L'Actualité économique

Modèle de population pour la planification de l’offre de service
The planning of services supply: a population model

Alain Haurie

Volume 54, Number 4, octobre–décembre 1978

URI: https://id.erudit.org/iderudit/800793ar
DOI: https://doi.org/10.7202/800793ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Haurie, A. (1978). Modèle de population pour la planification de l’offre de service. *L'Actualité économique*, *54*(4), 500–520. https://doi.org/10.7202/800793ar

Article abstract

This paper deals with the problem of adjusting the supply of public services to the demand for such services. In this matter, the planner is faced with a population having a stochastic behavior and he has to solve ticklish resource allocation problems. After presenting a general frame of modeling that fits such problems, the author gives some examples taken from education, social and care services. The last section is devoted to statistical and mathematical problems that have to be solved in order to operationalise such an approach.

MODÈLE DE POPULATION POUR LA PLANIFICATION DE L'OFFRE DE SERVICE *

Un certain nombre de problèmes de gestion des services publics se ramènent au schéma suivant : une population est composée d'un certain ensemble d'individus et à chacun d'eux correspond une demande de service qui dépend de l'état où il se trouve. Par agrégation la demande totale est obtenue. L'offre de service est en général contrainte par la disponibilité de certaines ressources matérielles qu'il faut accumuler ou former.

L'ajustement de l'offre à la demande est l'objectif poursuivi par le planificateur. Il doit, pour l'atteindre, tenir compte du comportement généralement stochastique de la population servie et résoudre, période après période, de délicats problèmes d'allocation de ressources.

Dans cet article, nous nous proposons de présenter un cadre général de modélisation adapté à ce type de problèmes, d'illustrer son utilisation à l'aide de certains exemples empruntés aux domaines de la santé, des services sociaux et de l'éducation, et d'indiquer les problèmes mathématiques et statistiques qui restent à résoudre pour rendre opérationnelle une approche basée sur ces modèles.

1. *Le schéma offre-demande : une analyse systémique*

Dans cette première partie nous définirons un modèle reflétant le schéma fondamental offre-demande que nous nous proposons d'analyser. Dans les sections qui suivront nous montrerons comment un tel modèle peut être identifié à des situations particulières dans la gestion de services publics.

Soit une population P. La population P est répartie en tribus, l'ensemble des tribus $\{P_i\}_{i \in I}$ constitue une partition de P. Chaque tribu P_i est composée d'un ensemble M_i de familles μ qui constituent une partition de P_i.

---

* Cette recherche a bénéficié d'une subvention du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie (A9368).

Ainsi, un individu est membre d'une famille μ située dans une tribu P_i de la population P. A chaque instant t cet individu de la famille μ de la tribu P_i peut se trouver dans un état pris dans un ensemble d'états possibles $E_{i\mu}$.

Cette population demande un service qui est décrit par un ensemble L d'activités. Un individu dans l'état j de $E_{i\mu}$ demande l'activité l avec une intensité d_l^j.

Cette demande va être aléatoire et la demande totale par tribu sera l'agrégation des vecteurs de demande $\{d_l^j\}_{l \in L}$ associés aux individus classés par états et familles de cette tribu. Cette demande agrégée sera représentée par le vecteur $\{W_l^i\}_{l \in L,\ i \in I}$. Elle représente donc la demande de la tribu P_i pour les activités caractérisant le service étudié.

La décomposition de la population en tribus s'avère utile quand, par exemple, on doit distinguer entre les demandes originant de plusieurs régions géographiques ou administratives. La décomposition de chaque tribu en familles va être utile pour distinguer à l'intérieur des tribus des classes d'individus ayant des caractéristiques dynamiques spécifiques. La suite d'états qu'un individu prend au cours du temps est un processus stochastique et tous les individus d'une même famille ont donc une dynamique décrite par le même processus, c'est-à-dire les mêmes lois. La notion d'état, enfin, est utile pour distinguer entre différents profils de demande. Ainsi, d'un état à un autre la loi de demande changera, le vecteur $\{d\ \}_{l \in L}$ pouvant être aléatoire avec une distribution conditionnée par l'état j de l'ensemble $E_{i\mu}$.

Suivant ce schéma, on peut prévoir la demande quand on connaît le recensement de la population. Au temps t le recensement de la population sera donné par le vecteur :

$$\mathbf{X}(t) = \{X_j(t)\}_{j \in E_{i\mu},\ \mu \in M_i,\ i \in I}.$$

Pour prévoir et contrôler ce recensement, on se basera sur la connaissance des lois de naissance ou d'arrivée dans la population et sur la dynamique des états.

Le schéma suivant résume les notions évoquées jusqu'à ce point, concernant la structure du secteur « demande ».

En face du secteur « demande » se trouve le secteur « offre » dont l'organisation est la tâche principale du planificateur. Nous décrivons ce secteur à l'aide d'un modèle d'analyse d'activité. Le service est caractérisé par un ensemble L d'activités. La tribu P_i demande au temps t un niveau $W_l^i(t)$ de l'activité l.

Si l'offre est située à un niveau $S_l^i(t)$ supérieur ou égal à $W_l^i(t)$ il n'y a pas de coût social ; si par contre l'offre $S_l^i(t)$ tombe au-dessous du niveau demandé, il y a un coût rapidement croissant avec cet écart. Retenons, par exemple, un coût quadratique :

$$\alpha_l^i \left(W^i(t) - S_l^i(t) \right)^2$$

pour l'ensemble des tribus nous avons un coût total :

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in L} \alpha_l^i \left(W_l^i(t) - S_l^i(t) \right)^2 \qquad (1)$$

où les coefficients α_l^i servent à pondérer l'importance des tribus et des catégories de service. Cette pondération traduira évidemment les taux marginaux de substitution implicitement adoptés par le preneur de décision.

Soit $\mathbf{S}^i(t)$ le vecteur des niveaux d'activité $\{S_l^i(t)\}_{l \in L}$.

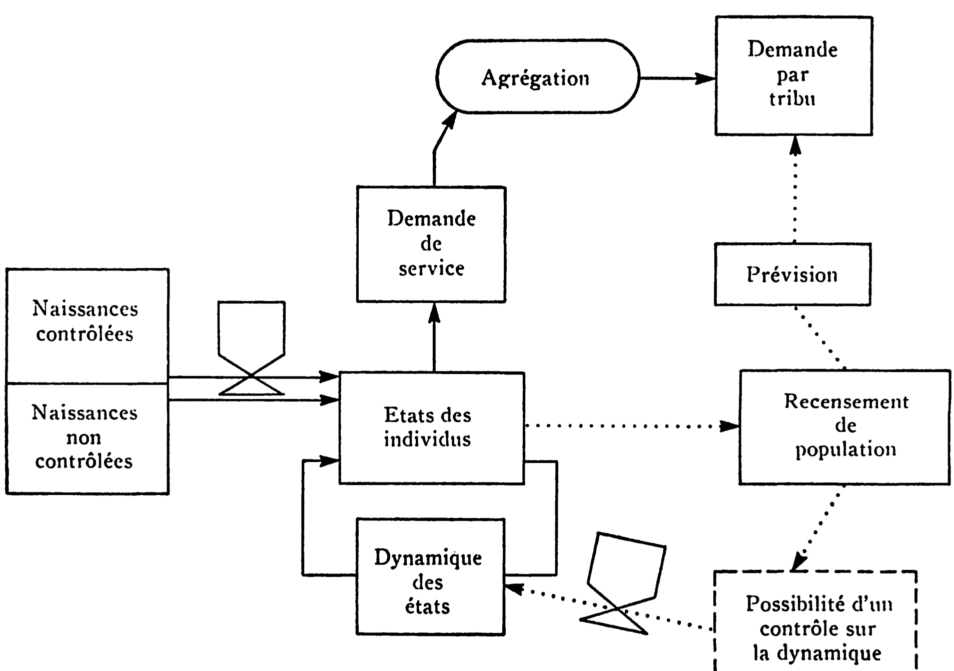
Pour offrir les niveaux $\mathbf{S}^i(t)$, les responsables de la gestion utilisent des ressources rares formant l'ensemble R. Le vecteur :

$$\mathbf{B}^i(t) = \{B_r^i(t)\}_{r \in R}$$

décrit, à l'instant t, la disponibilité de ces ressources.

FIGURE 1

SCHÉMA FONCTIONNEL DU SECTEUR « DEMANDE »



Une fonction décrit l'utilisation de ressources impliquée par les niveaux d'activité. On aura donc les contraintes :

$$\mathbf{F}^i(\ (\mathbf{S}^i\ (t)\ ) \leqq \mathbf{B}^i\ (t), i \in I \qquad (2)$$

ce qu'on peut écrire aussi pour chaque ressource :

$$F^i_r\ (\mathbf{S}^i\ (t)) \leqq B^i_r\ (t), r \in R, i \in I. \qquad (2')$$

Chaque fonction $F^i_r(\mathbf{S}^i\ (t)\ )$ décrit ainsi une relation entre l'extrant désiré, le vecteur $\mathbf{S}^i\ (t)$, et l'intrant nécessaire, correspondant à la ressource de type r, pour produire cet extrant. La forme la plus simple d'une telle fonction est fournie par une transformation linéaire, ce qui donnerait, au lieu de (2') :

$$A^i_r\ \mathbf{S}^i\ (t) \leqq B^i_r\ (t), r \in R, i \in I \qquad (2'')$$

où A^i_r est une matrice de coefficients techniques donnés.

L'organisation optimale de l'offre revient donc à la minimisation de la fonction (1) sous les contraintes (2). Ce modèle de planification de l'offre pourrait être facilement généralisé si nous voulions prendre en compte les activités d'accumulation de ressources.

Nous disposons maintenant d'un cadre méthodologique général permettant d'analyser les interactions offre-demande dans le domaine des services.

La figure 2 résume l'essentiel du modèle complet.

2. *Application à la gestion d'un service hospitalier*

Nous exposerons dans cette partie une application de ce schéma général à la gestion d'un service hospitalier. Cette application a été réalisée dans le cadre d'une recherche effectuée au Québec, avec la collaboration de l'Hôtel-Dieu de Montréal. La question que nous nous posions était la suivante :

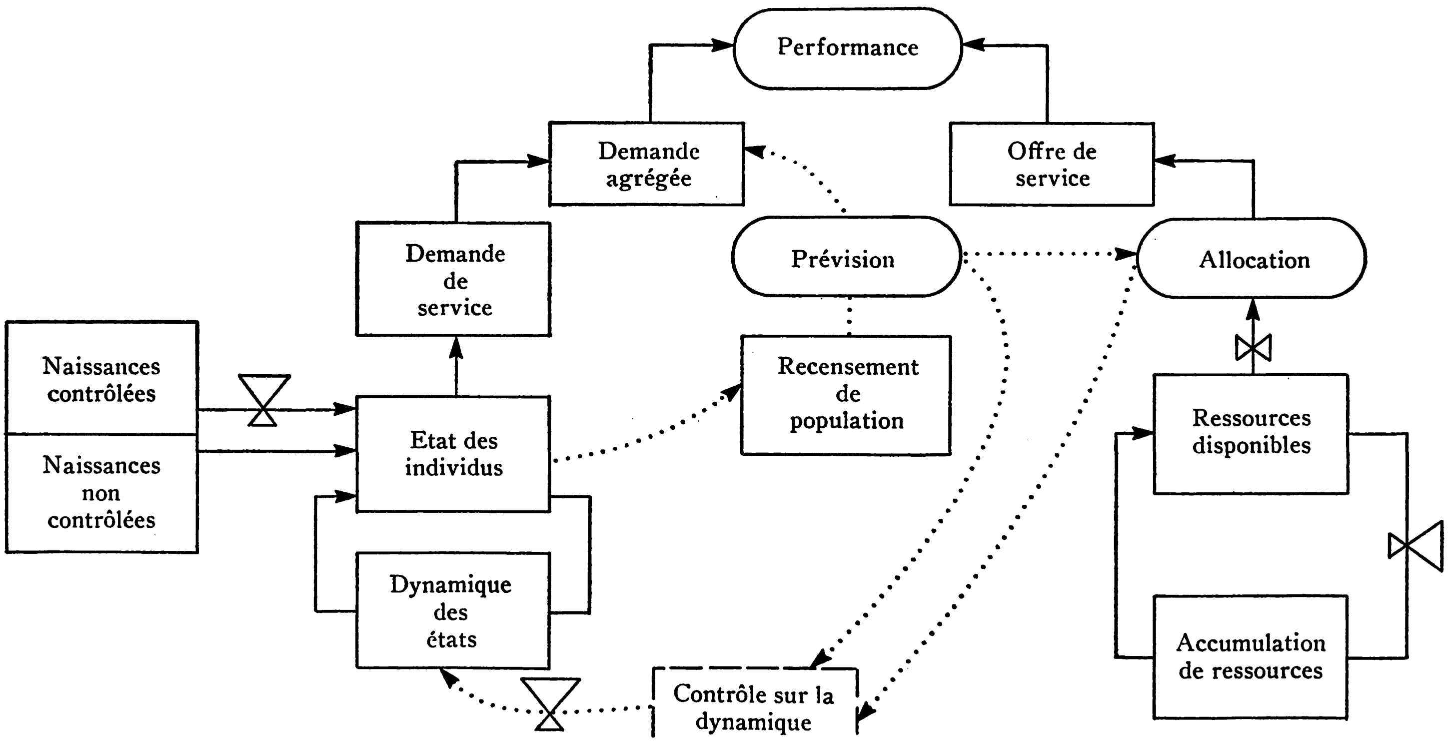
Si, dans un service de chirurgie comprenant plusieurs unités de soins, nous voulons équilibrer l'offre et la demande de soins infirmiers directs, quel moyen d'action est le plus efficace parmi les trois suivants ?

— Contrôle de l'admission des patients électifs
— Transferts de tâches d'une catégorie d'infirmière à une autre catégorie
— Echange de personnel entre les différentes unités de soins par le biais d'une équipe « volante ».

Chacun de ces moyens d'action est plus ou moins facile à appliquer. Les contraintes syndicales tendent à limiter les possibilités de tranferts de tâche ou de personnel et donc la direction d'un hôpital aura de délicates négociations en perspective si elle veut utiliser ces moyens d'action. Le contrôle de l'admission semble très hypothétique puisque rien n'est

FIGURE 2

SCHÉMA DU SYSTÈME OFFRE-DEMANDE



plus aléatoire que l'évolution de la condition de maladie de chaque patient, facteur qui détermine la demande de soins infirmiers directs.

L'importance de cette question apparaît quand on sait que la rémunération du personnel infirmier est de loin le plus gros poste budgétaire d'un hôpital, que l'évolution de ces salaires compte pour beaucoup dans l'inflation des coûts d'hospitalisation et que les conditions de travail pénibles dues à des fluctuations importantes dans les charges de travail tendent à rendre rares les bonnes infirmières.

L'approche que nous avons suivie était inspirée des travaux de Smallwood *et alii* (1969) et de ceux de Kao (1972, 1973). L'originalité de ces contributions était la représentation de la dynamique des maladies par un processus semi-markovien à temps et à état discret.

Ainsi, dans le service en question la population de patients est répartie en deux unités de soins, qui sont des entités médicales, administratives et géographiques bien délimitées et qui correspondent à la notion de « tribu ».

Dans l'unité i les patients traités ont différentes maladies μ. Les patients ayant la même maladie forment une « famille ». Enfin, chaque maladie est caractérisée par un ensemble d'états $j \in E_{i\mu}$ qu'un patient parcourt suivant un processus semi-markovien. Cela revient à dire qu'un patient a des probabilités de passage d'un état j à un état k qui ne dépendent que de l'état de départ j, comme dans une chaîne de Markov. Le délai avant que la transition s'effectue, qui est d'une période dans une chaîne de Markov, est ici une variable aléatoire dont la loi dépend de la transition que l'on va effectuer.

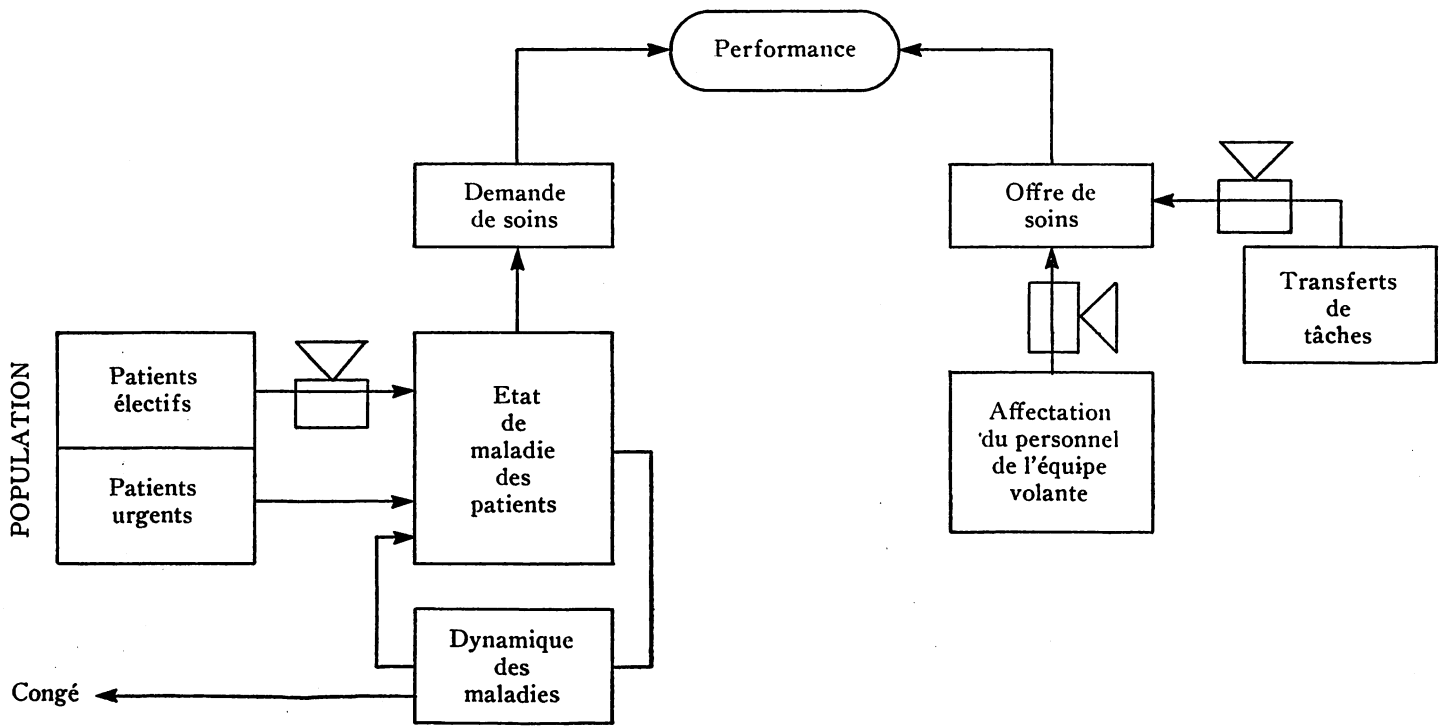
Cet aspect des processus semi-markoviens est bien adapté à la modélisation de nombreux phénomènes naturels. Dans le cas d'une maladie traitée par chirurgie cela correspond d'assez près à la pratique des chirurgiens pour que ceux-ci puissent donner une première idée assez nette des différentes probabilités de transition et de durée de séjour.

Un patient qui est dans le stade post-opératoire et qui va avoir une complication va rester plus longtemps dans le stade post-opératoire, avant de faire sa complication, que le patient dont la convalescence est sans problème. Cela montre que les durées de séjour avant la transition « dépendent » de l'état de destination ; cela indique aussi la nature des « surchauffes » qui peuvent intervenir dans les unités de soins. Il suffit que le hasard concentre dans une unité plusieurs patients ayant des complications pour qu'ils y restent longtemps et que, chaque jour, ils demandent beaucoup de soins, ce qui engendrerait, si aucune action corrective n'était entreprise, une dégradation de la qualité des soins.

Notre étude a porté sur un service d'urologie. Avec cinq maladies nous arrivions à couvrir plus de 65% des cas traités et la presque totalité de ceux qui occasionnent une forte demande de soins. Ces cinq maladies

FIGURE 3

SCHÉMA DU SYSTÈME OFFRE-DEMANDE DE SOINS INFIRMIERS
DANS UN SERVICE HOSPITALIER



ont été représentées par des arbres schématisant le processus semi-markovien associé. A chaque état a été associée une variable aléatoire correspondant à la demande de soins, dont la loi était obtenue après une interview du personnel infirmier.

La figure 3 schématise le système obtenu. Les trois moyens d'action envisagés y sont clairement indiqués par le symbole composé d'un triangle et d'un rectangle reliés entre eux par une pointe du triangle.

La figure 4 donne une représentation d'un arbre de maladie correspondant au traitement de tumeurs de la vessie qui est caractéristique de la variabilité des durées de séjour. Si la tumeur est localisée on s'attend à ce que le patient reste au total entre quatre et neuf jours dans l'hôpital. Si la tumeur est « envahissante » alors le patient pourra avoir une durée totale de séjour dans l'unité pouvant atteindre 70 jours. De plus, comme son état sera grave les soins infirmiers qu'il demandera seront importants. Le modèle d'affectation du personnel infirmier est un cas particulier du modèle général décrit en première partie par les équations (1) et (2″) obtenu en adaptant un modèle proposé récemment par Warner et Prawda (1972).

En simulant le fonctionnement du service on a pu évaluer l'influence des divers moyens de contrôle sur la réduction du critère quadratique calculé à partir du déficit de l'offre par rapport à la demande dans les deux unités de soins. Les coefficients de pondération α_{il} ont tous été pris égaux à 1 dans ce cas.

On a pu constater alors que, pour un service constitué de deux unités, la possibilité de transférer 10% du personnel d'une unité à l'autre suivant la demande (équipe volante) était beaucoup plus intéressante que la possibilité de transférer des tâches des catégories de personnel moins qualifié vers les catégories plus qualifiés, suivant la demande.

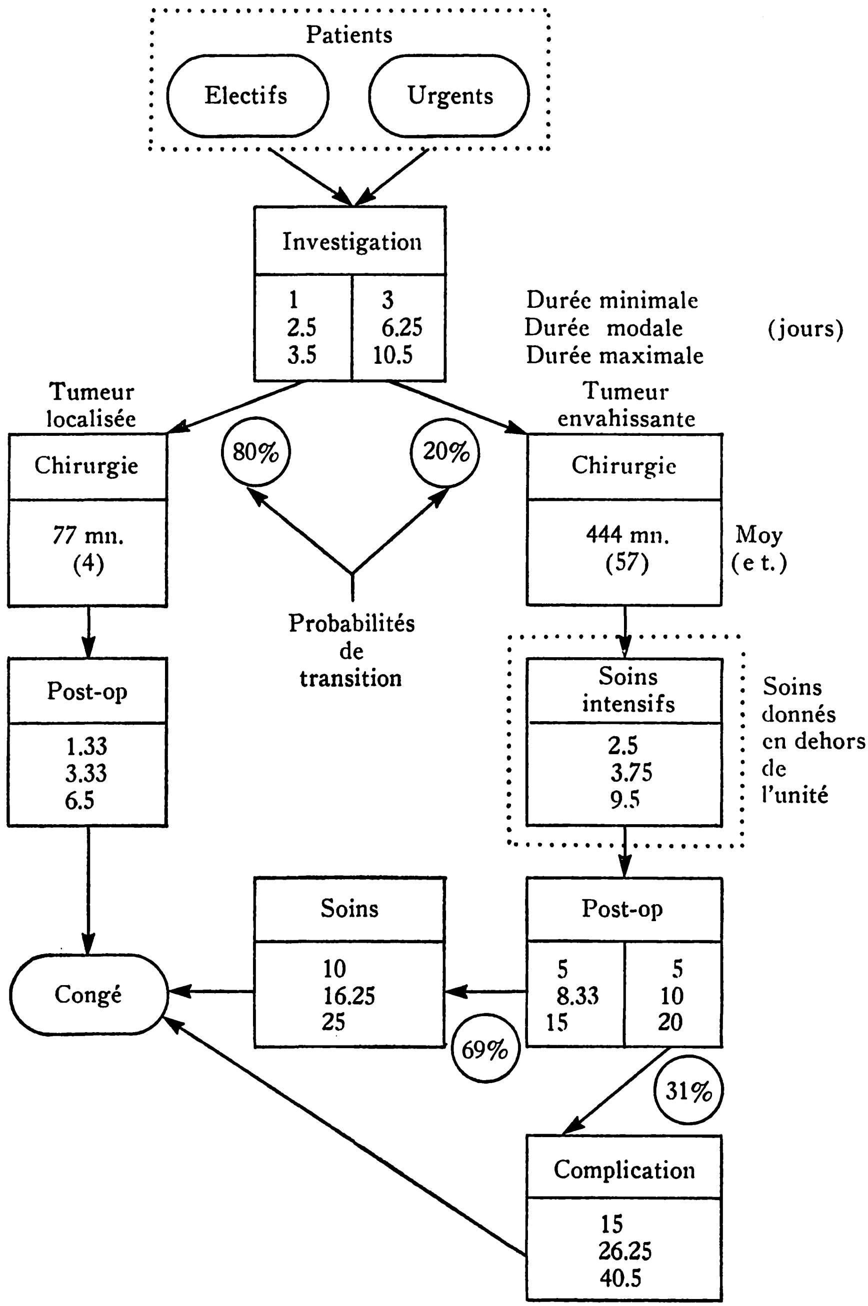
Nous avons pu constater que le contrôle à l'admission pouvait être au moins aussi efficace que le système d'équipe volante. Nous avons proposé une politique sous-optimale basée sur une utilisation des prévisions de recensement à court terme dans les unités. Cette politique est décrite plus complètement par Collart et Haurie (1975, 1976). Il est apparu, par simulation, que cette politique pouvait être plus efficace que l'équipe volante seule et que, de plus, la combinaison de ces deux moyens d'action présentait un effet de synergie qui privilégierait une approche duale lors de l'implantation d'un système opérationnel. Plus de détails sur les conclusions de cette étude peuvent être obtenus en consultant Haurie *et alii* (1976).

3. *Planification des services sociaux et de santé pour les personnes âgées*

Dans cette partie, nous tenterons de montrer que la méthodologie utilisée en section 2 pour analyser un problème de nature microécono-

FIGURE 4

DYNAMIQUE DES PATIENTS TRAITÉS POUR TUMEUR DE LA VESSIE
AU SERVICE D'UROLOGIE DE L'HÔTEL-DIEU DE MONTRÉAL



mique (l'allocation d'une ressource rare au sein d'une petite organisation, pourrait aussi servir à clarifier certains problèmes de nature plus globale, dans la planification de l'offre de services sociaux.

Le fléchissement de la natalité, l'augmentation de l'espérance de vie due à l'hygiène et à la médecine, et les modifications dans la société tendent à rendre de plus en plus important, dans certains pays, le problème de l'organisation des services sociaux aux personnes âgées.

Tout d'abord, considérons le secteur de la «demande» de service. Ici le mot demande est peut-être mal choisi, l'idée à traduire étant plutôt celle de « besoins ». Nous supposerons que le bien-être des personnes âgées est principalement lié à leur autonomie. Nous repérerons donc l'état de chaque individu dans la population âgée par le degré de dépendance de cette personne. On peut imaginer cinq états différents :

Etat	*Caractérisation*
1	totale autonomie
2	nécessite une aide physique pour presque tous les travaux
3	nécessite une aide physique pour presque tous les travaux doublée d'une aide psychologique
4	nécessite une aide constante pour toutes les activités
5	dépendance complète.

A ces états on doit rajouter un état absorbant représentant la fin de la vie. Les familles μ peuvent correspondre à différentes catégories sociales et les tribus P_i à différentes zones géographiques.

Pour une famille μ l'évolution d'un individu dans l'ensemble des états possibles peut être aussi décrite par un processus semi-markovien. Nous noterons $p^{\mu}_{jk}(l)$ la probabilité pour un individu de la famille μ qui se trouve dans l'état j de faire une transition vers l'état k. Nous noterons $h^{\mu}_{jk}(l, n)$ la probabilité que cet individu passe n années dans l'état j avant de passer à l'état k. On aura remarqué la présence de l'indice l dans ces probabilités ; cet indice avait été utilisé dans la présentation générale de la première partie pour repérer les différentes activités d'offre de service. Il apparaît ici pour indiquer la possibilité d'un effet de l'offre de service sur la dynamique des états.

Suivant le service offert à une personne il se pourra que certaines probabilités de transition ou de durée de séjour dans un état soient modifiées. Nous avons ainsi une possibilité de traduire en termes quantifiés les effets de l'aide sociale sur les individus.

Par exemple, si une personne dans l'état 2 se voit offrir une place dans une maison de retraite ou un foyer pour vieillards, on peut imaginer que la probabilité de passer à l'état 3 ou 4 sera assez forte et la durée de séjour dans l'état 2 assez faible ; alors que si un service d'aide ménagère lui est offert, un séjour plus prolongé dans l'état 2, puis peut-être le passage de cet état à celui de fin de la vie sera l'évolution plus probable. Nous nous attacherons maintenant à essayer de traduire la notion de besoin, abordée au début de cette section.

Pour ce faire, considérons un premier problème d'optimisation défini pour une seule personne. Supposons que l'on puisse considérer une fonction d'utilité qui dépende de l'état où se trouve cette personne et que l'on cherche à maximiser la somme des utilités accumulées sur la durée de vie d'une personne. Pour chaque famille μ on obtiendra, par une technique de programmation dynamique (cf. Ross (1970)), une stratégie optimale qui associe à tout état j une activité $l_\mu\ (j)$. C'est cette activité $l_\mu\ (j)$ que nous appellerons le besoin d'un individu dans la famille μ dans l'état j.

A cause de cette interaction entre l'offre de services et la demande, due aux effets de l'offre sur la dynamique des états, l'organisation du secteur de l'offre est plus complexe. L'approche utilisée dans la section précédente ne peut être étendue à ce nouveau problème car il se pourrait que, du fait de ressources limitées, l'offre de service ne puisse pas couvrir tous les besoins. Alors, il faudrait procéder à une allocation qui tienne compte des déséconomies relatives, entraînées par la non-satisfaction des besoins d'individus dans différents états. Une formulation mathématique de ce problème sera proposée en section 6.

4. *Gestion du système d'éducation*

Comme dernier exemple de champ d'application de cette méthodologie d'analyse de l'offre et de la demande de service, nous pouvons considérer le domaine de l'éducation. R. Stone (1965) a proposé un modèle du système d'éducation qui peut être rapproché de celui que nous décrivons dans cet article.

Le système d'éducation reçoit un flot d'étudiants qui circulent à travers les différents niveaux et les différents secteurs d'enseignement. Ainsi, l'état j repère un niveau, en général indiqué par une année d'étude, la famille μ repère une catégorie sociale cependant que la tribu P_i repère un secteur ou un cycle du système d'enseignement (par exemple l'école primaire dans une certaine région géographique, ou bien les instituts d'enseignement technologique, etc.). On peut ainsi tenir compte du type d'enseignement offert (la « tribu »), des caractéristiques dynamiques propres à différentes couches sociales dans ces différents types d'enseignement (la « famille ») et de l'évolution au fil des années à l'intérieur d'un secteur (l'« état »).

Un schéma markovien est certainement suffisant pour décrire la dynamique des étudiants d'une même tribu pour une famille donnée. Posons : $p_{kj}^{\mu i}$ = probabilité pour un étudiant dans l'année k du secteur i de passer dans l'année j du même secteur, alors qu'il est de condition sociale μ.

Cette probabilité est certainement directement associée au phénomène de déperdition, c'est-à-dire que la matrice des probabilités pour μ et i fixés sera de la forme :

$$p^{\mu i} = \begin{bmatrix} p_{11}^{\mu i} & p_{12}^{\mu i} & 0 & \dots & 0 & 0 & p_{1,\,n+1}^{\mu i} \\ 0 & p_{22}^{\mu i} & p_{23}^{\mu i} & \dots & 0 & 0 & p_{2,\,n+1}^{\mu i} \\ 0 & 0 & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{n,\,n}^{\mu i} & p_{n,\,n+1}^{\mu i} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'état absorbant $n+1$ repère l'abandon des études dans ce cycle avec

$$p_{12}^{\mu i} \leqq 1 - p_{11}^{\mu i}$$

$$p_{n-1,\,n}^{\mu i} \leqq 1 - p_{n-1,\,n-1}^{\mu i}$$

Des étudiants quittent une tribu i soit par « déperdition », soit après avoir satisfait à l'ensemble des exigences du cycle (« graduation »).

Nous devons tenir compte aussi de la possibilité d'avoir des transferts d'une tribu à une autre, par un phénomène d'immigration. Il semble possible d'envisager la modélisation du phénomène d'immigration d'un cycle vers l'autre comme un processus semi-markovien. En effet, un étudiant qui termine ses études de niveau collégial peut se destiner à des études supérieures en droit mais passera d'abord un certain nombre d'années sur le marché du travail avant d'entreprendre ces études. Un autre étudiant par contre fera la transition immédiatement. Le phénomène peut avoir des aspects géographiques puisque certaines institutions vont puiser leur recrutement d'étudiants dans diverses régions du pays.

$\omega_{ii'}^{kj}$ = probabilité pour qu'un individu qui a quitté la tribu i dans l'état k accède à la tribu i' dans l'état j.

$h_{ii'}^{kj}(n)$ = probabilité pour que l'individu qui va faire la transition décrite ci-dessus passe n années avant de la réaliser.

On a alors une description de la dynamique « intra » et « inter-tribus ».

La description de la demande de ressources sera relativement facile, compte tenu de normes qu'édictent généralement les ministères sur le nombre d'étudiants par classe, le nombre de professeurs par classe, etc., dans les différents cycles. On peut s'attendre à voir apparaître un effet de l'offre de services sur la dynamique des étudiants. Cet aspect pourrait être discuté dans les mêmes termes généraux que dans la section précédente.

Pour compléter cette section citons les travaux de Zemach (1968) sur l'allocation des ressources dans le système d'enseignement supérieur ainsi qu'un chapitre du livre de Lesourne (1972) qui indique des possibilités de calcul économique à partir d'une formulation apparentée à celle que nous venons de décrire.

5. *Précision et contrôle d'une population semi-markovienne*

Cette section, ainsi que la suivante, est consacrée à des développements mathématiques donnant les formules de prévision utilisables pour le contrôle d'une population semi-markovienne.

Nous disons qu'une population est semi-markovienne si chaque individu d'une famille μ a un état qui évolue suivant un processus semi-markovien. Définissons donc :

$p^{\mu}_{jk}(l)$ = probabilité pour un individu de la famille μ qui se trouve dans l'état j de passer ensuite dans l'état k, quand on lui offre le service l ;

$h^{\mu}_{jk}(l\,;n)$ = probabilité pour qu'un individu de la famille μ qui va faire une transition de l'état k vers l'état j reste n périodes dans l'état j avant de passer à l'état k, quand on lui offre le service l.

Le recensement de la population au temps t (début de la t-ième période) est donné par le vecteur

$$X(t) = \{X^{\mu}_{j}(t)\}_{j \in E_{\mu},\ \mu \in M_{i},\ i \in I}$$ [1]

$X^{\mu}_{j}(t)$ = nombre d'individus de la famille μ dans l'état j.

Le vecteur d'nformation à l'instant t est :

$$N(t) = \{N^{\mu}_{jrl}(t)\}_{j \in E_{\mu},\ \mu \in M_{i},\ i \in I,\ l \in L}$$

$$r = 1, 2, \ldots, \infty$$

où

$N^{\mu}_{jrl}(t)$ = nombre d'individus de la famille μ qui se trouvent dans l'état j depuis r périodes et qui reçoivent le service l.

Considérons enfin le processus de naissance des individus. Souvent ces « naissances » ne sont pas contrôlées ; c'est le cas pour les personnes âgées. D'autres fois on peut contrôler une partie des naissances, c'est le cas dans l'admission des patients électifs dans un département de chirurgie d'un hôpital. Définissons donc de façon générale.

---

1. Nous adopterons la notation $j \in E_{\mu}$ au lieu de $j \in E_{i\mu}$.

$e_\mu(t)$: nombre aléatoire de naissances incontrôlées d'individus dans la famille μ en période t. On supposera que $e_\mu\ (t)$ et $e_{\mu'}\ (t')$ sont des variables aléatoires indépendantes si $\mu \neq \mu'$ et $t \neq t'$.

$\pi_j^\mu(1)$: probabilité pour que l'individu qui naît de façon incontrôlée dans la famille μ ait l'état initial j.

$\alpha_\mu(t)$: nombre déterminé de naissances contrôlées dans la famille μ en période t.

$\theta_j^\mu(1)$: probabilité pour que l'individu qui naît de façon contrôlée dans la famille μ ait l'état initial j.

Nous sommes en mesure d'établir des formules de prévision, quand une stratégie d'offre de service a été choisie.

Une stratégie d'offre de service est une application $\omega^\mu(\,.\,)$ qui associe à un état j une distribution de probabilité $\{\omega_l^\mu(j)\}_{l \in L}$ sur l'ensemble des services offerts.

Ainsi, suivant la stratégie ω^μ valable pour la famille μ, si un individu entre dans l'état j en début de période t il y a une probabilité $\omega_l^\mu(j)$ qu'on lui offre le service l pour toute la durée de son séjour dans l'état j.

Définissons :

$\varphi_{jk}^\mu\ (n)$: probabilité pour un individu de la famille μ qui entre dans l'état i au début de la période 1 de se trouver dans l'état j en période n.

On a ainsi :

$$\varphi_{ij}^\mu\ (1) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

Définissons aussi :

$\tilde{W}_{il}^\mu(n)$: probabilité pour un individu de la famille μ qui se trouve dans l'état i et reçoit le service l de rester n périodes dans cet état.

Nous obtenons par un calcul simple :

$$\tilde{W}_{il}^\mu\ (n) = \sum_{k \in E_\mu} \sum_{m=n}^{\infty} p_{ik}^\mu\ (l)\ h_{ik}^\mu\ (l\,;m) \tag{4}$$

et nous pouvons établir la formule de récurrence suivante pour les termes $\varphi_{ij}^\mu\ (n)$:

$$\varphi_{ij}^\mu\ (n) = \sum_{l \in L} \{\delta_{ij}\, \tilde{W}_{il}^\mu\ (n) + \sum_{k \in E_\mu} p_{ik}^\mu\ (l) \sum_{m=1}^{n-1} h_{ik}^\mu\ (l\,;\ m).$$
$$\varphi_{kj}^\mu\ (n-m)\}\ \omega_l^\mu\ (i) \tag{5}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Maintenant définissons :

$\gamma^{\mu}_{ki}(s/r, l)$ = probabilité pour un individu de la famille μ qui se trouve dans l'état k depuis r périodes et qui reçoit le service l, de passer dans l'état i dans s périodes exactement.

On a :

$$\gamma^{\mu}_{ki}\ (s/r,\ l) = \frac{p^{\mu}_{ki}(l)\ h^{\mu}_{ki}(l\ ; s+r)}{\tilde{W}^{\mu}_{kl}\ (r)} \tag{6}$$

Posons :

$\psi^{\mu}_{i}\ (\delta/k, r, l)$ = probabilité pour un individu de la famille μ qui se trouve dans l'état k depuis r périodes et qui reçoit le service l de se trouver dans l'état i, δ périodes plus tard.

Nous obtenons par un calcul simple :

$$\gamma^{\mu}_{i}\ (\delta/k, r, l) = \sum_{j \in E_{\mu}} \sum_{s=1}^{\delta-1} \gamma^{\mu}_{kj}\ (s/r, l)\ \varphi^{\mu}_{ji}\ (\delta - s)$$

$$+ \delta_{ki} \sum_{j \in E_{\mu}} \sum_{s=1}^{\infty} \gamma^{\mu}_{kj}\ \delta + s\ /\ r, l) \tag{7}$$

Si nous désignons par $C^{\mu}_{j}\ (t,\ t+\delta)$ le nombre d'individus qui se trouvent dans la famille μ au début de la période $t+\delta$ et qui se trouvent dans l'état j en périodes $t+\delta$ nous voyons que nous avons :

$$E[C^{\mu}_{j}\ (t, t+\delta)\ |\ N(t)] = \sum_{k \in E_{\mu}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l \in L} N^{\mu}_{krl}\ (t)\ \psi^{\mu}_{j}\ (\delta/k, r, l) \tag{8}$$

$$\text{Var}\ [C^{\mu}_{j}\ (t, t+\delta)\ |\ N(t)] = \sum_{k \in E_{\mu}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l \in L} N^{\mu}_{krl}\ (t)\ .$$

$$\psi^{\mu}_{j}\ (\delta\ |\ k, r, l)\ [1 - \psi^{\mu}_{j}\ (\delta\ |\ k, r, l)] \tag{9}$$

$$\text{Cov}\ [C^{\mu}_{j}\ (t, t+\delta), C^{\mu}_{i}\ (t, t+\delta)\ |\ N(t)] = -\sum_{k \in E_{\mu}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l \in L} N^{\mu}_{krl}\ (t)$$

$$\psi^{\mu}_{j}\ (\delta\ |\ k, r, l)\ \psi^{\mu}_{i}\ (\delta\ |\ k, r, l) \tag{10}$$

Les formules (8), (9) et (10) constituent un premier moyen de prévision de l'état de la population dans δ périodes. Il faut, pour obtenir des formules de prévision complètes, tenir compte aussi des naissances qui vont se produire entre les périodes t et $t+\delta$.

Définissons :

$\pi_j^\mu(n) =$ probabilité pour qu'un individu né de façon incontrôlée au début de la période 1 se trouve dans l'état j en période n.

Nous obtenons :

$$\pi_j^\mu(n) = \sum_{i \in E_\mu} \pi_i^\mu(1)\, \varphi_{ij}^\mu(n-1) \tag{11}$$

et si nous posons :

$$u_\mu(t) = E[e_\mu(t)] \ , \ v_\mu(t) = \mathrm{Var}\,[e_\mu(t)]$$

nous obtenons les formules de prévision pour le nombre $D_j^\mu\,(t,\ t+\delta)$ d'individus qui naissent de façon incontrôlées entre les périodes t et $t+\delta$ et se trouvent dans l'état j en période $t+\delta$

$$E\,[D_j^\mu\,(t, t+\delta)] = \sum_{m=1}^{\infty} u_\mu(t+m)\ \pi_j^\mu\,(\delta+1-m) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\ &[D_j^\mu\,(t, t+\delta)] \\ &= \sum_{m=1}^{\delta} u_\mu(t+m)\ \pi_j^\mu\,(\delta+1-m).(1-\pi_j^\mu\,(\delta+1-m)) \\ &\qquad + \sum_{m=1}^{\delta} v_\mu(t+m)\ [\pi_j^\mu\,(\delta+1-m)]^2 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\ &[D_j^\mu\,(t, t+\delta),\ D_i^\mu\,(t,\ t+\delta)] \\ &= -\sum_{m=1}^{\delta} u'_\mu\,(t+m)\ \pi_j^\mu\,(\delta+1-m)\ \pi^\mu\,(\delta+1-m) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\delta} v_\mu\,(t+m)\ \pi_j^\mu\,(\delta+1-m)\ \pi_i^\mu(\delta+1-\mathrm{m}) \end{aligned} \tag{14}$$

Enfin, en définissant

$\theta_j^\mu\,(n) =$ probabilité qu'un individu né de façon contrôlée dans la famille μ au début de la période 1 se trouve dans l'état j en période n,

nous obtenons :

$$\theta_j^\mu\,(n) = \sum_{i \in E_\mu} \theta_i^\mu\,(1)\ \varphi_{ij}^\mu\,(n-1)$$

et, si $A_j^\mu\,(t,\ t+\delta)$ représente le nombre d'individus nés de façon contrôlée dans la famille μ entre les périodes t et $t+\delta$ qui se trouvent dans l'état j en périodes $t+\delta$ nous avons :

$$E\,[A_j^\mu\,(t, t+\delta)] = \sum_{m=1}^{\delta} a_\mu\,(t+m)\ \theta_j^\mu(\delta+1-m) \tag{16}$$

Var $[A_j^\mu(t, t+\delta)]$

$$= \sum_{m=1}^{\delta} a_\mu\ (t+m)\ \theta_j^\mu(\delta+1-m)\ [1-\theta_j^\mu(\delta+1-m)] \qquad (17)$$

Cov $[A_j^\mu\ (t, t+\delta), A_i^\mu\ (t, t+\delta)]$

$$= -\sum_{m=1}^{\delta} a_\mu\ (t+m)\ \theta_j^\mu\ (\delta+1-m)\ \ \theta_i^\mu\ (\delta+1-m) \qquad (18)$$

Comme on a :

$$X_j^\mu\ (t+\delta) = C_j^\mu\ (t, t+\delta) + D_j^\mu\ (t, t+\delta) + A_j^\mu\ (t, t+\delta) \qquad (19)$$

et que les trois variables aléatoires du membre de droite sont indépendantes, il nous est possible d'exprimer l'espérance mathématique et les variances et covariances des variables X_j^μ $(t+\delta)$. Nous avons ainsi obtenu les formules de prévision du recensement à partir du vecteur d'information N (t).

A partir de ces formules de prévision nous pouvons poser certains problèmes de contrôle de la population en les formulant comme des successions de programmes mathématiques.

En effet, imaginons, de façon générale qu'il y ait un coût C $(X(t))$ associé au recensement $X(t)$ et que, pour une stratégie d'offre de service donnée nous voulions trouver une politique de « contrôle des naissances » qui minimise le coût moyen à long terme ; c'est-à-dire telle que :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} [E\ C(X(t))] \qquad (20)$$

soit minimal.

Dans Collart et Haurie (1975, 1976) nous avons proposé de chercher une solution sous-optimale à ce problème en résolvant à chaque période t le problème suivant :

$$\text{Min} \sum_{\delta=1}^{\Delta} E[C(X(t+\delta))\ /\ N(t)]$$

où le minimum est pris relativement aux variables a (t), ..., a $(t+\Delta-1)$ qui donnent le nombre de naissances contrôlées pour chaque période et où des contraintes faisant intervenir l'espérance mathématique et la variance de X $(t+\delta)$ pour les différents δ peuvent apparaître. Seule la variable optimale a^* (t) sert effectivement comme politique, les autres variables a^* $(t+1)$ ... a^* $(t+\Delta-1)$ n'ont servi qu'à prendre en compte le futur pour trouver a^* (t). A la période suivante, t est augmenté d'une unité et le même problème est résolu. La décision à prendre en $t+1$ est alors obtenue et ainsi de suite...

Selon un langage d'automaticien cela revient à piloter le système à l'aide d'une boucle ouverte adaptée à chaque période à l'information disponible. C'est cette technique qui a permis de montrer qu'un contrôle de l'admission des patients électifs dans un service de chirurgie pouvait éventuellement permettre de contrôler la demande de soins (cf. Haurie *et alii*, 1976).

6. *Ajustement offre-demande ; statique et dynamique*

Deux cas se présentent ici. Dans le premier, l'offre de service n'agit pas sur la dynamique de la population. Il y a alors « découplage » entre les systèmes de demande et d'offre. Une fois les prévisions réalisées sur le recensement futur de la population et donc sur la demande de service qu'elle aura, l'organisation de l'offre est un problème classique d'allocation des ressources.

Une description de cette approche appliquée à la gestion du personnel infirmier d'un service de chirurgie peut être obtenue dans Haurie *et alii* (1976).

Le second cas, que nous avons déjà abordé en section 3, est celui où l'offre de services agit sur les probabilités de transition ou les probabilités de séjour dans un état.

Supposons qu'un individu qui est dans l'état j de la famille μ et à qui l'on offre le service l requiert une quantité $q_{lr}^{\mu j}$ de la ressource r.

Si une stratégie $\omega_{l}^{\mu}(\,.\,)$ est adoptée et si le recensement est donné par $X(t)$ la demande moyenne de ressource r sera donnée par :

$$\sum_{i\in I}\ \sum_{\mu\in M_i}\ \sum_{j\in E_\mu} X_j^\mu(t)\ \omega_l^\mu(j)\ q_{lr}^{\mu j} = \bar{Q}_r(X(t)) \tag{21}$$

et la variance de cette demande sera donnée par :

$$\sum_{i\in I}\ \sum_{\mu\in M_i}\ \sum_{j\in E_\mu} X_j^\mu(t)\ \omega_l^\mu(j)\ (1-\ \omega_l^\mu(j))\ (q_{lr}^{\mu j})^2 = {}^vQ_r(X(t)). \tag{22}$$

Si la ressource r est disponible en période t, en quantité $B_r(t)$ le choix de la stratégie pourrait être tel qu'une contrainte de la forme :

$$\bar{Q}_r(X(t)) + \lambda[{}^vQ_r(X(t))]^{1/2} \leq B_r(t) \tag{23}$$

soit satisfaite, ce qui limiterait la probabilité de surutilisation de la ressource r.

Si le besoin d'un individu dans l'état j de la famille est donné par la fonction :

$$l_\mu^*(j)$$

Nous pouvons chercher la stratégie qui, tout en respectant des contraintes de type (23), rende minimale une expression de la forme :

$$C[X(t), \omega(.)] = \sum_{i \in I} \sum_{\mu \in M_i} \sum_{j \in E_\mu} X_j^\mu (t) \sum_{l \in L} \hat{\gamma}_{jl}^{i\mu} \omega_l^\mu (j) \, (l - l_\mu^*(j))^2 \quad (24)$$

qui est un coût encouru quand on offre aux individus de la population des services qui ne sont pas exactement conformes à leurs besoins. $\hat{\gamma}_{jl}^{i\mu}$ est un coefficient de pondération.

Mais le choix d'une stratégie influe sur la dynamique de la population. Nous pourrions, ici aussi, essayer de résoudre le problème sur plusieurs périodes en considérant le critère.

$$\text{Min} \sum_{\delta=1}^{\Delta} E\,[C(X(t+\delta)) \mid N(t)] \quad (25)$$

et en adaptant les formules (21) — (23) en des contraintes à respecter pour $t+1$, ... $t+\Delta$. Là encore, la stratégie pourra être adaptée aux informations $N\ (t+1)$, $N\ (t+2)$, ... par un système de boucle ouverte adaptée.

Cette approche néglige cependant un aspect important du phénomène d'offre de service ; c'est un certain caractère de récurrence qui peut en faire, lui-même, un processus de type markovien. Par exemple, si un individu reçoit un certain type de service en période t cela pourra influencer sa probabilité de recevoir d'autres types de service aux périodes suivantes. Il faudrait alors élargir la dimension de l'espace d'état décrivant le système.

7. *Problèmes à surmonter*

Nous n'avons pu encore formuler le problème de l'interaction entre les secteurs d'offre et de demande de service de façon à tenir complètement compte de l'effet de l'offre sur la dynamique de la demande. C'est ici que de nouveaux développements théoriques sont souhaitables.

Ces modèles de diffusion d'une population semi-markovienne consomment beaucoup de données qui ne sont pas toujours disponibles. Cependant, sur la plupart des questions relatives à la demande de services sociaux ou de santé, l'avis d'experts ou de professionnels peut être recueilli pour faire des évaluations subjectives raisonnables. Une procédure systématique alliant ces informations à priori à une cueillette des données subséquente devrait être envisagée lors de toute tentative d'implantation d'un tel modèle.

Mais le problème majeur à résoudre pour appliquer cette méthodologie à l'analyse de problèmes concrets d'organisations de l'offre de services d'éducation, sociaux ou de santé, est de constituer des équipes ayant au moins trois types de qualifications :

— expérience dans l'organisation concrète de ces services ;
— connaissance des phénomènes sociaux, physiologiques et culturels à la base de la dynamique de la demande ;
— expertise dans les techniques stochastiques de la recherche opérationnelle.

8. *Conclusion*

Nous espérons avoir pu montrer dans ces quelques pages qu'il existe des techniques mathématiques permettant de modéliser les phénomènes dynamiques à la base de la demande de certains services occasionnée par des populations d'individus. Certaines applications au domaine de la santé ont déjà pu être réalisées ; c'est cependant dans le domaine de l'organisation de l'offre de services sociaux que se pose certainement le plus gros défi. Nous avons esquissé les grandes lignes de ce que pourrait être un modèle de ce type appliqué à la planification de l'offre de services aux personnes âgées et nous avons montré comment on peut intégrer l'effet de l'offre de service sur la dynamique de la demande, aux formules de prévision et de contrôle d'une population semi-markovienne.

Alain HAURIE,
École des Hautes Études commerciales (Montréal).

RÉFÉRENCES

A. ALJ et A. HAURIE, 1979, « Description and Control of a Population Process », *Proceedings IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego.

D. COLLART, A. HAURIE, 1975, « Un modèle général pour analyser la sensibilité d'un service interne d'un hôpital aux différents moyens de contrôle », *Actes du colloque sur la théorie des systèmes et la gestion scientifique des services publics*, Université de Montréal (C.R.M.) et Ecole des H.E.C., Montréal, Canada.

D. COLLART et A. HAURIE, 1976, « On a Suboptimal Control of a Hospital Inpatient Admission System », *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, vol. AC 21, avril, pp. 233-238.

S. FANSCHEL, 1975, « The Welfare of the Elderly, A Systems Analysis Viewpoint », *Policy Science*, vol. 6, pp. 343-357.

A. HAURIE *et alii*, 1976, *Modèles de simulation de l'ajustement de l'offre à la demande de soins dans un service de chirurgie*, Rapport de recherche #76 - 10, Ecole des H.E.C., Montréal.

E.P.C. KAO, 1972, « A Semi-Markov Model to Predict Recovery Progress of Coronary Patients », *Health Services Research*, pp. 191-208.

E.P.C. KAO, 1973, « A Semi-Markovian Population Model with Application to Hospital Planning », *IEEE Trans. Syst. man. Cybernetics*, vol. SMC 3, pp. 327-336.

J. LESOURNE, 1972, *Le calcul économique*, Dunod.

S.M. ROSS, 1970, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden Day.

R.D. SMALLWOOD *et alii*, 1969, « A Medical Service Requirements Model for Health System Design », *Proceedings IEEE*, vol. 57, pp. 1880-1887.

R. STONE, 1965, « A Model of the Educational System », *Minerva (London)*, vol. 3, nº 2, pp. 172-186.

D.M. WARNER et J. PRAWDA, 1972, « Mathematical Programming Model for Scheduling Nursing Personnel », *Management Science*, vol. 19, nº 4, pp. 411-422.

R. ZEMACH, 1968, « A State-Space Model for Resource Allocation in Higher Education », *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, juillet, pp. 108-118.