L'Actualité économique

Une démonstration élémentaire du théorème de Sharpe-Lotka dans le cas discret

Pierre Fortin

Volume 56, Number 1, janvier–mars 1980

URI: https://id.erudit.org/iderudit/600894ar
DOI: https://doi.org/10.7202/600894ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this note

Fortin, P. (1980). Une démonstration élémentaire du théorème de Sharpe-Lotka dans le cas discret. *L'Actualité économique*, *56*(1), 127–132. https://doi.org/10.7202/600894ar

Une démonstration élémentaire du théorème de Sharpe-Lotka dans le cas discret

Le théorème de Sharpe-Lotka (1911 ; Leslie, 1945) fournit un exemple très intéressant de l'application de l'algèbre linéaire à la théorie de la population.

Soit $x(a, t)$ le nombre de personnes d'âge a au temps t, où $a = 1, 2, 3, \ldots, n$, $t = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ et $x(t)$ est le vecteur colonne des n éléments $x(1, t), \ldots, x(n, t)$. Pour tout t, le vecteur $x(t)$ sera transformé à la date suivante $(t + 1)$ en un vecteur $x(t + 1)$ au moyen d'une matrice carrée M d'ordre n. Cette matrice est appelée la *matrice de projection* de la population en question :

$$x(t+1) = Mx(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \tag{1}$$

et elle est un résumé des forces de natalité et de mortalité qui caractérisent la population. Dans sa première ligne, l'élément m_{1j} indique combien, en moyenne, chaque personne d'âge $a = j$ engendrera d'enfants par unité de temps ; ainsi, le produit de cette première ligne et du vecteur $x(t)$ donne le nombre de personnes d'âge $a = 1$ (premier élément de $x(t + 1)$) au temps $t + 1$. Les éléments m_{1j} sont évidemment nuls pour les indices j qui se situent hors de la période de fécondité (ex. : 15 à 49 ans). Les seuls autres éléments de M qui ne sont pas nuls sont les éléments qui forment la diagonale immédiatement au sud-ouest de la diagonale principale de M, c'est-à-dire les éléments $m_{21}, m_{32}, m_{43}, \ldots, m_{n,\,n-1}$. Ces éléments, par exemple $m_{i,\,i-1}$, représentent les taux de survivance pour chaque âge $a = i - 1$ lorsqu'on passe du temps t au temps $t + 1$ et que les survivants passent à l'âge $a = i$. La matrice M est non négative et prend la forme suivante :

$$M = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & m_{1,15} & m_{1,16} \ldots m_{1,49} & 0 \ldots\ldots 0 \\
m_{21} & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\
0 & m_{32} & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\
0 & 0 & m_{43} \ldots\ldots 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\
0 & \ldots\ldots & & & & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots 0 & 0 & m_{n,\,n-1} & 0
\end{bmatrix}$$

Bien sûr, les forces de natalité et de fécondité peuvent évoluer à travers le temps, mais dans les hypothèses du théorème de Sharpe-Lotka, on les suppose fixes indéfiniment (M est une matrice constante).

Ces préalables étant acquis, le théorème de Sharpe-Lotka affirme qu'une population soumise à des forces de natalité et de mortalité stables tend asymptotiquement, premièrement, vers une répartition selon l'âge qui ne dépend pas de la répartition initiale (quelle qu'elle soit), mais seulement de ces forces stables ; et, deuxièmement, vers un taux de croissance (ou de diminution) qui est le même pour tous les âges et pour l'ensemble de la population.

Pour démontrer ce théorème, il faut remarquer que M étant une matrice non négative, elle possède une et une seule valeur propre *positive* $\lambda_1 > 0$ à laquelle correspond un unique vecteur propre *positif* v_1 (qu'on normalisera suivant la relation $\sum_{a=1}^{n} v_{1a} = 1$, où v_{1a} est le $a^{\text{ième}}$ élément de v_1). De plus, toutes les autres valeurs propres (distinctes) de M, soient $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sont inférieures à λ_1 en valeurs absolues. Ces résultats sont le fruit d'un théorème fondamental de la théorie des matrices non négatives, le théorème de Perron-Frobénius (Gantmacher, 1966, 49-50).

La fraction de la population d'âge a au temps t est égale à $x(a,t)/\sum_{a=1}^{n} x(a,t)$. De plus, le rapport entre le nombre de personnes d'âge a au temps $t+1$ et le nombre de personnes du même âge au temps t est $x(a,t+1)/x(a,t)$. Le théorème de Lotka affirme en fait que :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(a,t)}{\sum_{a=1}^{n} x(a,t)} = v_{1a} \quad , \quad a = 1, \ldots, n,$$

c'est-à-dire que le vecteur propre positif (normalisé) v_1 correspondant à la valeur propre positive λ_1 de M nous donnera précisément la répartition asymptotique de la population selon l'âge ! Et, deuxièmement, que :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(a,t+1)}{x(a,t)} = \lambda_1 \quad \text{pour } tout \ a,$$

c'est-à-dire que la valeur propre positive λ_1 de M elle-même sera exactement égale au facteur d'augmentation (ou de diminution) asymptotique du nombre de personnes dans tous et chacun des âges et, par conséquent, dans l'ensemble de la population !

Le taux de croissance (ou de diminution) asymptotique sera évidemment $r = \lambda_1 - 1$, de sorte que la population croîtra, sera stationnaire ou décroîtra asymptotiquement selon que λ_1 sera supérieur, égal ou inférieur à l'unité. On remarquera aussi que le détail des forces de natalité (première ligne de M) et de mortalité (première sous-diagonale de M) importe peu en soi, mais seulement en autant qu'il détermine λ_1 et v_1. Ainsi plusieurs matrices M peuvent être compatibles avec les mêmes λ_1 et v_1. Nous passons maintenant à la preuve du théorème de Sharpe-Lotka.

Par définition, les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de M et leurs vecteurs propres correspondants $v_1, ..., v_n$ satisfont aux relations :

$$Mv_i = \lambda_i v_i \quad , \quad i = 1, ..., n.$$

Si on appelle V la matrice carrée d'ordre n dont les n colonnes sont les n vecteurs propres $v_1, ..., v_n$ de M, et L la matrice diagonale d'ordre n dont les éléments de la diagonale sont $\lambda_1, ..., \lambda_n$, on peut récrire les relations précédentes sous forme matricielle :

$$MV = VL.$$

Comme $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont distinctes, les vecteurs $v_1, ..., v_n$ sont linéairement indépendants et la matrice V est non singulière. De sorte que l'on a :

$$M = VLV^{-1}$$

De plus :

$$M^2 = MM = (VLV^{-1})\,(VLV^{-1}) = VL^2V^{-1}$$

et, par récurrence :

$$M^t = VL^tV^{-1} \quad , \quad t = 1, 2, 3, ..., \infty. \tag{2}$$

Supposons que le vecteur initial du nombre de personnes dans chaque groupe d'âge soit arbitraire, et égal à $x(0)$. Ce vecteur est non négatif et on ne lui demande que d'avoir du monde dans au moins un des âges féconds. Suivant l'équation (1) de la page 127, qui décrit le renouvellement de la population, on a :

$$x(1) = Mx(0),$$
$$x(2) = Mx(1) = M^2x(0)$$

et, par récurrence :

$$x(t) = M^tx(0) \quad , \quad t = 1, 2, ..., \infty. \tag{3}$$

Si on combine les équations (2) et (3), on obtiendra :

$$x(t) = VL^tV^{-1}x(0), \tag{4}$$

et si on définit le vecteur $c = V^{-1}x(0)$, (4) entraînera :

$$x(t) = VL^tc \tag{5}$$

On notera que c_1, le premier élément du vecteur colonne c, est un scalaire positif. En effet, c_1 est, suivant la définition de c, le produit de la première ligne de V^{-1} (appelons-la w_1) et du vecteur colonne $x(0)$. Or, comme $M = VLV^{-1}$ (voir page 129), on a $V^{-1}M = LV^{-1}$. Si on détache de cette dernière relation matricielle la première rangée, il s'ensuit que $w_1 M = \lambda_1 w_1$, ou, en transposant,

$$M' w_1' = \lambda_1 w_1'.$$

Le vecteur colonne w_1' est le vecteur propre de la matrice M' correspondant à sa valeur propre positive λ_1. Vu que M', comme M, est une matrice non négative, elle satisfait aussi au théorème de Perron-Frobénius. Donc, w_1' est un vecteur colonne à éléments positifs et le produit $w_1 x(0) = c_1$ est un scalaire positif, tel qu'on l'a prétendu. Il est évident que c_1 est un scalaire proportionnel à la dimension de la population initiale distribuée par âge dans le vecteur $x(0)$.

Le vecteur colonne $L^t c$ a pour élément-type le nombre $c_i \lambda_i^t$, $i = 1, ..., n$. En particulier, $c_1 \lambda_1^t$ est positif, car $c_1 > 0$ et $\lambda_1 > 0$. Les autres peuvent être négatifs, nuls ou complexes. Il s'ensuit qu'on peut exprimer $x(t)$, à partir de (5), comme une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, ..., v_n$, soit :

$$x(t) = \sum_{a=1}^{n} \lambda_i^t c_i v_i \tag{6}$$

Si on divise les deux membres de (6) par $c_1 \lambda_1^t > 0$, on obtient :

$$\frac{x(t)}{c_1 \lambda_1^t} = v_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t \frac{c_2}{c_1} v_2 + ... + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^t \frac{c_n}{c_1} v_n. \tag{7}$$

Mais :

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t = 0, \quad i = 2, 3, ..., n,$$

puisqu'en vertu du théorème de Perron-Frobénius, (page 128), on a $|\lambda_i / \lambda_1| < 1$, pour $i \geqq 2$. Par conséquent, de (7) on tire :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(t)}{c_1 \lambda_1^t} = v_1, \tag{8}$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(a, t)}{c_1 \lambda_1^t} = v_{1a}, \quad a = 1, ..., n, \tag{9}$$

où $x(a, t)$ et v_{1a} sont les $a^{\text{ième}}$ composantes de $x(t)$ et de v_1, respectivement, comme on se rappellera. En faisant la somme des n limites dans (9), on obtient alors :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sum_{a=1}^{n} x(a,t)}{c_1 \lambda_1^t} = \sum_{a=1}^{n} v_{1a} = 1, \tag{10}$$

car v_1 est un vecteur positif qu'on a normalisé. Si on divise chacune des limites dans (9) par celle qu'on a obtenue en (10), on en tire la première conclusion du théorème de Sharpe-Lotka.

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(a,t)}{\sum_{a=1}^{n} x(a,t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{x(a,t)/c_1\lambda_1^t}{\sum_{a=1}^{n} x(a,t)/c_1\lambda_1^t} = v_{1a} \quad , \quad a = 1, 2, ..., n. \tag{11}$$

D'autre part, rien ne nous empêche de récrire (9) de la façon suivante :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(a, t+1)}{c_1 \lambda_1^{t+1}} = v_{1a} \quad , \quad a = 1, ..., n. \tag{12}$$

Il ne nous reste alors plus qu'à diviser chacune des n limites obtenues en (12) par la limite correspondante dans (9) pour en tirer la seconde conclusion du théorème de Sharpe-Lotka, soit :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x(a, t+1)}{x(a,t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\lambda_1 x(a, t+1)/c_1\lambda_1^{t+1}}{x(a,t)/c_1\lambda_1^t} = \lambda_1 \cdot \frac{v_{1a}}{v_{1a}} = \lambda_1 \tag{13}$$

pour tout $a = 1, ..., n$.

C.Q.F.D.

Remarques

Au cours de cette démonstration, nous avons même prouvé plus que prévu. Non seulement la répartition asymptotique selon l'âge (v_1) et le taux de croissance de chaque âge et de l'ensemble de la population ($\lambda_1 - 1$) sont-ils indépendants de $x(0)$ et caractérisés seulement par les forces de natalité et de mortalité représentées par la matrice M, mais le vecteur démographique $x(t)$ va coïncider asymptotiquement avec le vecteur $\lambda_1^t c_1 v_1$. On sait que λ_1 et v_1 proviennent de M et que c_1 est calculé à partir des conditions initiales $x(0)$. Supposons que la répartition asymptotique selon l'âge (v_1) était réalisée au temps $t = 0$ et que la population totale était c_1. Il s'ensuivrait que :

$$x(0) = c_1 v_1.$$

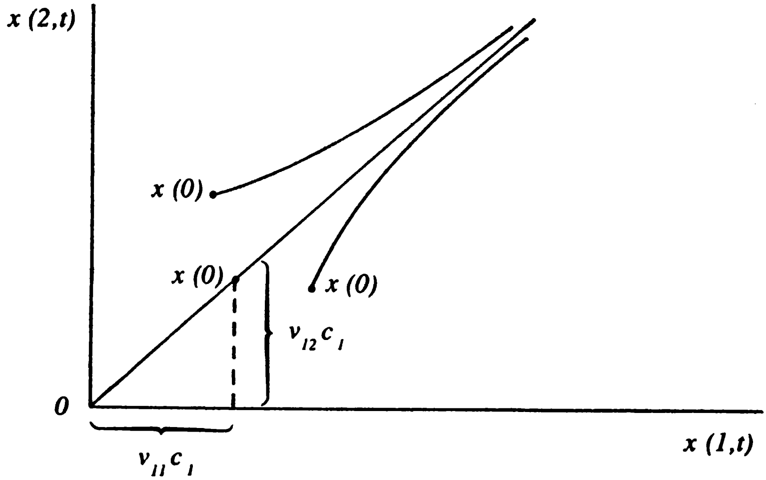
Comme v_1 est le vecteur propre positif de M, on obtiendrait, en vertu de l'équation (1) :

$$x(1) = Mx(0) = c_1 M v_1 = c_1 \lambda_1 v_1,$$
$$x(2) = Mx(1) = c_1 \lambda_1 M v_1 = c_1 \lambda_1^2 v_1$$

et par récurrence :

$$x(t) = c_1 \lambda_1^t v_1.$$

Ainsi, le processus de renouvellement de la population conserverait indéfiniment la même distribution selon l'âge (v_1) et le même taux de croissance ($\lambda_1 - 1$). Ce que le théorème de Lotka ajoute est que, quel que quel que soit notre point de départ $x(0)$, nous allons finir par rejoindre à long terme le même sentier de croissance (répartition et taux de croissance) que si l'on partait en ligne avec ce sentier dès l'instant $t = 0$.



Graphiquement, si $a = 1, 2$, seulement (i.e. $n = 2$), cela signifie que l'on finira toujours par se retrouver sur la droite issue de l'origine et de pente v_{12}/v_{11}, quel que soit le point de départ $x(0)$, dont trois exemples sont illustrés. En ce sens, on dit souvent que le théorème de Sharpe-Lotka démontre la « stabilité globale » ou « l'ergodicité » du système démographique.

Pierre FORTIN,
Université Laval.

RÉFÉRENCES

GANTMACHER, F.R. (1966), *Théorie des matrices,* tome 2, Paris, Dunod.

LESLIE, P.H. (1945), « On the use of matrices in certain population mathematics », *Biometrika* 23, 183-212.

SHARPE, F.R. and A.J. LOTKA (1911), « A problem in age-distribution », *Philosophical Magazine* VI, 21, 435-8.