terme exigible puisque celui-ci est remboursé ultérieurement au cours de la programmation (se référer aux modalités du financement obligataire à long terme).

liquidité), et qu'elle dispose, en vue de procéder à la réalisation de ses activités d'investissement, de divers instruments de financement.

Parmi ceux-ci, elle dispose tout d'abord de lignes de crédit bancaire à taux débiteur croissant, w_{it} [7] ; celles-ci constituent un mode de financement à court terme remboursable au cours de l'année suivante (s'il s'agit d'un *revolving credit,* il y aura reconstitution de la ligne de crédit au fur et à mesure du remboursement des exigibles).

A plus long terme ensuite, l'entreprise finance ses activités soit par emprunt obligataire, $\hat{w}_t$, soit par émission additionnelle de titres, s_t. (augmentation du capital-actions).

Etant donné l'indivisibilité des emprunts et émissions, les fonds non investis en activités (surplus), $\omega_t s_t$ et $\delta_t \hat{w}_t$, $0 \leqq \omega_t$ et $\delta_t \leqq 1$, sont soit prêtés, soit différés à la période suivante ; dans chacun des cas, ils portent intérêt au taux créditeur. Si l'émission de titres n'entraîne d'autre obligation qu'une distribution, optionnelle d'ailleurs, de dividendes aux actionnaires, les emprunts obligataires sont remboursables par partie au cours des années ultérieures (dans le cas présent, nous supposons un remboursement annuel, η, égal à 10 p.c. du montant global et ce, à partir de l'année suivant la période de financement, soit : $\sum_{\tau=1}^{10} \hat{w}_{t-\tau}\ \eta)$; quant aux intérêts, ils courent dès la période de financement sur le montant exigible, c'est-à-dire le solde annuel décroissant [8], soit : $\sum_{\tau=1}^{10} r_{B,\,t-\tau}\,[11-\tau]\eta\hat{w}_{t-\tau}$.

Les contraintes de disponibilités financières s'écrivent alors

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j + v_t - l_{t-1}v_{t-1} - \sum_{i=1}^{m} w_{it} + \sum_{i=1}^{m} b_{i,\,t-1}w_{i,\,t-1} - s_t - l_{t-1}\,w_{t-1}s_{t-1}$$
$$-\hat{w}_t - l_{t-1}\,\delta_{t-1}\hat{w}_{t-1} + \sum_{\tau=1}^{10} \hat{w}_{t-\tau}\eta(1 - \{r_{B,\,t-\tau}[11-\tau]\}) + C_t$$
$$-l_{t-1}\,C_{t-1} + W_t \leqq M'_t$$

7. Bernhard semble des plus conservateurs dans son financement à court terme : en effet, il gèle une partie de l'emprunt par son coefficient de trésorerie, trésorerie qui porte intérêt au taux créditeur (inférieur au taux débiteur). Etant donné que ces emprunts constituent des contrats annuels — Weingartner {17, p. 142} — dont la valeur cumulative est plafonnée, il semble peu réaliste de réduire artificiellement ce plafond par coefficient de trésorerie et ce, à un coût différentiel entre taux débiteur et créditeur.

8. A titre illustratif, si nous empruntons en t, $\hat{w}_t$, l'intérêt débiteur en $t+1$ portera sur le montant global du financement $\hat{w}_t$ quoique, au cours de la période $t+1$, nous remboursons déjà 10% de $\hat{w}_t$, $(\eta \hat{w}_t)$.

et s'énonce, dans l'ordre des termes : au cours de la période t, les *cash flows* nets, les prêts, financements à court et long terme (y compris les remboursements et intérêts obligataires requis), la trésorerie et la distribution de dividendes sont inférieurs ou égaux aux fonds d'autofinancement brut externes aux projets considérés.

Par convenance de programmation, celles-ci se récrivent [9]

$$- \sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j + v_t - l_{t-1}\,(\omega_{t-1}s_{t-1} + \delta_{t-1}\hat{w}_{t-1} + v_{t-1}) - \left(\sum_{i=1}^{m} w_{it} + s_t + \hat{w}_t\right) + \left[\sum_{i=1}^{m} b_{i,\,t-1}w_{i,\,t-1} + \sum_{\tau=1}^{10} \hat{w}_{t-\tau}\,\eta(1 + \{r_{B,\,t-\tau}\,[11 - \tau]\})\right]$$
$$+ W_t \leqq M_t \text{ où } M_t \equiv M'_t + l_{t-1}C_{t-1} - C_t \qquad t : 1 \dots T \qquad [\rho_t] \quad (1)$$

2.3.2 *Contraintes de financement à court terme*

Pour tout segment i et toute période antérieure à l'horizon temporel T, il y a plafonnement du financement à court terme. Soit :

$$w_{it} \leqq B_{it} \qquad t : 1 \dots T - 1, \quad i : 1 \dots m \qquad [\beta_{it}] \quad (2)$$

2.3.3 *Contraintes de financement à long terme (obligations)*

Au cours de toute période antérieure à l'horizon temporel, l'emprunt obligataire ne peut excéder la capacité de financement disponible à long terme, D_t^A ; celle-ci se définit comme la différence entre le montant optimal de dettes obligataires $,\pi\ E_t$, et celui des dettes exigibles au début de la période courante, soit : $OD_t = \sum_{\tau=1}^{10} \hat{w}_{t-\tau}\,\eta[11 - \tau]$. Quant au montant optimal [10] du financement obligataire, il se définit à partir du concept classique du levier financier, le *debt-equity ratio*, D_t^{LT}/E_t

9. Les contraintes (1) impliquent que les surplus d'indivisibilité des financements externes à long terme sont explicitement prêtés puisqu'ils apparaissent dans le second terme du membre de gauche de l'expression ; nous aurions pu également les assimiler aux prêts à court terme, v_t. Au cas où ces surplus sont assimilés à la trésorerie, ils apparaissent alors au membre de droite de l'expression qui se récrit :

$$M_t \equiv M'_t + l_{t-1}(\omega_{t-1}s_{t-1} + \delta_{t-1}\hat{w}_{t-1} + C_{t-1}) - C_t$$

Selon l'approche retenue, il va de soi que le coût d'opportunité de ces fonds, déterminé par les conditions de Kuhn et Tucker, s'avère être différent. Enfin, les surplus d'indivisibilité ne rendent plus mutuellement exclusifs les phénomènes de prêt et d'emprunt comme c'était le cas pour les emprunts à court terme dans les modèles de Weingartner et de Bernhard.

10. Plutôt que de chiffrer arbitrairement la capacité optimale de financement, indiquons que nous préférons la théorie classique du *debt-equity ratio* {fonction en U du taux d'intérêt) à celle de Modigliani et Miller (indépendance du taux débiteur et de la capacité de financement). Pour un taux débiteur donné, nous supposons qu'il existe une capacité optimale, variable selon les secteurs économiques. Cette capacité s'accroît toutefois, lorsqu'il y a accroissement du capital-actions.

où le capital-actions croît depuis la période initiale E_0 au taux annuel g. D'où : $D_t^{LT} = \pi E_0 e^{gt}$.

Par convenance de programmation, les contraintes de financement obligataire :

$$\hat{w}_t \leq D_t^A = D_t^{LT} - OD_t = \pi E_0 e^{gt} - \sum_{\tau=1}^{10} \hat{w}_{t-\tau} \eta[11-\tau]$$

se récrivent :

$$\hat{w}_t + \sum_{\tau=1}^{10} \hat{w}_{t-\tau} \eta[11-\tau] \leq \pi E_0 e^{gt} \quad t : 1 \ldots T-1 \qquad [\gamma_t] \quad (3)$$

2.3.4 *Contraintes de financement à long terme (actions)*

Au cours de toute période antérieure à l'horizon temporel, l'émission additionnelle de titres ne peut excéder une fraction (supposons environ 20 p.c.) du capital-actions émis et libéré au début de la période courante. Soit :

$$s_t \leq \varepsilon E_t = \varepsilon E_0 e^{gt} \quad t : 1 \ldots T-1 \qquad [\xi_t] \quad (4)$$

Quant à la cohérence interne entre les émissions de titres et le capital-actions existant, elle s'obtient de la façon suivante. Soit un taux de croissance cumulé du capital-actions de 5 p.c. et une capacité maximale d'émission additionnelle de 20 p.c. environ. Au bout de 4 ans, le nouveau capital-action correspondra à celui de l'année de l'émission de titres (à capacité saturée) pour autant qu'aucun autre accroissement du capital n'ait eu lieu entre-temps. Ces conditions sont remplies, nous le verrons plus loin, par l'introduction de contraintes additionnelles (13) qui imposent, lors du recours à cet instrument financier, une période subséquente de non émission de 3 ans.

2.3.5 *Contraintes de distribution de dividendes*

Afin de satisfaire le bien-être des porteurs de titres, les administrateurs décident de distribuer un dividende minimal, ce dernier étant fonction d'un plancher défini à la période initiale ($d_{min\,0}$) et d'un certain taux de croissance (α) de cette distribution. Selon les circonstances, le plancher comme le taux de croissance reflètent l'attitude [11] des managers vis-à-vis des actionnaires et de la croissance de l'entreprise. Par convenance de programmation $W_t \geq \alpha^{t-1} d_{min\,0}$ se récrit

$$-W_t \leq -\alpha^{t-1} d_{min\,0} \quad t : 1 \ldots T \qquad [\sigma_t] \quad (5)$$

11. Etant membres de la technostructure, les gestionnaires visent à préserver leur statut socio-professionnel : ils font dès lors des *tradeoffs* entre la distribution de fonds et le réinvestissement en vue de la croissance de l'entreprise, c'est-à-dire, en dernière analyse, en vue de perpétuer, voire d'accroître le montant des actifs qu'ils gèrent. Ceci évidemment influe sur la politique de distribution de la firme.

2.3.6 *Contraintes de croissance des actifs physiques*

Etant donné que la méthode des *cash flows* nets, actualisés ou non, favorise les projets à long terme et à revenus annuels erratiques [13], stipulons qu'à partir d'un moment donné, la valeur cumulée des *cash flows* net de projets retenus soit supérieure à un plancher arbitraire. En effet, les actifs physiques constituant une partie non négligeable de la valuation de la firme, les managers souhaitent que le prix des titres en bourse, qui reflète la valeur intrinsèque des actifs par action, soit relativement stable, voire en légère croissance. Une telle contrainte ne s'impose toutefois pas au cours des années initiales du budget de capital puisque c'est au cours de celles-ci que sont concentrés principalement les investissements (*cash flows* nets négatifs) en activités retenues [12]. Soit alors

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{t'} a_{\tau j}\, x_j \leq -F_0 e^{gt'} \quad \tfrac{2}{3}T < t' < T \qquad [\Psi_{t'}] \quad (6)$$

où t' représente les périodes (années) au cours du dernier tiers du budget de capital.

2.3.7 *Contraintes sur les ressources physiques*

La disponibilité d'intrants physiques (capital, main-d'œuvre, matières premières, etc.) limitant souvent la planification financière des projets considérés, stipulons un ensemble de contraintes sur ressources de forme générale

$$\sum_{j=1}^{n} d_{tj}x_j \leq d_t \quad t : 1 \ldots T \qquad [\nu_t] \quad (7)$$

Notons toutefois le caractère général de ces contraintes ; en réalité, celles-ci résument les conditions physiques de la production — i.e. les fonctions de production, les barèmes d'intrants et de demande de produits — qui, *de facto,* détermine la valeur des *cash flows.* Si nous n'avons pas développé ce secteur — on trouvera chez Moag et Lerner, [12] et [16], une optimisation sous contraintes physiques et financières simultanées — c'est que nous considérons ici la firme sous un angle strictement financier [13]. Celle-ci, au plan de la stratégie financière

12. Traditionnellement on recourt à une contrainte de payback {17c} sur chaque projet individuel, e.g. Bernhard {2} et BCCK {3} :

$$-\sum_{t=1}^{t'} a_{tj}x_j < 0 \qquad (6')$$

13. Remercions ici notre collègue R. Perez pour nous avoir indiqué l'acuité du problème et la dichotomie physique-financier.

d'investissement, considère surtout les rendements des investissements — le flux de *cash flows* — et ce, quel que soit le secteur d'activité économique considéré. Les managers ne se préoccupent pas des conditions physiques d'investissements — éventuellement celles-ci constituent un sous-programme pour chaque projet individuel [14] — ; lors de la maximisation de la valeur des actifs, seuls les intéressent les *cash flows,* qu'ils soient issus d'activités d'assurance, de télécommunication ou de location de voitures.

2.3.8 *Identité afférente à la définition de la valeur terminale*

La valeur, à l'horizon temporel, des actifs physiques et financiers est fonction des valeurs actualisées en T des *cash flows* nets postérieurs à T, issus de source externe, $\hat{M}$, ou *interne,* $\sum_{j}^{n} \hat{a}_j x_j$, au budget de capital, ainsi que de la trésorerie, de la distribution de dividende, et, des prêts et emprunts à court et à long terme. Soit :

$$G_T \equiv \hat{M}' + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + C_T - W_T + v_T - w_T - OD_T$$

Par convenance de programmation, l'identité se récrit

$$-\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + W_T - v_T + w_T + G_T + OD_T \equiv \hat{M}_T \text{ où } \hat{M}_T \equiv \hat{M}' + C_T \qquad [\Phi_T] \quad (8)$$

où OD_T est défini en (10).

2.3.9 *Contrainte sur l'horizon temporel de la valeur terminale*

Etant donné que nous avons introduit une contrainte sur les actifs physiques au cours des diverses périodes du budget de capital, nous requérons de nos managers qu'ils atteignent, à l'horizon temporel, une valeur terminale minimale (plancher) F_T cohérente avec les contraintes du type (6) ; cette valeur terminale doit aussi permettre de perpétuer la politique de distribution en vigueur à l'horizon temporel. Soit, dès lors, $G_T \geqq F_T + k(W_T)$ qui, par convenance de programmation, se récrit :

$$-G_T + k(W_T) \leqq -F_T \qquad [\theta_T] \quad (9)$$

où :

$$F_T = F_0 e^{gt} \quad t : 1 \dots T$$

14. Sur l'idée de sous-programme en budget de capital, on consultera avec intérêt, Carleton {4}.

2.3.10 *Identité de définition des dettes à long terme exigibles à l'horizon temporel*

A l'horizon temporel, nous apurons tout solde exigible afférent aux financements obligataires effectués au cours des périodes antérieures [15] ; les intérêts sur ces soldes sont calculés à l'aide des taux d'intérêt débiteurs en vigueur lors de l'émission des dettes obligataires (et non celui prévalant à l'horizon temporel). Soit :

$$\sum_{\tau=1}^{10} (1 + r_{B,\,T-\tau})\hat{w}_{T-t}\eta[11 - \tau] \equiv OD_T \qquad [\lambda_T] \quad (10)$$

2.3.11 *Contraintes d'occasion d'investissement*

En vue d'obvier au problème d'indivisibilité des projets, imposons une contrainte sur leur multiplicité. Soit :

$$0 \leq x_j \leq 1 \quad t : 1 \ldots n \qquad [\mu_j] \quad (11)$$

En requérant simultanément que les x_j prennent les valeurs binaires 0 ou 1, nous éliminons les projets fractionnaires : ceci ne peut toutefois se faire qu'au prix d'une difficulté croissante dans la recherche de solutions numériques[16]. Aussi, lors des développements subséquents, garderons-nous la contrainte (11) moins restrictive.

2.3.12 *Contraintes de non-négativité*

Celles-ci portent sur l'ensemble des variables décisionnelles ; soit pour les variables qui n'ont pas fait explicitement l'objet de restrictions analogues au cours de la formulation des contraintes.

$$OD_T,\ s_t,\ v_t,\ w_{it},\ \hat{w}_t \geq 0 \quad t : 1 \ldots T \qquad (12)$$

2.3.13 *Contraintes de financement alternatif*

En vue d'accroître le réalisme du modèle financier, introduisons certaines contraintes additionnelles propres à donner un caractère alter-

15. En considérant un taux de remboursement du principal de 10%, le solde exigible le plus éloigné de l'horizon temporel sera donc relatif à l'emprunt effectué au cours de la période $T - 10$.

16. Weingartner, dès 1963, avait mis en évidence les difficultés additionnelles introduites par la condition binaire d'intégralité {17, chap. 5}, notamment pour l'interprétation des valeurs duales. A cette occasion, il établissait également la borne supérieure sur le nombre de projets fractionnaires {17, 3.3 et 3.8} ainsi qu'une procédure {17, 5.8 et 5.9} propre à assurer l'unicité de la solution optimale. Celle-ci est d'ailleurs supérieure à la technique des Lagranges généralisés {8} dont les multiplicateurs (d'Everett), dans le problème du budget de capital, sont dans certains cas inexistants et la solution numérique qu'une approximation de la solution optimale réelle {5}, {8a} et {17a}. Plus récemment Lawler et Bell {11} ont présenté un algorithme de programmation en variables entières et Mao et Wallingford {15} ont étendu la procédure à la fonction objectif quadratique avec illustration de celle-ci pour la programmation du budget de capital.

natif au financement à long terme. En effet, il est généralement admis que toute entreprise obtient des lignes de crédit bancaire au cours de chaque période.

Pour le financement à long terme, par contre, il semble plus réaliste de ne point considérer le recours simultané de l'entreprise aux deux instruments disponibles : soit que l'endettement obligataire s'avère trop important, soit que les actionnaires ne souhaitent point une dilution du capital-actions. Aussi proposons-nous un financement externe à long terme alternatif, soit obligation soit action, avec préemption de l'instrument retenu pour un certain nombre d'années (période de grâce) à partir de l'année de saturation du financement considéré. Soit les contraintes additionnelles représentatives de cette hypothèse :

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } \hat{w}_t \leqq P_{1t}\,\delta_t D_t^A & & \\
\text{b) } s_t \leqq P_{2t}\,(1-\delta_t)\,\varepsilon E_t & t: 1 \dots T-1 & \\
\text{c) } 0 \leqq \delta_t \leqq 1 & \delta_t \text{ entiers} & (13)\\
\text{d) } 0 \leqq P_{it} \leqq 1 & P_{it} \text{ entiers} & \\
\text{e) } P^*_{1t} + P^*_{1t+1} \leqq 1 & P^*_{2t} + P^*_{2t+1} + P^*_{2t+2} \leqq 1 &
\end{array}$$

La formulation ci-dessus implique non seulement un financement alternatif (δ et $1-\delta$) mais aussi une période de grâce, ou de non-recours, pour l'instrument utilisé ; P^*_{1t} indique qu'il y a eu financement obligataire à la période t et que ce mode de financement ne sera à nouveau disponible que 2 ans plus tard. De même P^*_{2t} symbolise un financement par actions et implique une période de grâce de 3 ans.

Etant donné la singularité des contraintes additionnelles, celles-ci sont présentées à titre indicatif et illustratif ; elles ne sont point reprises lors de la présentation synthétique du modèle financier (tableau suivant) ; celle-ci permettra au lecteur de faire le lien entre le modèle et les conditions de Kuhn et Tucker (K-T) de celui-ci, ces dernières étant présentées lors de la section suivante.

III. CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER ET LEURS IMPLICATIONS FINANCIÈRES

La maximisation de la fonction objectif $f(x)$, (0), sous les contraintes $g(x)$, (1) à (12), est identique à l'optimisation d'une fonction de Lagrange introduisant les variables de K-T, λ_i. Soit [17] :

$$F(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i[b_i - g_i(x)] \qquad i: 1 \dots m \tag{14}$$

17. Pour une présentation mathématique des conditions de K-T, se référer à Hadley {9}.

Le modèle financier : présentation synthétique

(0)	Soit Max $U_T(G_T)$ ou $(1+i)^{-T}G_T$ sous les contraintes		
(1)	$-\sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j + v_t - l_{t-1}(\omega_{t-1}s_{t-1} + \delta_{t-1}\hat{w}_{t-1} + v_{t-1}) - \left(\sum_{i=1}^{m} w_{it} + s_t + \hat{w}_t\right) + \left[\sum_{i=1}^{m} b_{i,\,t-1}w_{i,\,t-1} + \sum_{\tau=1}^{10} \eta\hat{w}_{t-\tau}\left(1+\{r_{B,\,t-\tau}[11-\tau]\}\right)\right] + W_t \leq M_t$	$t : 1 \ldots T$	$[\rho_t]$
(2)	$w_{it} \leq B_{it}$	$t : 1 \ldots T-1$	$[\beta^i_t]$
(3)	$\hat{w}_t + \sum_{\tau=1}^{10} \hat{w}_{t-\tau}\eta[11-\tau] \leq \pi E_0 e^{gt}$	$t : 1 \ldots T-1$	$[\gamma_t]$
(4)	$s_t \leq \varepsilon E_0 e^{gt}$	$t : 1 \ldots T-1$	$[\xi_t]$
(5)	$-W_t = -\alpha^{t-1}d_{min\ 0}$	$t : 1 \ldots T$	$[\sigma_t]$
(6)	$-\sum_{j=1}^{n} \sum_{=1}^{t'} a_{\tau j}x_j \leq -F_0e^{gt'}$	$⅔T < t' < T$	$[\Psi_{t'}]$
(7)	$\sum_{j=1}^{n} d_{tj}x_j \leq d_t$	$t : 1 \ldots T$	$[\nu_t]$
(8)	$-\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + W_T - v_T + w_T + G_T + OD_T = \hat{M}_T$	T	$[\Phi_T]$
(9)	$-G_T + k(W_T) \leq -F_T$	T	$[\theta_T]$
(10)	$\sum_{\tau=1}^{10} (1+r_{B,\,t-\tau})\hat{w}_{T-\tau}\eta[11-\tau] - OD_T = 0$	T	$[\lambda_T]$
(11)	$0 \leq x_j \leq 1$	$j : 1 \ldots n$	$[\mu_j]$
(12)	$OD_T,\ s_t,\ v_t,\ w_{it},\ \hat{w}_t \geq 0$	$t : 1 \ldots T$	

Si (0) et le membre de gauche de (9) sont différentiables et satisfont certaines conditions de régularité [18], les conditions de K-T sont alors nécessaires pour l'obtention d'une solution optimale. Soit :

$$\nabla_x F(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) \leqq 0 \tag{15}$$

expression satisfaite à l'égalité pour les variables retenues $x_j^* > 0, j \in J$, le sous-ensemble de variables non nulles.

Lorsque (0) est de plus concave et le membre de gauche de (9) est convexe, les conditions de K-T sont suffisantes pour l'obtention d'une optimum absolu.

Les conditions de K-T présentées ci-après, constituent un ensemble de contraintes, une par variable du modèle financier. Comme pour les variables de K-T de ce modèle, nous indiquons, entre parenthèses et à droite de chaque expression, la variable originale associée à la contrainte considérée.

$$\sum_{t=1}^{T} a_{tj}\rho_t + \sum_{t'}^{T} \sum_{\tau=1}^{t'} a_{\tau j}\Psi_{t'} - \sum_{t=1}^{T} d_{tj}\nu_t + \hat{a}_j\Phi_T - \mu_j \leqq 0$$

$$j : 1 \ldots n \quad \tfrac{2}{3}T < t' < T \quad [x_j] \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial G_T}\right| G_T - \Phi_T + \theta_T \leqq 0 \qquad [G_T] \tag{17}$$

$$-\rho_T + \sigma_T - \Phi_T - \theta_T \left.\frac{\partial k}{\partial W_T}\right| W_T \leqq 0 \qquad [W_T] \tag{18}$$

$$-\rho_t + \sigma_t \leqq 0 \qquad t : 1 \ldots T-1 \qquad [W_t] \tag{19}$$

$$-\rho_t + l_t\, \rho_{t+1} \leqq 0 \qquad t : 1 \ldots T-1 \qquad [v_t] \tag{20}$$

$$\rho_t - b_{it}\, \rho_{t+1} - \beta_{it} \leqq 0 \qquad t : 1 \ldots T-1 \qquad [w_{it}] \tag{21}$$

$$\rho_t + l_t\, \omega_t \rho_{t+1} - \xi_t \leqq 0 \qquad t : 1 \ldots T-1 \qquad [s_t] \tag{22}$$

$$\rho_t + l_t\, \delta_t \rho_{t+1} - \sum_{\tau=1}^{10} \rho_{t+\tau}\eta\{1 + r_{B,\,t}[11-\tau]\} - \gamma_t$$

$$- \sum_{\tau=1}^{10} \gamma_{t+\tau}\, \eta[11-\tau] - \lambda_T \eta\{(1 + r_{B,\,t})(11 - T + t)\} \leqq 0$$

$$t : 1 \ldots T-1 \qquad [\hat{w}_t] \tag{23}$$

$$\rho_T - \Phi_T \leqq 0 \qquad [w_T] \tag{24}$$

18. Conditions visant à éliminer certains cas exceptionnels aux limites de l'espace des solutions possibles ; lorsque la *constraint qualification* est satisfaite, il s'avère que $\nabla f\,(x^*)\, h \leqq 0$ pour tout h satisfaisant $\nabla g_i\,(x^*)\, h \geqq 0,\ h_j \geqq 0$.

$$-\rho_T + \Phi_T \leqq 0 \qquad [v_T] \quad (25)$$

$$-\Phi_T + \lambda_T \leqq 0 \qquad [OD_T] \quad (26)$$

Etant donné, en général, la non-linéarité des fonctions, la quantification des variables de K-T requiert une résolution numérique complète du système.

Toutefois certaines propriétés et implications économiques de ces variables peuvent être mises en évidence à partir des conditions de K-T. Dans cette optique, nous examinerons successivement trois questions importantes de la programmation du budget de capital : ce sont les critères d'acceptation ou de rejet des projets, les propriétés du coût d'opportunité des disponibilités financières et l'impact des instruments de financement sur le critère d'acceptation et le coût d'opportunité. La section sera close par un développement relatif aux relations réciproques existant entre les coûts d'opportunité des divers instruments de financement et celui des disponibilités financières.

3.1 CRITÈRES D'ACCEPTATION DES PROJETS

Par complémentarité d'écart et relations d'exclusion entre variables et contraintes associées [19], comme c'est le cas pour les expressions (16) à (26), lors d'une solution optimale, toute valeur positive [20] d'une variable entraîne la saturation (égalité stricte) de la contrainte associée. Ainsi, des expressions (17) et (24) à (26), on tire :

$$\rho_T = \Phi_T \geqq \lambda_T \geqq U_T + \theta_T \geqq 0 \text{ lorsque } \left.\frac{\partial f}{\partial G_T}\right| G_T = U_T \qquad (27)$$

On constate dès lors que les variables des contraintes de K-T, Φ_T et λ_T, étant non contraintes au point de vue signe puisqu'associées à des égalités au primal, sont positives lorsque $\rho_T > 0$, ce qui, à l'optimum, est généralement le cas. D'autre part, puisque $U_T = (1+i)^{-T}$ on a, au vu des expressions (17) et (27)

$$(1+i)^{-T} \leqq \rho_T - \theta_T \text{ ou encore } \rho_T \geqq (1+i)^{-T} + \theta_T \qquad (28)$$

c'est-à-dire que le taux d'actualisation des managers est inférieur ou égal au coût d'opportunité des disponibilités financières, celui-ci étant ajusté pour le coût implicite de la contrainte sur la valeur terminale. En d'autres termes, à l'horizon temporel, le coût d'opportunité interne

19. Il y a également complémentarité d'écart et relations d'exclusion pour les contraintes primales, à l'exception des égalités (8) et (10), et les variables de K-T qui y sont associées ρ_t, μ_j ... . Ces dernières, en solution optimale, représentent le taux de variation marginal de la fonction objectif (0) par variation unitaire du second membre des contraintes originales.

20. Des contraintes de non-négativité prévalent aussi pour les variables de K-T, à l'exception de Φ_T et λ_T qui, étant associées au primal à des égalités (8) et (10), sont non contraintes au point de vue signe.

des disponibilités financières ρ_T, est supérieur ou égal au coût externe $(1+i)^{-T}$ (taux d'actualisation) des managers augmenté du coût d'opportunité de la contrainte sur la valeur terminale, θ_T.

Puisqu'en vertu de (27) $\rho_T = \Phi_T$, le critère de sélection des projets s'écrit :

$$\mu_f^* = A_j^* \gtrless 0 \tag{29}$$

où :
$$A_j^* \equiv \sum_{t=1}^{T} a_{tj}\rho_t^* + \sum_{t'}^{T} \sum_{\tau=1}^{t'} a_{\tau j}\Psi_{t'}^* - \sum_{t=1}^{T} d_{tj}\nu_t^* + \hat{a}_j\rho_T^* \tag{30}$$

Lorsque les contraintes (6) et (7) sont omises ou non saturées et que l'on procède au remplacement de $\hat{a}_j$ par sa valeur, définie lors de la symbolique, l'expression (30) se simplifie en :

$$A_j^* = \sum_{t=1}^{T} a_{tj}\rho_t^* + \rho_T^* \left[\sum_{t=T+1}^{\infty} a_{tj} \prod_{\tau=T+1}^{\infty} \lambda_{\tau-1}^{-1} \right] \tag{31}$$

En faisant de plus l'hypothèse de constance au cours du temps du taux d'intérêt postérieur à l'horizon temporel, $\lambda_t = 1 + r_t = 1 + r = \lambda$, l'expression (31) se récrit :

$$A_j^* = \sum_{t=1}^{T-1} a_{tj}\rho_t^* + \rho_T^* \left[a_{Tj} + \sum_{t=T+1}^{\infty} a_{tj}(1+r)^{T-t} \right] \tag{32}$$

c'est-à-dire que la valeur duale d'un projet est déterminée à partir d'une chronique des *cash flows* nets, ceux-ci étant estimés, pour chaque période, au coût d'opportunité (interne) des disponibilités financières. La présence en (32) — le dernier terme du membre de droite — d'un taux d'actualisation externe ($\lambda = 1 + r$), nous confirme qu'actualisations interne et externe concourent à la détermination de μ_j^*, la valeur du projet retenu.

Quant à l'impact des instruments de financement sur le critère d'acceptation, il découle de la substitution en (32) de ρ_t^* par une expression issue des contraintes de financement (21) à (23). Nous y reviendrons ultérieurement à la sous-section 3.3.

Dans cette optique, procédons toutefois immédiatement au développement relatif au prêt. De l'expression (20), on tire $\rho_t^* = (1 + r_{lt})^{T-t}\rho_T^*$ et, sous les hypothèses de constance au cours du temps du taux créditeur, $l_t = 1 + r_{lt} = 1 + r_l = l$, et d'identité du taux créditeur et du taux d'actualisation externe (λ) des flux postérieurs à l'horizon temporel, l'expression (32) se récrit :

$$A_j^* = \rho_T^* \left[\sum_{t=1}^{\infty} a_{tj}(1+r)^{T-t} \right] \tag{33}$$

c'est-à-dire la valeur à l'horizon temporel de tous les flux attendus et associés au projet j, ces flux étant cumulés ou actualisés, selon les cas, au taux r constant au cours du temps.

En considérant enfin un facteur d'accumulation jusqu'à l'horizon temporel, $K \equiv (1+r)^T$, le critère d'acceptation des projets (29) devient[21] :

$$\mu_j^* = K\rho_T^* \sum_{t=1}^{\infty} a_{tj}(1+r)^{-t} \geqq 0 \qquad j \in J \tag{33}$$

où le membre de droite constitue le produit du coût marginal en T d'une unité de disponibilités financières et de la valeur actuelle de la chronique des *cash flows* nets associés au projet j, ce produit étant prémultiplié par un facteur d'accumulation qui détermine la valeur, à l'horizon temporel, du projet considéré.

Enfin, par complémentarité d'écart, (11) et (16), on déduit de l'expression (29) les propositions :

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & \mu^*_j = A_j^* \geqq 0 & \text{lorsque } x_j^* = 1 \\ \text{ii)} & \mu^*_j = A_j^* = 0 & \text{lorsque } 0 < x_j^* < 1 \\ \text{iii)} & \mu^*_j = 0 \geqq A_j^* & \text{lorsque } x_j^* = 0 \end{array} \tag{34}$$

qui établissent l'éventail des possibilités d'acceptation d'indifférence ou de rejet d'un projet donné, j. Etant donné les a_{tj}, $\hat{a}_j$ et d_{tj}, il s'avère dès lors possible de déterminer directement les valeurs optimales des variables de K-T, ρ_t^*, Ψ_t^* et ν_t^*, ainsi que le sous-ensemble de projets retenus, $j \in J$.

Ici, comme dans les programmations antérieures de Bernhard et Weingartner, $\mu_j^* = A_j^* > 0$ représente le *goodwill* positif d'un projet accepté, ce dernier étant fonction de la rente économique liée à la contrainte sur facteur fixe, i.e. l'unicité du projet retenu.

3.2 PROPRIÉTÉ DU COÛT D'OPPORTUNITÉ ρ_t^*

Le coût d'opportunité des disponibilités financières, souvent considéré d'ailleurs comme le taux d'actualisation interne, présente plusieurs propriétés remarquables ; après avoir posé les inégalités de base, nous examinerons successivement, pour celles-ci, la liaison intertemporelle des ρ_t, les implications financières du prêt et du financement à court et à long terme, enfin, les relations existant entre les divers taux de prêt et de financement.

21. Pour un développement analogue dans le cadre de modèles du même type, se référer à Bernhard {2, éq. (31) et (33) pp. 127-128} et Weingartner {17, 8.2}.

Dès l'abord, nous dérivons des conditions de K-T les inégalités de base : ρ_t^* est respectivement supérieur ou égal aux expressions de distribution (19) et de prêt (20), témoin :

$$\text{a) } \sigma_t^* \leqq \rho_t^* \qquad \text{b) } l_t \rho_{t+1}^* \leqq \rho_t^* \tag{35}$$

et inférieur ou égal aux relations d'emprunt à court (21) ou à long terme (22) et (23), puisque :

$$\begin{aligned} &\text{a) } \rho_t^* \leqq b_{it}\rho_{t+1}^* + \beta_{it}^* \\ &\text{b) } \rho_t^* \leqq \xi_t^* - l_t \omega_t \rho_{t+1}^* \\ &\text{et c) } \rho_t^* \leqq \sum_{\tau=1}^{10} \rho_{t+\tau}^* \eta[1 + \{r_{B,t}[11-\tau]\}] + \gamma_t^* + \sum_{\tau=1}^{10} \gamma_{t+1}^* \\ &\qquad \eta[11-\tau] + \lambda_T^* \eta\{(1 + r_{B,t})(11 - T + t)\} - l_t \delta_t \rho_{t+1}^* \end{aligned} \tag{36}$$

Avant de passer toutefois à l'interprétation économique de ces politiques, examinons la liaison intertemporelle des ρ_t^*.

3.2.1 *Liaison intertemporelle des* ρ_t^*

La contrainte de disponibilités financières (1) étant généralement active, on a $\rho_t^* > 0$ pour $t : 1 \dots T$ et, notamment pour toute période τ, $1 \leqq \tau \leqq T$. La liaison intertemporelle des ρ_t^* implique à la fois des antériorités, pour les prêts, et des postériorités, pour les emprunts. Mettons en évidence ces deux phénomènes avant de considérer l'impact d'une solution de continuité dans la chaîne intertemporelle des coûts implicites des disponibilités financières.

Du côté des prêts, lorsque $\rho_\tau^* > 0$, l'expression (20) se récrit $\rho_{\tau-1}^* \geqq l_{\tau-1}\rho_\tau^*$ et implique $\rho_{\tau-1}^* > 0$ puisque $l_{\tau-1}$ et $\rho_\tau^* > 0$. Par récurrence en (20), on obtient alors $\rho_t^* > 0$ pour $t : 1 \dots \tau$. Ainsi, en prêtant une unité monétaire additionnelle au cours de périodes antérieures à τ, il s'avère que son utilité actuelle est positive, ρ_t^*, comme elle le fut au cours des périodes antérieures, et le demeurera d'ailleurs jusqu'à l'horizon temporel, dans la mesure où, en (20), la récurrence prévaut à partir de l'horizon temporel [22] : dans ce cas, on a $\rho_t^* > 0$ pour $t : 1 \dots T$.

Les financements à court comme à long terme [23], d'autre part, n'impliquent des postériorités que dans l'hypothèse singulière de marchés financiers parfaits, c'est-à-dire d'absence de limitation supérieure

22. Il y a analogie avec le facteur d'actualisation cumulée de CCM {6} : celui-ci se décompose en taux périodiques de productivité marginale des disponibilités. Chacun d'eux constitue un produit de deux termes, le taux de rendement marginal sur fonds de la période considérée et son accumulation par réinvestissement au cours de périodes subséquentes.

23. Nous pouvons omettre le financement à long terme par actions puisque celui-ci n'implique aucun remboursement ultérieur ; quant aux intérêts sur celles-ci, leur équivalent, facultatif d'ailleurs, se trouve être un dividende qui apparaît alors dans la contrainte de distribution et les conditions de K-T de celle-ci, l'expression (19).

sur les montants de financement, $\beta_{it} = \gamma_t + \sum_{\tau=1}^{10} \gamma_{t+\tau}\ \eta\ [11 - \tau] = 0$ pour $t : 1 \dots T - 1$. Les financements équilibrant à tout moment les contraintes de disponibilités financières, celles-ci deviennent des égalités de *cash balance,* d'où $\rho_t^* > 0$ pour $t : 1 \dots T$. Dès lors, puisque $\beta_{it} = \gamma_t + \sum_{\tau=1}^{10} \gamma_{t+\tau}\ \eta\ [11 - \tau] = 0$ pour tout t, $t : 1 \dots T - 1$, les contraintes (21) et (23) impliquent, par récurrence du processus, $\rho_t^* > 0$ pour $t = \tau + 1 \dots T$.

Ceteris paribus, emprunts et prêts impliquent dès lors qu'en présence d'une utilité positive des disponibilités financières à la période τ, nous pouvons à la fois procéder à des prêts aux périodes antérieures et contracter des emprunts à partir de périodes ultérieures [24] ; sur un marché financier parfait, l'utilité positive d'une unité de disponibilités financières à une période donnée, s'étend à l'ensemble des périodes considérées.

D'autre part, toute solution de continuité dans la liaison intertemporelle de ρ_t^*, par nullité d'un d'entre eux, affecte tant la fonction objectif — la valeur terminale — que certaines politiques — distribution, prêt et financement — des contraintes.

Ainsi, lorsque $\rho_{\tau+1}^* = 0$, il s'avère que $\rho_t^* = 0$ pour $t = \tau + 2$, $\tau + 3 \dots T$. Des expressions (17) et (27) on tire $\rho_T^* \geqq U_T^* + \theta_T^*$; étant donné la nullité de ρ_T^* on a alors $U_T^* = \theta_T^* = 0$, c'est-à-dire qu'un accroissement de la valeur terminale G_T, ou une réduction de son montant minimum F_T, n'accroît pas la fonction objectif.

On arrive d'ailleurs à la même conclusion pour la politique de distribution ; la solution de continuité $\rho_t^* = 0$ pour $t : \tau + 1 \dots T$, impliquant $\rho_T^* = \Phi_T^* = \theta_T^* + 0$, l'expression (18) $\rho_T^* \leqq \sigma_T^* - \Phi_T^* - \theta_T^* \frac{\partial k}{\partial W_T} \mid W_T^*$ s'annule ; la nullité, à l'horizon temporel, du coût d'opportunité interne entraîne dès lors celle du coût d'opportunité de la distribution à l'horizon temporel [25], σ_T^*, et après celui-ci, $\theta_T^* \frac{\partial k}{\partial W_T} \mid W_T^*$.

24. Ceci généralise l'approche des marchés financiers parfaits à court terme de Bernhard {2, p. 125} ou Weingartner {17, 8.2 ou 9.1}.

25. Lorsqu'à l'optimum $\theta_T^* = \rho_T^* - U_T^*$, en vertu de (27), l'expression (18) se récrit $\sigma_T^* = \rho_T^*(2 + \frac{\partial k}{\partial W_T} \mid W_T^*) - U_T^* \frac{\partial k}{\partial W_T} \mid W_T^*$, expression dont la nullité est avérée lorsqu'il y a solution de continuité pour ρ_t^*, $t : \tau + 1 \dots T$. Une ultime transformation de cette expression met alors en évidence la relation existant entre le taux d'actualisation externe, U_T, et certains taux (coûts d'opportunité) d'actualisation interne $U_T^* = (1 + i)^{-T} = \left[\rho_T^*(2 + \frac{\partial k}{\partial W_T} \mid W_T^*) - \sigma_T^*\right] \Big/ \frac{\partial k}{\partial W_T} \mid W_T^*$.

Enfin, les politiques de financement externe à court et à long terme sont affectées par toute solution de continuité en ρ^*_τ. Dans ce cas, lorsque $\rho^*_{\tau+1} = 0$, les expressions (21), (22) et (23) pour $t = \tau$, se réduisent respectivement à :

$$\rho^*_\tau \leq \beta^*_{i\tau} \; \rho^*_\tau \leq \xi^*_\tau \text{ et } \rho^*_\tau \leq \gamma^*_\tau + \sum_{\tau'=1}^{10} \gamma^*_{\tau+\tau'} \, \eta[11-\tau'] \qquad (37)$$

Dès lors en supposant $\rho^*_\tau > 0$, il s'avère que les coûts d'opportunité des plafonnements de financement sont positifs c'est-à-dire que, par complémentarité d'écart, ces bornes supérieures sont actives : dans ce cas, en τ, le coût d'opportunité positif des disponibilités financières est plafonné par les seuls coûts d'opportunité des bornes supérieures (nous les appellerons plus loin coûts de rareté relative) des divers instruments de financement externe à court et long terme. Dans une telle situation, toute unité de disponibilités financières additionnelle en $\tau + 1$ et ultérieurement, n'a aucune utilité pour les gestionnaires du budget de capital et ils n'auraient pu (éventuellement) emprunter une telle unité additionnelle en τ où son utilité aurait été positive.

D'une façon générale, toute solution de continuité implique donc l'impossibilité de transférer des fonds à des périodes ultérieures, ou, identiquement, de procéder antérieurement à des emprunts. Passons alors aux implications financières de ρ^*_t pour les diverses politiques financières, c'est-à-dire, successivement, pour les politiques à court et à long terme.

3.2.2 *Implications des politiques financières à court terme*

Des expressions (20) et (21), on tire la fourchette dans laquelle fluctue le coût d'opportunité des disponibilités financières [26] ; soit :

$$l_t \; \rho^*_{t+1} \leq \rho^*_t \leq b_{it}\rho^*_{t+1} + \beta^*_{it} \qquad t : 1 \ldots T-1 \qquad (38)$$

Par complémentarité d'écart, il convient d'envisager trois hypothèses puisqu'emprunts et prêts à court terme sont considérés comme mutuellement exclusifs. Soit :

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & w^*_{it} = 0 & \text{lorsque } v^*_t > 0 \\ \text{ii)} & w^*_{it} > 0 & \text{lorsque } v^*_t = 0 \\ \text{iii)} & w^*_{it} = w^*_{1t} = 0 & \text{et } \; v^*_t > 0 \end{array} \qquad (39)$$

Les 3 hypothèses considérées en (39), impliquent respectivement la validité en (38), de l'égalité de gauche, de celle de droite, ou de toute

26. Cette sous-section généralise et synthétise les résultats présentés ailleurs (Bernhard {2}, CCM {6} et Weingartner {17} ; elle constitue également une introduction aux développements originaux afférents aux financements à long terme.

l'expression. Quelles sont les implications économiques de cette fourchette ?

Lorsque la firme prête des fonds, il appert que, à l'optimum, elle le fait à un taux, $l_t = \rho^*_t / \rho^*_{t+1}$, égal au ratio des coûts d'opportunité des disponibilités internes au modèle au cours de deux périodes consécutives [27].

Lorsque la firme emprunte, par contre, il convient de distinguer trois situations ; la première $w^*_{it} = w^*_{1t} = 0$, la seconde $0 < w^*_{it} < B_{it}$ et la troisième $w^*_{it} = B_{it}$ et ce, pour l'ultime segment i du barème marginal d'offre de fonds au cours de chaque période.

a) $w^*_{it} = w^*_{1t} = 0$, dans ce cas on a, $l_t\rho^*_{t+1} \leqq \rho^*_t \leqq b_{1t}\rho^*_{t+1}$ ou encore, $l_t \leqq \rho^*_t / \rho^*_{t+1} \leqq b_{1t}$; le ratio des coûts d'opportunité des disponibilités internes au cours de périodes successives fluctue dans une fourchette bornée respectivement par les taux d'actualisation créditeur et débiteur de base, ce dernier étant, par hypothèse, supérieur ou égal au taux créditeur.

b) $0 < w^*_{it} < B_{it}$, dans ce cas on a, $\rho^*_t = b_{it}\rho^*_{t+1}$ ou encore, $\rho^*_t / \rho^*_{t+1} = b_{it}$: le ratio des coûts d'opportunité est dès lors égal au taux débiteur du i^ème^ segment de la courbe d'offre de fonds ; ce taux détermine le volume final d'emprunt de la firme au cours de chaque période et est cohérent avec la théorie classique du financement de l'investissement, [10] et [17].

c) $w^*_{it} = B_{it}$, dans ce cas on a, $b_{it}\rho^*_{t+1} \leqq \rho^*_t \leqq b_{i+1,t}\, \rho^*_{t+1}$ ou encore $b_{it} \leqq \rho^*_t / \rho^*_{t+1} \leqq b_{i+1,t}$: le ratio des coûts d'opportunité fluctue dans une fourchette bornée par les taux débiteurs marginaux de deux segments consécutifs, *i et* $i + 1$, de la courbe marginale d'offre de fonds [28].

Des politiques financières à court terme, passons alors à celles de financement à plus long terme.

3.2.3 *Implications des politiques financières à long terme*

Quoique actions et obligations constituent toutes deux des instruments de financement à long terme, cette sous-section sera consacrée principalement au financement obligataire. En effet, le financement par émission additionnelle de titres n'impliquant aucune obligation de remboursement, son impact sur le coût implicite des disponibilités

27. Conclusion identique à celle de CCC {6, p. 533} ; le taux d'intérêt créditeur est égal au taux de rendement marginal productif (c'est-à-dire sur les investissements considérés). Celui-ci est de plus cohérent avec la théorie classique de l'investissement, Hirshleifer {10}.

28. Etant donné que nous considérons l'ultime segment de la courbe d'offre de fonds, $B^*_{i+1,t} = 0$ puisque $w^*_{i+1,t} = 0$. L'expression (38) correspondant à ce segment est une inégalité stricte (inégalité de droite).

financières sera moins sensible. Nous en traiterons dès lors accessoirement.

Soit, pour le financement obligataire, l'inégalité issue de l'expression (23) :

$$\rho_t^* \leq \overbrace{\sum_{\tau=1}^{10} \rho_{t+\tau}^* \eta(1 + \{r_{B,t}[11 - \tau]\})}^{A} + \gamma_t^* + \overbrace{\sum_{\tau=1}^{10} \gamma_{t+\tau}\, \eta[11 - \tau]}^{B}$$
$$+ \lambda_T^* \underbrace{\eta[(1 + r_{B,t})[11 - T + t]\}}_{C} - \underbrace{l_t \delta_t \rho_{t+1}^*}_{D} \qquad t : 1 \ldots T - 1 \qquad (40)$$

où nous désignons les termes du membre de droite par les lettres A, B, C et D respectivement. Pour l'expression (40), notons tout d'abord qu'il existe deux domaines de définition principaux. Lorsque $t < T - 10$, le terme C est redondant puisqu'aucun remboursement ne demeure à l'horizon temporel. Pour $T - 10 < t < T$, les termes A et C apparaissent simultanément, la sommation de A portant toutefois sur un nombre de périodes de plus en plus restreint étant donné la proximité de l'horizon temporel ; inversement la valeur de C est croissante.

D'une façon générale, le coût d'opportunité du financement obligataire se décompose en deux parties distinctes (en omettant le coût du surplus d'indivisibilité, D) : un coût intrinsèque et un coût de rareté relative.

Le coût intrinsèque — les termes A et C du membre de droite de (40) — doit son existence au phénomène de remboursement des emprunts obligataires au cours des périodes ultérieures à leur émission. Il se décompose en deux termes, chacun d'eux étant respectivement le produit du coût d'opportunité interne de chaque période future par le taux de remboursement (constant au cours du temps) et par le montant décroissant des intérêts à la période considérée [29], t. Etant donné le second membre, ce coût est croissant de t *à* $t + \tau$ à un taux décroissant avec le montant exigible, $11 - \tau$, c'est-à-dire le montant encore disponible ou non remboursé ; en ce sens, nous parlons d'un coût intrinsèque du temps d'utilisation, celui-ci étant évidemment fonction des modalités temporelles (5, 10 ans) de remboursement des emprunts.

Ce coût intrinsèque (la chronique à évaluation progressive portant sur les périodes futures) plafonne le coût d'opportunité interne, p_t^*, de la période considérée ; ce plafonnement ne sera toutefois effectif (c'est-à-dire non nul) que si au moins un des coûts d'opportunité in-

29. On notera que le taux d'intérêt $r_{B,t}$ est celui de la période considérée et non celui prévalant à la période d'emprunt.

ternes des périodes ultérieures, $\rho^*_{t+\tau}$, est positif (ce qui est généralement le cas) et que des financements ont été effectivement contractés au cours de périodes antérieures à la période considérée.

Par sa structure de remboursement [30], ce coût d'opportunité met en évidence la transférabilité interpériodique de fonds du côté de l'emprunt. Enfin, le terme C [31] reflète une solution de continuité imposée par l'horizon temporel, solution qui implique d'ailleurs une redistribution du coût intrinsèque entre A et C.

Quant au coût de rareté relative — le second terme, B, du membre de droite de l'expression (40) — il reflète, en tant que prime (coût) additionnelle, le plafonnement de l'instrument de financement obligataire ; lorsque la contrainte sur ce type de financement est saturée, ce coût implicite s'ajoute au coût intrinsèque et, dès lors, relève relativement le plafond du coût d'opportunité des disponibilités financières. On notera que ce coût se subdivise en deux : d'une part, γ^*_t désigne le coût du plafonnement de l'émission obligataire au cours de la période considérée, d'autre part, $\sum_{\tau=1}^{\infty} \gamma_{t+\tau}\, \eta[11-\tau]$ représente le coût des émissions obligataires antérieures dont les exigibles, au début de la période considérée, réduisent le plafond absolu des émissions, celui-ci étant défini à partir du levier financier. La préemption complète de la capacité de financement obligataire renchérit dès lors ce mode de financement externe.

Ce dernier phénomène est d'ailleurs bien explicité lorsqu'il est rapproché de l'effet *a contrario* du terme D du membre de droite de l'expression (40), le coût implicite des surplus d'indivisibilité. Si la saturation d'une contrainte de financement obligataire entraîne un coût implicite additionnel, γ^*_t, par cohérence interne, un surplus de fonds (d'indivisibilité de l'émission d'obligation ici) entraîne un coût implicite négatif ou encore un « crédit de dualité » $l_t \delta_t \rho^*_{t+1}$. Ce crédit réduisant le coût intrinsèque — et non, en général, le coût de rareté relative (sauf dans le cas exceptionnel où la contrainte est saturée et qu'il y a surplus d'indivisibilité) — il ne s'avère pas nécessaire que la contrainte de financement soit complètement saturée pour générer le surplus d'indivisibilité d'une émission obligataire.

Enfin, faisons remarquer qu'il s'avère possible, à partir de l'expression (40), de procéder au développement de ρ^*_t soit par remplacements successifs soit par récurrence depuis l'horizon temporel.

30. Dans le cas présent, tout financement obligataire aura des répercussions sur le coût intrinsèque des fonds externes au cours des dix années futures.

31. Au vu de la définition de $1 + r_{B,t}$ (voir symbolique), ce terme se récrit $\gamma^*_T \eta\{b_t[11 - T + t]\}$. La structure du terme A ne permettant point une telle simplification, le gain en clarté, en (40), est minime.

Toutefois, après avoir procédé à un tel développement — fastidieux d'ailleurs — il est apparu que sa connotation financière, en l'absence de régularités dans les termes du développement, ne sautait pas aux yeux. Ce développement mathématique déjà peu maniable pour juger de l'impact du financement obligataire sur le coût d'opportunité des disponibilités financières ρ_t^*, ne peut dès lors qu'obscurcir le critère d'acceptation μ_j^* des projets où, éventuellement, il s'insère par substitution de ρ_t^* (nous y reviendrons d'ailleurs lors de la sous-section suivante).

Enfin, l'interprétation économique du coût d'opportunité du financement par actions est plus immédiate. Soit les expressions :

$$\xi_t^* \geqq \rho_t^* + l_t\omega_t\rho_{t+1}^* \quad \text{et} \quad \rho_t^* \leqq \xi_t^* - l_t\omega_t\rho_{t+1}^* \tag{41}$$

qui mettent en exergue le plafonnement du coût implicite des disponibilités financières par le coût d'opportunité du financement externe par actions, ce dernier étant ajusté, comme pour le financement obligataire, par un crédit de dualité, le coût implicite du surplus d'indivisibilité de l'émission de titres. Comme le développement de ρ_t^* à partr de l'expression (41) et l'impact du financement à long terme par actions sur le critère d'acceptation des projets est identique, à peu de choses près, à celui du financement externe à court terme, traité au point suivant, nous omettons ici, afin de ne point alourdir l'exposé, ces développements afférents au financement à long terme.

3.3 IMPACT DES FINANCEMENTS SUR LES CRITÈRES DE DÉCISION

L'impact des instruments financiers sur le coût d'opportunité interne ρ_t^*, et sur le critère d'acceptation des projets μ_j^*, est mis en exergue à partir des expressions (20) à (23). Tout d'abord, par récurrence dans chacune de ces expressions on détermine l'expression du coût d'opportunité interne ρ_t^* ; ensuite, l'impact des instruments sur l'autre critère de décision μ_j^*, s'obtient par substitution en (29) de chacun des développements récurrents de ρ_t^* que nous venons d'obtenir.

La procédure étant similaire pour les divers instruments, nous ne retiendrons ici qu'un développement, celui afférent au financement à court terme. En effet, faisons remarquer dès l'abord que, sous certaines conditions, le développement relatif au prêt à court terme constitue de facto le premier membre du développement considéré et que, en ce qui concerne le financement obligataire, nous avons déjà indiqué que le développement fastidieux de ρ_t^* à partir de l'expression (23) ne dégageait point une connotation financière intéressante en l'absence de régularité dans les termes de celui-ci. Enfin, le développement de ρ_t^* à partir du financement par actions (22) est uniquement

TABLEAU I

DÉTERMINATION DU COÛT IMPLICITE ρ_t^* À PARTIR DE DIVERS INSTRUMENTS DE FINANCEMENT

1) Emprunt à court terme, contrainte (20)			
a)	$l_t = 1 + r_{lt}$ et $l_t = \lambda_t = 1 + r_t$	$\rho_t^* = \rho_T^* \prod_{\tau=t}^{T-1} \lambda_\tau$	$t : 1 \dots T-1$
b)	$l_t = l = \lambda = 1 + r$	$\rho_t^* = \rho_T^* \lambda^{T-t}$	$t : 1 \dots T-1$
2) Prêt à court terme, contrainte (21)			
a)	$b_{tt} = 1 + r_{bit}$	$\rho_t^* = \rho_T^* \prod_{\tau=t}^{T-1} b_{t\tau} + \sum_{\tau=t}^{T-1} \left[\beta_\tau^* \prod_{\tau'=t}^{\tau-1} b_{t\tau'} \right]$	$t : 1 \dots T-1$
b)	$b_{tt} = \bar{b}_t = 1 + r_{bt}$	$\rho_t^* = \rho_T^* \prod_{\tau=t}^{T-1} \bar{b}_\tau + \sum_{\tau=t}^{T-1} \left[\beta_\tau^* \prod_{\tau'=t}^{\tau-1} \bar{b}_{\tau'} \right]$	$t : 1 \dots T-1$
c)	$b_t = l_t = \lambda_t = 1 + r_t$	$\rho_t^* = \rho_T^* \prod_{\tau=t}^{T-1} \lambda_\tau + \sum_{\tau=t}^{T-1} \left[\beta_\tau^* \prod_{\tau'=t}^{\tau-1} \lambda_{\tau'} \right]$	$t : 1 \dots T-1$
d)	$\lambda_t = \lambda = 1 + r$	$\rho_t^* = \rho_T^* \lambda^{T-t} + \sum_{\tau=t}^{T-1} \beta_\tau^* \lambda^{\tau-t}$	$t : 1 \dots T-1$
3) Financement à long terme par actions, contrainte (22)			
a)	$l_t = \lambda_t = 1 + r_t$ et $0 \leqq \omega_t \leqq 1$	$\rho_t^* = (-1)^{T-t} \rho_T^* \prod_{\tau=t}^{T-1} \omega_\tau \lambda_\tau + \sum_{\tau=t}^{T-1} \left[(-1)^{\tau-t} \xi_\tau^* \prod_{\tau'=t}^{\tau-1} \omega_{\tau'} \lambda_{\tau'} \right]$	$t : 1 \dots T-1$
b)	$\lambda_t = \lambda = 1 + r$ et $0 \leqq \omega_t = \omega \leqq 1$	$\rho_t^* = (-1)^{T-t} \rho_T^* (\omega\lambda)^{T-t} + \sum_{\tau=t}^{T-1} (-1)^{\tau-t} \xi_\tau^* (\omega\lambda)^{\tau-t}$	$t : 1 \dots T-1$

fonction du prêt des surplus d'indivisibilité, qui, nous l'avons déjà fait remarquer, est assimilable au prêt à court terme. Aussi, nous n'en toucherons que quelques mots après avoir procédé au développement complet du financement à court terme. Afin de mettre en exergue l'impact de celui-ci sur ρ_t^* et μ_j^* respectivement, nous poserons successivement des hypothèses simplificatrices sur les taux d'intérêt débiteurs.

3.3.1 *Impact sur le coût implicite des disponibilités financières*

Par complémentarité d'écart de la variable (primale) d'emprunt à court terme, et en supposant la constance au cours du temps du $i^{ème}$ échelon de la courbe marginale d'offre de fonds à court terme, on détermine à partir de la contrainte duale (21), l'expression du coût implicite des disponibilités financières ; celle-ci est donnée par l'expression (2a) du tableau I. En posant alors des hypothèses simplificatrices on arrive à une expression dont la connotation économique s'avère intéressante ; en supposant tout d'abord que le taux d'intérêt débiteur est unique pour chaque période $b_{it} = b_{1t} = \overline{b_t}$ (la courbe d'offre marginale de fonds devient alors un barème horizontal à borne supérieure fixe, B_t, dont la variable de K-T est désignée par β_t), ρ_t^* est donné par l'expression (2b) du même tableau.

Si, de plus, le taux d'intérêt débiteur est constant au cours du temps, et identique à un taux donné, i.e. le taux créditeur, on a $b_t = l_t = \lambda_t = \lambda$[32] et l'expression (2d) du coût d'opportunité interne ρ_t^*. Dès lors ce coût n'est plus un simple taux d'intérêt composé [33] — le premier membre de droite de l'expression (2d) — déterminant la valeur, à l'horizon temporel, d'une unité de disponibilités financières dépensée en t [34]. Il faut lui ajouter, lorsque le plafond d'emprunt périodique est atteint ($\beta_\tau^* > 0$), une prime d'emprunt (second membre) variable d'année en année à partir d'une date donnée $\tau : t \dots T-1$.

32. Des hypothèses analogues sont posées par Bernhard {2}, Weingartner {17} et C C M {6}, ces derniers ne plafonnant toutefois pas les emprunts et prêts à court terme ($\beta_t^* = 0$).

33. On notera l'adéquation entre les expressions, (1a) et (1b), du prêt et les premiers membres de droite des expressions, (2c) et (2d), d'emprunt ; un résultat analogue, sous les hypothèses considérées, aurait été obtenu à partir de l'expression (38) qui se récrit alors $\lambda_t\, \rho_{t+1}^* \leqq \rho_t^* \leqq \lambda_t\, \rho_{t+1}^* + \beta_t^*$. Par complémentarité d'écart du côté des prêts, on obtient, par récurrence, $\rho_t^* = \rho_T^* \prod_{\tau=t}^{T} \lambda_\tau$ et $\rho_t^* = \rho_T^* \lambda^{T-t}$ successivement.

34. Lorsque $\rho_T^* = 1$, l'expression $\rho_T^* \lambda^{T-t}$ désigne le taux d'intérêt composé, $(1+r)^{T-t}$ exprimant la valeur en T d'une unité de disponibilités financières placée en t au taux r. Dans ce cas, le ratio ρ_t^*/ρ_{t+1}^* détermine le taux d'intérêt annuel simple.

Ce relèvement du coût d'opportunité a alors pour effet de rejeter certains investissements qui se seraient révélés profitables si la contrainte d'emprunt n'avait été si forte ; le coût d'opportunité, variable d'année en année, devient fonction des activités d'investissement rejetées par la limitation absolue des fonds, β^*_T. Sous des hypothèses simplificatrices analogues — identité et constance du taux d'intérêt créditeur et du coefficient de surplus d'indivisibilité au cours du temps — un développement identique, à partir de la contrainte (22) de financement à long terme par actions, prévaut également pour le coût d'opportunité interne. Les expressions (3a) et (3b) du tableau I impliquent l'existence de surplus d'indivisibilité au cours de chaque période considérée ainsi d'ailleurs que leur prêt au taux créditeur. L'établissement du tableau I nous permet alors de passer à l'impact des divers instruments de financement sur le critère d'acceptation des projets.

3.3.2 *Impact sur le critère d'acceptation*

Cet impact est explicite lorsqu'on introduit, pour chaque instrument de financement considéré, la formulation de ρ^*_t, donnée au tableau I, en (29) et (31), les expressions du critère d'acceptation des projets. Soit respectivement pour le prêt à court terme (1b), l'emprunt à court terme (2d) et le financement à long terme par action (3b), le tableau 2.

Esquissons alors les implications financières des emprunts à court terme et du financement à long terme, celles du prêt à court terme — l'expression (I), identique aux expressions (33) et (34) — ayant déjà fait l'objet de la sous-section 3.1.

Notons tout d'abord que l'expression (II) se subdivise en deux membres, le premier déterminant la valeur actuelle à l'horizon temporel des *cash flows* des projets sélectionnés [35] et le second, lorsque $\beta^*_t > 0$, reflétant la prime adéquatement composée du plafonnement des fonds d'emprunt. Dans ce second membre, α_{tj} représente, pour tout projet, la valeur cumulée des flux monétaires antérieurs à l'année considérée, *t*.

Cette prime concerne le projet *j*, que celui-ci génère ou non en *t*, des flux monétaires : la valeur du projet est accrue, à un moment donné, *t*, si celui-ci génère des flux monétaires au cours des périodes antérieures, flux qui réduisent, au cours de la période considérée, le plafonnement de l'emprunt. Cette possibilité dépend évidemment de la transférabilité (prêt) des fonds à des périodes ultérieures.

L'expression (II) constitue également un démenti au critère d'ac-

35. Ce premier membre correspond également à la substitution de ρ^*_t en (31) par son expression tirée de la contrainte de prêt à court terme (20). Lorsque $\rho^*_T = 1$, on retrouve alors le critère de sélection des projets de Weingartner {17, p. 145}.

ceptation des projets avancé par Lorie et Savage [14] ; selon ceux-ci, un projet est retenu lorsque la valeur actuelle, présente ou à l'horizon temporel, de ses *cash flows*, le premier membre de l'expression (II), est positive (l'actualisation se faisant au taux d'intérêt du marché, r). En effet, lorsque :

$$\sum_{t=1}^{T-1} \beta_t^* \alpha_{tj} (\gtrless 0) \geqq \rho_T^* \left[\sum_{t=1}^{\infty} a_{tj} \lambda^{T-t} \right] (\lesseqgtr 0) \tag{42}$$

l'expression (II) demeure positive et le projet j est retenu quoique la valeur actuelle de ses *cash flows* soit négative et vice versa. En l'absence de possibilités d'emprunt à court terme (et de plafonnement), tout projet générant des flux monétaires aux périodes où ceux-ci s'avèrent utiles, ne serait cependant pas acceptable.

Quant au financement à long terme par actions, son impact sur le critère d'acceptation des projets se traduit par l'expression III, où d_T^* désigne la valeur marginale d'une unité de disponibilité financière en $t = T$, c'est-à-dire, à l'horizon temporel. Les expressions du ta-

TABLEAU 2

IMPACT DES INSTRUMENTS DE FINANCEMENT SUR LE CRITÈRE D'ACCEPTATION

I) Prêt à court terme

$$\mu_j^* = A_j^* = \rho_T^* \sum_{t=1}^{\infty} a_{tj} \lambda^{T-t} \geqq 0$$

ou encore $K\rho_T^* \sum_{t=1}^{\infty} a_{tj} \lambda^{-t} \geqq 0, K \equiv \lambda^T = (1 + r)^T$

II) Emprunt à court terme

$$\mu_j^* = A_j^* = \rho_T^* \sum_{t=1}^{\infty} a_{tj} \lambda^{T-t} + \sum_{t=1}^{T-1} \beta_t^* \alpha_{tj} \geqq 0$$

où $\alpha_{tj} = \sum_{\tau=1}^{t} a_{\tau j} \lambda^{t-\tau}$

III) Financement à long terme par actions

$$\mu_j^* = A_j^* = \rho_T^* \left[\sum_{t=1}^{T} (-1)^{T-t} a_{tj} (\omega\lambda)^{T-t} + \sum_{t=T+1}^{\infty} a_{tj} \lambda^{T-t} \right]$$

$$+ \sum_{t=1}^{T-1} \xi_t^* \alpha_{tj} \geqq 0 \qquad \text{où} \qquad \alpha_{tj} = \sum_{\tau=1}^{t} (-1)^{t-\tau} a_{\tau j} (\omega\lambda)^{t-\tau}$$

bleau 2 mettent également en évidence qu'en l'absence de plafonnement ou de contrainte sur les divers instruments de financement, la variable μ_j^* est quantifiable à partir de coefficients connus, a_{tj}, $\hat{a}_j$, λ et ω et ce, indépendamment de la fonction objectif.

Généralement, toutefois, la valeur numérique des variables de K-T ne s'obtient pas directement à partir des contraintes et l'estimation de A_j^* fluctue en fonction des variations de valeur, dans la fonction objectif ou les contraintes, des variables de K-T. Toute sélection optimale de projets demeure dès lors tributaire d'une résolution numérique complète de la structure de programmation. Enfin, dans un dernier point, nous considérerons, de façon globale, les diverses politiques financières et leur interaction avec le coût d'opportunité interne.

3.4 *Quid* DES FINANCEMENTS

Au vu du modèle financier, ρ_t^* ne prend que deux valeurs possibles par période temporelle ; soit une valeur nulle si la contrainte de disponibilités financières n'est pas saturée, soit une valeur positive si c'est le cas. Dans cette seconde hypothèse, cette valeur est-elle égale ou supérieure au coût d'opportunité de certains instruments de financement ?

En tenant compte simultanément des contraintes de prêt et de financement, nous écrivons :

$$\begin{aligned} l_t\rho_{t+1}^* \leqq \rho_t^* \leqq b_{tt}\rho_{t+1}^* + \beta_{tt}^* \leqq \sum_{\tau=1}^{10} \rho_{t+\tau}^* \, \eta(1 + \{r_{B,\,t}[11 - \tau]\}) \\ + \gamma_t^* + \sum_{\tau=1}^{10} \gamma_{t+\tau}^* \, \eta[11 - \tau] + \lambda_T^* \eta\{b_t[11 - T + t]\} \\ - l_t\delta_t\rho_{t+1}^* \leqq \xi_t^* - l_t\omega_t\rho_{t+1}^* \end{aligned} \tag{43}$$

c'est-à-dire la fourchette mobile dans laquelle évolue le coût d'opportunité interne, dans la mesure où il y a préemption complète de certains instruments de financement. En effet, si l'ensemble des moyens de financement sont saturés et que le facteur d'actualisation interne demeure supérieur aux coûts d'opportunité des moyens de financement, le problème devient un problème d'échelle (de coût et de rendement). Toutefois, la variété et l'ampleur des instruments financiers du modèle financier nous permettent, semble-t-il, d'écarter l'éventualité d'une telle solution.

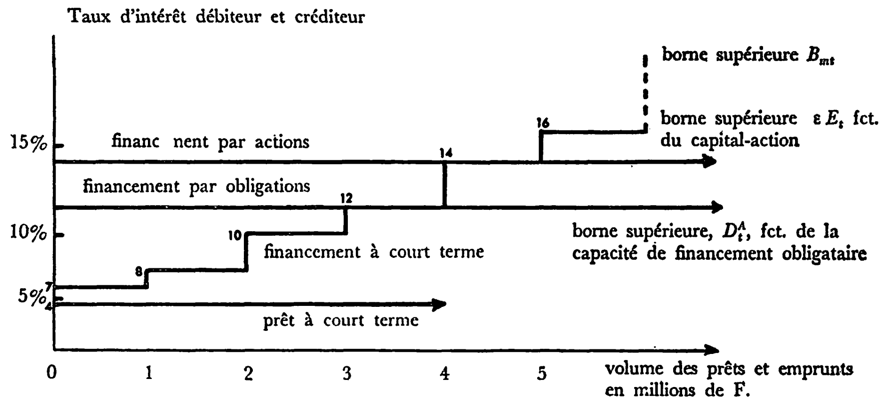
De façon générale, le coût d'opportunité interne fluctue entre deux des inégalités de (43) ; l'inégalité inférieure (qui, éventuellement, est une égalité) reflète le recours à l'instrument financier considéré, l'inégalité supérieure (stricte) indique la non-utilisation du mode de financement suivant. Pour chaque instrument financier d'autre part, le coût d'opportunité (externe) constitue un plafonnement mobile du coût d'opportunité interne : *de facto,* il se décompose en un coût intrinsèque — lors du recours effectif à l'instrument de financement — et un coût de rareté relative, prime additionnelle issue de la saturation de l'instrument considéré [36]. Toutefois, selon les instruments [37], le coût d'opportunité omet le coût intrinsèque (financement externe à long terme par actions) ou est ajusté par un coût d'opportunité d'indivisibilité des émissions (financement externe à long terme par actions et obligations). Enfin, la borne inférieure de la fourchette (43) est dérivée de la contrainte de prêt.

Voyons dès lors dans quelle mesure certaines des inégalités de l'expression (43) se transforment en égalités, ainsi que dans quelle mesure les moyens de financement sont mutuellement exclusifs. A cet effet, en vue de poser le problème, présentons graphiquement les diverses politiques financières.

Comme le graphique I l'illustre, seules les politiques de financement à court et long terme s'avèrent, éventuellement et pour certaines zones de financement seulement, concomitantes. En effet, si prêt et emprunt à court terme sont par nature mutuellement exclusifs, les contraintes

GRAPHIQUE I

REPRÉSENTATION SCHÉMATIQUE DES DIVERSES POLITIQUES FINANCIÈRES



36. Reprenons à titre illustratif le cas du financement à court terme ; si ce financement rend active la contrainte de *cash balance* (1), son coût d'opportunité sera égal à $\rho_t^* = b_{it}\rho_{t=1}^*$. Si, pour saturer cette contrainte, ce financement est tel qu'il épuise toute sa capacité B_{it}, son coût d'opportunité sera alors égal à $\rho_t^* = b_{it}\rho_{t+1}^* + \beta_{it}^*$ d'où un relèvement du taux effectif de ρ_t^*.

37. Alors que nous avons déjà introduit la terminologie coût intrinsèque-coût de rareté pour les deux types de financement externe à long terme, étendons celle-ci au financement à court terme : en (21) $b_{it}\rho_{t+1}$ désigne le coût intrinsèque et β_{it} le coût de rareté relative. Il y a, de plus, absence de coût d'opportunité d'indivisibilité.

additionnelles (13), lorsqu'elles sont introduites explicitement dans le modèle, rendent également mutuellement exclusifs les deux modes de financement à long terme, actions et obligations.

Etant donné que l'entreprise recourt toujours au financement le moins onéreux, lorsque disponible, le taux effectif ρ_t^* au cours de la période considérée, sera égal ou supérieur en (43) au seul coût d'opportunité, le plus élevé, du dernier instrument retenu : cette proposition souffre cependant une exception dans le modèle financier. En effet, ρ_t^* sera éventuellement égal, dans l'expression (43), à deux coûts d'opportunité externes lorsqu'il y a simultanément deux possibilités de financement à un taux donné ; c'est notamment le cas pour certains échelons de la courbe marginale d'offre de fonds à court terme et l'un des deux modes de financement à long terme, actions ou obligations — en tenant compte alors de leur caractère mutuellement exclusif défini par les contraintes additionnelles (13).

Quelques remarques complémentaires préciseront la flexibilité des instruments de financement. Tout d'abord, lorsque la durée des périodes de grâce du financement par actions et obligations diffère de plus de deux années, les alternatives des contraintes additionnelles (13) épuisent le financement à long terme, laissant l'entreprise en présence du seul financement à court terme ; nous retrouvons alors les conclusions de Bernhard [2] et de Weingartner [17, 9.3] relatives aux marchés financiers imparfaits (financement à court terme).

Ensuite, il s'avère possible de modifier l'ordre de préemption des instruments financiers, soit en modifiant les taux d'intérêt — et d'actualisation dès lors —, soit en altérant (voire en rendant impératif) l'ordre des contraintes additionnelles. Enfin, l'introduction de projets mutuellement exclusifs, contingents et composés ne doit pas entraîner de difficultés de résolution insurmontables.

CONCLUSION GÉNÉRALE

A titre de conclusion, il est de bon ton de poser un jugement synthétique sur l'ensemble des développements ainsi que de mettre l'accent sur certains faits saillants de ceux-ci. Il n'est certes de sentier battu trop tentant.

Grosso modo, le modèle financier se singularise par sa politique de décision ainsi que par ses instruments de financement externe à long terme, ces derniers élargissant l'éventail habituel des moyens de financement du budget de capital. La fonction objectif, tout d'abord, reflète et formalise la politique de décision des managers, les membres de la technostructure de toute grande entreprise contemporaine ; la maximisation des actifs de l'entreprise à l'horizon temporel concrétise dès lors leurs aspirations et ce, aux dépens de celles des actionnaires.

La rétention, d'autre part, des instruments de financement à long terme, actions et obligations, complète l'environnement financier du budget de capital et favorise l'adéquation de la structure de programmation à la réalité économique. C'est surtout, toutefois, à partir des conditions de Kuhn et Tucker des contraintes d'environnement que les implications financières les plus intéressantes sont tirées ; celles-ci soit généralisent ou synthétisent certaines conclusions avancées antérieurement, par Weingartner ou Bernhard, soit constituent *de facto* des développements originaux.

Au titre des extensions et généralisations de conclusions antérieures, nous avons procédé au développement complet des implications financières du critère de sélection des projets ainsi qu'à l'extension de celles du financement externe à court terme ; dans ce dernier cas, nous avons mis l'accent sur l'impact de ce type de financement sur le critère de sélection des projets et le coût implicite des disponibilités financières.

Pour les instruments de financement à long terme, par contre, les implications financières de la dualité sont inédites ; la détermination du coût d'opportunité de ces instruments, surtout pour le financement obligataire, singularise dès lors le modèle financier.

Le coût d'opportunité du financement obligataire se décompose d'ailleurs, en trois termes ; ce sont, respectivement, le coût intrinsèque, de rareté relative et d'indivisibilité des émissions. La première composante, le coût intrinsèque, détermine le prix (d'ordre) du temps de disposition de l'instrument financier ; celui-ci est croissant, à un taux décroissant, avec la durée du financement puisque son remboursement progressif s'effectue en dedans d'une période donnée. De plus, cette structure de remboursement au cours de périodes futures, de financements contractés à la période considérée ou antérieurement, implique les multiplicateurs (coûts implicites) des périodes subséquentes à celle qui est considérée. Il suffira dès lors que l'un d'entre eux soit non nul pour qu'il y ait plafonnement effectif du coût d'opportunité interne de la période considérée.

Ce coût intrinsèque est accru d'une prime, ou second terme, lorsqu'il y a saturation ou préemption complète du mode de financement. Ce coût de rareté relative indique le prix du plafonnement du financement ; celui-ci s'apparente dès lors au *goodwill* des projets retenus. Enfin, notre hypothèse d'indivisibilité du financement introduit un crédit de dualité pour le surplus de fonds placé au taux créditeur, surplus qui est issu de l'indivisibilité des émissions. En effet, les fonds dégagés lors d'une émission obligataire ou de titres, ne sont pas toujours complètement épuisés par le financement des projets courants, et le reliquat ou surplus est alors soit prêté soit différé à la période suivante.

Lorsqu'on compare les deux instruments du financement à long terme, actions et obligations, les implications financières des composantes de leur coût d'opportunité sont révélatrices : l'émission de titres n'entraînant aucun remboursement de ces fonds et l'obligation de distribution de dividendes — *de facto* l'alter ego des intérêts sur financement obligataire — étant optionnelle, le coût d'opportunité de ce mode de financement se réduit au coût de rareté relative et au crédit de dualité des surplus d'indivisibilité, omettant dès lors le coût intrinsèque *(pricing)*, l'expression des remboursements et de la durée du financement considéré. Nous devons toutefois faire remarquer qu'une portion de ce coût intrinsèque se retrouve dans une autre contrainte d'environnement, celle de la distribution plancher des dividendes. Toute obligation récurrente vis-à-vis des actionnaires étant peu prisée par les managers, on comprend leur réticence à recourir à ce mode de financement.

Enfin, étant donné aussi la multiplicité des modes de financement et de prêt, nous avons déterminé leur relation mutuelle et surtout, celle de leur coût d'opportunité respectif. Ces derniers définissent, en effet, une fourchette, bornée respectivement par le coût d'opportunité du prêt et celui, mobile, d'un des instruments de financement externe à court ou à long terme, fourchette dans laquelle fluctue le coût d'opportunité interne ; selon l'identité de ce dernier avec certains coûts d'opportunité des instruments de financement, nous déterminons alors les financements alternatifs, ainsi que les zones restreintes de disponibilité simultanée de deux d'entre eux.

Jean-Pierre D. CHATEAU,
Faculty of Management
McGill University

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUMOL, J.W. et QUANDT, R.E., « Investment and Discount Rates under Capital Rationing : A Programming Approach », *Economic Journal*, 75, n° 298, 1965, pp. 317-329.

[2] BERNHARD, R.H., « Mathematical Programming Models for Capital Budgeting. A Survey, Generalization and Critique », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 4, n° 2, 1969, pp. 111-158.

[3] BRYNE, R., CHARNES, A., COOPER, W.W. et KORTANEK, K., « A Chance-Constrained Approach to Capital Budgeting with Portfolio Type Payback and Liquidity Constraints and Horizon Posture Controls », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2, n° 4, 1967, pp. 339-364.

[4] CARLETON, W.T., « Linear Programming and Capital Budgeting Models : A New Interpretation », *Journal of Finance*, 24, n° 5, 1969, pp. 825-833.

[5] CHARNES, A. et COOPER, W.W., « A Note on the « Fail-Safe » Properties of the Generalized Lagrange Multiplier Method », *Operations Research*, 13, n° 4, 1965, pp. 673-677.

[6] CHARNES, A., COOPER, W.W. et MILLER, M.H., « Application of Linear Programming to Financial Budgeting and Costing of Funds », *Journal of Business*, 32, n° 1, 1959, pp. 20-46.

[7] CHATEAU, J.P., *La programmation déterministe du budget de capital : modèle généralisé et questions connexes*, U.E.R. des Sciences Économiques, Université de Paris X — Nanterre, 1973.

[8] EVERETT, H., « Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resources », *Operations Research*, 11, n° 3, 1963, pp. 399-417.

[8a] EVERETT, H., « Comments on the Preceding Note », *Operations Research*, 13, n° 4, 1965, pp. 677-678.

[9] HADLEY, G., *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1964.

[10] HIRSHLEIFER, J., *Investment, Interest and Capital*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.

[11] LAWLER, E.L. et BELL, M.D., « A Method for Solving Discrete Optimization Problems », *Operations Research*, 14, n° 6, 1966, pp. 1098-1112.

[12] LERNER, E.M., et MOAG, J.S., « Analyse théorique des décisions concernant le budget de capital », *Économies et Sociétés*, III, n° 5, 1969, pp. 933-956.

[13] LERNER, E.L. et RAPPAPORT, A., « Limit DCF in Capital Budgeting », *Harvard Business Review*, septembre-octobre 1968, pp. 133-137.

[14] LORIE, J.H. et SAVAGE, L.J., « Three Problems in Rationing Capital », *Journal of Business*, 28, n° 4, 1955, pp. 229-239.

[15] MAO, J.C.T. et WALLINGFORD, B.A., « An Extension of Lawler and Bell's Method of Discrete Optimization with Examples from Capital Budgeting », *Management Science*, 15, n° 2, 1968, pp. 351-360.

[16] MOAG, J.S. et LERNER, E.M., « Capital Budgeting Decisions under Imperfect Market Conditions. A Systems Framework », *Journal of Finance*, 24, n° 4, 1969, pp. 613-621.

[17] WEINGARTNER, H.M., *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.

[17a] WEINGARTNER, H.M., « Capital Budgeting of Interrelated Projects : Survey and Synthesis », *Management Science*, 12, n° 7, 1966, pp. 485-516.

[17b] WEINGARTNER, H.M., « Criteria for Programming Investment Project Selection », *Journal of Industrial Economics*, 15, n° 1, 1966, pp. 65-77.

[17c] WEINGARTNER, H.M., « Some New Views on the Payback Period and Capital Budgeting Decisions », *Management Science*, 15, n° 12, 1969, pp. 594-607.