Document generated on 04/25/2024 1:28 p.m.

L'Actualité économique

Multiplicateur et probabilité
Multiplier and probability

Jean Marchal and Frédéric Poulon

Volume 57, Number 1, janvier–mars 1981

URI: https://id.erudit.org/iderudit/600962ar
DOI: https://doi.org/10.7202/600962ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Marchal, J. & Poulon, F. (1981). Multiplicateur et probabilité. *L'Actualité économique*, *57*(1), 70–86. https://doi.org/10.7202/600962ar

Article abstract

Keynes begun his scientific career with probability theory. But, he had not the idea, as far as we can know, to give a probabilistic interpretation of his famous multiplier. This article is aimed at showing that probability theory, and especially finite Markov chains theory, gives an easier and even more natural interpretation of the keynesian multiplier than the traditional methods.

Multiplier theory may be looked on as old-fashioned today, but it is still at the heart of most of macroeconometric models. So, we define first the relative position of the multiplier, which is linear and actually static, inside these models which are non-linear and dynamic.

Secondly, we give a markovian interpretation of the income multiplier in both cases of the simple multiplier and the matrix multiplier. We compare it with the traditional interpretation: in the probabilistic interpretation every kind of economic agents (banks and firms, and not only households) take a part in the process of incomes which leads to the multiplier.

Finally, we enlarge our method to the neighbouring analysis of the money multiplier and of the velocity of money.

Our conclusion is that the markovian method could also be used for a keynesian crisis analysis.

Tous droits réservés © HEC Montréal, 1981

This document is protected by copyright law. Use of the services of Érudit (including reproduction) is subject to its terms and conditions, which can be viewed online.

https://apropos.erudit.org/en/users/policy-on-use/

This article is disseminated and preserved by Érudit.

Érudit is a non-profit inter-university consortium of the Université de Montréal, Université Laval, and the Université du Québec à Montréal. Its mission is to promote and disseminate research.

https://www.erudit.org/en/

MULTIPLICATEUR ET PROBABILITÉ

Des années trente jusqu'aux années cinquante de ce siècle, la théorie du multiplicateur a connu un âge d'or. De Cambridge où elle est née, elle se propage à toutes les universités qui lui reconnaissent une place centrale dans leurs enseignements et recherches économiques. L'engouement pour le multiplicateur est peut-être plus tardif dans les universités françaises où l'on voit soutenues jusque vers la fin des années soixante des thèses sur le sujet [1]. Mais le point culminant de la recherche reste, en 1951, le livre de J.S. Chipman [2] aux États-Unis. Aujourd'hui, la théorie du multiplicateur est passée de mode depuis deux ou trois décennies, mais elle occupe toujours une place tranquille et peu contestée au coeur de la dynamique de la plupart des grands modèles macroéconomiques.

Notre intention n'est certes pas de lui contester cette place ni de troubler la quiétude de tous ceux qui voient dans la mécanique du multiplicateur un substitut à celle, enrayée, de l'équilibre de marché. Nous resterons en deçà de la théorie fondamentale, notamment celle de B. Schmitt [3] allant jusqu'à nier au multiplicateur la possibilité même d'être différent de l'unité. Nous voulons seulement, compte tenu de la place qu'occupe encore le multiplicateur dans les modèles macroéconomiques, expliquer une autre méthode d'analyse du traditionnel multiplicateur de revenu : la méthode probabiliste. Nous l'appliquerons aussi au multiplicateur de crédit et à la vitesse de circulation de la monnaie.

L'optique probabiliste qui sera ici la nôtre n'est pas seulement prise pour regarder différemment quelque chose de trop connu. Nous voudrions surtout montrer qu'elle correspond peut-être à la vision la plus naturelle des phénomènes de circulation monétaire à la théorie desquels appartient le multiplicateur keynésien. D'ailleurs, le calcul

1. G. Molins-Ysal, *Les applications du multiplicateur matriciel à l'analyse économique,* Thèse, Toulouse, 1967.

2. J.S. Chipman, *The Theory of Inter-Sectoral Money Flows and Income Distribution,* The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1951.

3. B. Schmitt, *L'analyse macroéconomique des revenus,* Dalloz, Paris, 1971.

des probabilités fut aussi, d'une certaine façon, un point de départ de la réflexion de Keynes lui-même [4].

1. LA PLACE DU MULTIPLICATEUR DANS LES MODÈLES MACROÉCONOMIQUES

Le multiplicateur occupe une place centrale dans les modèles macroéconomiques, comme en témoigne la comparaison entre dix modèles américains et cinq modèles français, faite récemment par P. Artus et P.A. Muet [5]. Ces modèles s'opposent certes, par leur taille, leur niveau d'agrégation, leur degré d'intégration financière ou leur périodicité. Mais ce sont tous des modèles dynamiques et non linéaires, c'est-à-dire dotés d'au moins quelques équations non linéaires à variables retardées. Le multiplicateur toutefois constitue, plus ou moins détachable de l'ensemble du modèle, une sorte de sous-modèle *linéaire* et, quoi qu'on pense, *statique*.

1.1 *La linéarité du multiplicateur*

Considérons un modèle macroéconomique de la production globale Y_t, avec les équations suivantes, dont certaines ne sont ici qu'ébauchées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{\boxed{\begin{array}{rcl} Y_t &=& C_t + I_t + G_t + X_t - M_t \\ C_t &=& f(Y_t,\ Y_{t-1},\ Y_{t-2},\ldots,\ Y_{t-n},\ \ldots) \end{array}}} \\ I_t &=& \ldots \\ G_t &=& \ldots \\ X_t - M_t &=& \ldots \end{array}\right.$$

où :

- C_t est la consommation globale des ménages ;
- I_t est l'investissement brut des ménages et des entreprises ;
- G_t est la dépense des administrations publiques ;
- $X_t - M_t$ est l'excédent (éventuellement négatif) des exportations sur les importations.

Dans l'encadré, nous isolons le sous-modèle constitué des deux premières équations. Il s'agit d'un modèle de multiplicateur si la fonction f est une fonction linéaire, c'est-à-dire une fonction telle que :

$$C_t = c_0 Y_t + c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2} + \ldots + c_n Y_{t-n} + \ldots \qquad [1]$$

4. J.M. Keynes, *Treatise on Probability,* 1921.

5. P. Artus, P.A. Muet, « Une étude comparative des propriétés dynamiques de dix modèles américains et cinq modèles français », *Revue Économique,* Vol. 31, N° 1, janvier 1980, pp. 88-118.

Les nombres $(c_i)_{i=0,1,\ldots}$ sont en général supposés (ce que nous ferons ici) non négatifs et de somme c finie et inférieure à l'unité : ce nombre c est appelé propension à consommer ; il s'agit d'une propension de long terme, par opposition à c_0 qui est la propension à consommer le revenu courant et qui est dite, pour cela, propension de court terme. On peut donner de [1] une expression plus concise en utilisant la technique de l'opérateur-retard[6]. Si L désigne l'opérateur-retard d'une période, on écrit :

$$L.Y_t = Y_{t-1},\ L^2.Y_t = L.Y_{t-1} = Y_{t-2},\ \ldots,\ L^n.Y_t = Y_{t-n},\ \ldots$$

On définit le «polynôme en L», $\Phi(L)$ par :

$$\Phi(L) = c_0 + c_1L + c_2L^2 + \ldots + c_nL^n + \ldots$$

L'expression [1] peut alors s'écrire :

$$C_t = \Phi(L).Y_t, \text{ avec } 0 < \Phi(1) = c < 1.$$

Et le modèle de multiplicateur aboutit à la détermination suivante de la production globale (identifiée au revenu global) :

$$Y_t = \frac{I_t + G_t + X_t - M_t}{1 - \Phi(L)} \qquad [2]$$

On voit ainsi, par la relation [2], que le multiplicateur détermine parfaitement le revenu de chaque période. Cette détermination cependant, peut être statique ou dynamique. Cette question est celle de la temporalité du multiplicateur.

1.2 *La temporalité du multiplicateur*

On distingue le multiplicateur statique et le multiplicateur dynamique.

Dans le cas du multiplicateur *statique,* la détermination du revenu d'une période se fait avec les seules données de la période. Pour cela, il faut, compte tenu de [2], que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée : ou bien $\Phi(L) = c_0 = c$; ou bien $I_t + G_t + X_t - M_t = A$, constante indépendante de la période.

6. Pour un exposé mathématique de la théorie des retards, voir : G. Pupion, G. Poulalion, *Macroéconomie,* Vuibert, Paris, 1980. Pour une présentation méthodique de l'utilisation des opérateurs-retard dans les modèles macroéconomiques, voir : P.A. Muet, «La modélisation macroéconomique», *Statistiques et Études Financières* (série orange), 1979, hors série.

On est dans le cas du multiplicateur *dynamique* lorsque aucune des deux conditions précédentes n'est remplie. La spécification la plus simple de Φ est alors :

$$\Phi(L) = c_1.L = c.L, \text{ (en supposant } c_0 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = \dots = 0)$$

Posons : $I_t + G_t + X_t - M_t = A_t$. L'agrégat A_t représente la demande exogène. On a d'après [2] :

$$Y_t = \frac{1}{1 - cL} . A_t = (1 + cL + c^2L^2 + \dots + c^nL^n + \dots) . A_t.$$

Soit :

$$Y_t = A_t + cA_{t-1} + c^2A_{t-2} + \dots + c^nA_{t-n} + \dots .$$

On voit que le caractère « dynamique » du multiplicateur ne tient en fait qu'aux « perturbations » incessantes de la demande autonome qui affectent le revenu de chaque période différemment. Ces perturbations, exogènes relativement au modèle de multiplicateur, sont mesurées par : $A_{t-n} - A_{t-n-1}$. Si elles cessent, le multiplicateur se révèle tel qu'il est véritablement, c'est-à-dire la limite stationnaire d'un processus convergent. Ce processus replacé tout entier dans une seule période de temps que nous préciserons dans la section suivante, définit ce que l'on appelle le temps du multiplicateur ou le « temps de circuit »[7], qui est la période fondamentale de l'analyse keynésienne. Quant au temps correspondant aux « vagues successives » de revenu dans la présentation traditionnelle du multiplicateur, il s'agit d'un temps purement fictif : l'indice t qui le repère appartient en fait à un quelconque espace indiciel utilisé pour repérer les différents états du processus considéré. On voit d'ailleurs que si ces états, en nombre *infini,* se succédaient véritablement dans le temps, chacun ne pourrait exister que pendant un *instant* ponctuel, étant donné que leur totalité devrait exister dans le temps fini du multiplicateur. Ainsi l'indexation temporelle que l'on fait habituellement ne peut, par elle-même, constituer une dynamisation du multiplicateur. Celui-ci, au contraire, est un phénomène essentiellement statique puisqu'il prend place tout entier dans une unité de temps, qu'il définit. Cette unité de temps est la base de l'analyse dynamique véritable, à savoir l'étude des phénomènes situés au point d'articulation de deux temps de circuit successifs. Le principal de ces phénomènes est constitué par les anticipations des entrepreneurs.

---

7. A. Parguez, « I = S, ou les mystères de l'épargne », Université de Besançon, Document de travail multigraphié, novembre 1977.

Ce sont ces considérations, forcément un peu abstraites, que nous voudrions éclairer par l'analyse probabiliste du multiplicateur.

2. ANALYSE PROBABILISTE DU MULTIPLICATEUR DE REVENU

Le multiplicateur de revenu, ou multiplicateur keynésien, est celui dont nous avons donné le schéma dans la section précédente. Il correspond à une économie complètement agrégée et, pour cette raison, est qualifié multiplicateur *simple*. Si l'on prend en compte une désagrégation des ménages en grandes catégories socio-professionnelles, on débouche sur le multiplicateur *matriciel*, illustré jadis par une controverse, dans l'*Economic Journal*, entre R.M. Goodwin et J.S. Chipman [8].

La méthode probabiliste présentée à propos du multiplicateur simple sera ensuite appliquée, comme preuve de la facilité de son extension, au multiplicateur matriciel.

2.1 *Le multiplicateur simple et le circuit keynésien*

Le circuit keynésien est le circuit de la monnaie entre les banques (B), les entreprises (E) et les ménages (M) qui sont schématiquement [9], les trois pôles de l'activité économique. Il s'agit d'un ensemble orienté de flux monétaires s'écoulant dans le temps, depuis l'instant de la création monétaire I par les banques, jusqu'à celui de la constitution d'une épargne S par les ménages. Le temps de circuit, défini [10] comme le temps moyen nécessaire à la constitution de l'égalité $S = I$, est une notion fondamentale que l'on voit beaucoup mieux, nous semble-t-il, dans l'optique probabiliste du circuit.

On considère qu'à l'instant initial une unité indivisible de monnaie est créée par les banques B pour être prêtée aux entreprises E. Celles-ci sont supposées l'utiliser uniquement pour verser des revenus aux ménages M. Ceux-ci, enfin, affectent leur revenu à la consommation et à l'épargne dans des proportions c et $s = 1 - c$ respectivement : comme leur revenu est ici constitué d'une unité indivisible de monnaie, nous dirons que les ménages M affectent cette unité de monnaie à la consommation ou à l'épargne avec une probabilité c ou s.

Pour simplifier, nous supposons en outre qu'il s'écoule un temps égal de l'octroi du crédit par B à son utilisation par E, puis de la

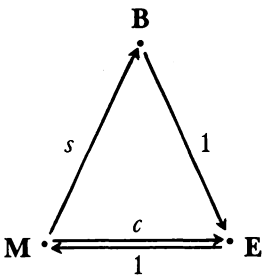
8. R.M. Goodwin, «The Multiplier as Matrix», *The Economic Journal*, décembre 1949.
J.S. Chipman, «Pr. Goodwin's Matrix Multiplier», ibid, décembre 1950.
R.M. Goodwin, «Does the Matrix Multiplier Oscillate?», ibid, décembre 1950.

9. F. Poulon, «Graphe, crise et circuit keynésien», *Revue d'Économie Politique*, N° 4, juillet-août 1980, pp. 371-409.

10. A. Parguez, «I = S, ...», *op. cit.*

dépense de E à celle de M. Cette durée qui est aussi bien le délai moyen d'utilisation des crédits par les entreprises que la durée moyenne de séjour de la monnaie dans l'encaisse des ménages, représente la durée d'une transition quelconque entre deux des trois états B, E, M du processus markovien qui décrit en fait le circuit des revenus. Cette chaîne de Markov homogène admet la représentation graphique suivante :

FIGURE 1



On peut aussi bien la représenter par sa matrice de transition, T, donnant les probabilités de passage d'un état à un autre au cours d'une $n^{\text{ième}}$ transition quelconque (comprise entre les instants $n - 1$ et n) :

n / $n - 1$	B	E	M
B	0	1	0
E	0	0	1
M	s	c	0

La figure 1 nous donne l'image la plus simple de ce que l'on peut appeler le circuit de la monnaie : la monnaie, à partir du pôle B d'où elle est issue, circule entre les pôles E et M jusqu'à ce qu'elle retourne en B sous forme d'épargne. Le temps, mesuré par le nombre moyen de transitions entre la sortie de B et le premier retour à B, est appelé *temps de circuit*. Il s'agit bien, comme nous l'annoncions dans la section précédente, du temps nécessaire à la constitution de l'égalité $S = I$: à la sortie de B, on a en effet $I = 1$, et au moment du premier retour à B on a $S = 1 = I$.

Le calcul de ce temps de circuit, $\bar{t}$, peut se faire de deux manières : l'une, simple, applicable à ce circuit ; l'autre, générale, applicable aux circuits complexes.

La *méthode simple* consiste à calculer directement l'espérance mathématique de la variable aléatoire X qui est le nombre de transitions nécessaires au premier retour en B, en partant de B. L'examen de la figure 1 montre clairement que X ne peut prendre que les valeurs impaires $2p + 1$, pour $p \geq 1$, avec :

$$\text{Prob}\,\{X = 2p + 1\} = s \,.\, c^{p-1}$$

D'où :

$$\bar{t} = E(X) = \sum_{p=1}^{\infty} (2p + 1)\, s \,.\, c^{p-1} = 1 + \frac{2}{s}.$$

La *méthode générale* consiste à exprimer $\bar{t}$ comme le temps moyen de premier retour à *B*, à partir de *B*, dans la chaîne de Markov ergodique [11] représentant le circuit étudié. La théorie des chaînes de Markov homogènes, à espace d'états fini, enseigne que, dans le cas d'ergodicité, le temps moyen de premier retour dans un état quelconque est égal à l'inverse de la probabilité stationnaire d'être dans cet état. Ainsi, si p_B est la probabilité stationnaire d'être dans l'état *B*, on a :

$$\bar{t} = \frac{1}{p_B}.$$

Or, $p = (p_B\ p_E\ p_M)$ étant le vecteur des probabilités stationnaires, on a : $p = pT$, sachant que $p_B + p_E + p_M = 1$.

La résolution de ce système d'équations fournit :

$$p_B = \frac{s}{2+s},\ p_E = p_M = \frac{1}{2+s}.$$

On vérifie ainsi que :

$$\bar{t} = \frac{1}{p_B} = 1 + \frac{2}{s}.$$

Le calcul markovien permet en outre de retrouver très simplement le multiplicateur keynésien $\frac{1}{s}$.

En effet, on doit d'abord remarquer, sur la figure 1, que chaque passage dans *M* correspond au versement d'un revenu aux ménages d'une unité monétaire. Le nombre de passages dans *M* au cours du temps de circuit est donc le revenu total perçu par les ménages à la suite d'une injection de $I = 1$ unité monétaire dans le circuit : c'est le multiplicateur de revenu *k*.

Or, le nombre moyen de passages dans un pôle au cours du temps de circuit s'obtient en multipliant le temps de circuit par la fréquence moyenne, par unité de temps, de passage en ce pôle, c'est-à-dire la probabilité stationnaire d'être en ce pôle. Le multiplicateur de revenu est donc :

$$k = p_M \,.\, \bar{t} = \frac{p_M}{p_B} = \frac{1}{s}.$$

11. G. Kreweras, *Graphes, chaînes de Markov et quelques applications économiques,* Dalloz, Paris, 1972.

L'analyse probabiliste, pour le calcul du multiplicateur dans le cas du circuit simple de la figure 1, peut paraître un détour un peu long. Mais cette méthode devient très avantageuse lorsque l'on complique le circuit pour tenir compte de l'existence d'autres flux [12] ou bien de la différence de fait entre le délai moyen d'utilisation de leurs fonds par les entreprises et le temps moyen de séjour de la monnaie dans l'encaisse des ménages. Chipman [13] a, le premier, considéré cette différence de fait dans les temps de propagation d'un pôle à un autre, remettant ainsi en cause l'hypothèse d'une constante « période de transaction » faite par Machlup [14]. Chipman, lui, admet qu'elle puisse varier selon les flux en cause. Pour exprimer néanmoins la circulation des flux étudiés dans une même unité de temps, il associe aux pôles, d'où la propagation des flux est supposée être plus longue, des pôles-relais qu'il dénomme *collecting agencies.* Nous avons exploité cette méthode, en l'adaptant à l'analyse markovienne, dans une autre étude [15].

Conservant ici l'hypothèse de Machlup d'une « période de transaction » constante, nous suivrons la voie la plus traditionnelle pour la généralisation du multiplicateur : nous scinderons le secteur M des ménages en plusieurs catégories socio-professionnelles, débouchant ainsi sur l'analyse dite du « multiplicateur matriciel ».

2.2 *Le multiplicateur matriciel*

Nous nous en tiendrons à deux catégories de ménages, M_1 et M_2, que nous dénommerons, pour faire image, ménages « salariés » et ménages « capitalistes » respectivement.

A la catégorie M_i ($i = 1,2$) des ménages sont associées les propensions à consommer et à épargner, c_i et $s_i = 1 - c_i$ respectivement.

La part des salariés dans le revenu total des ménages est constamment égale à m_1, et celle des capitalistes, titulaires de revenus de la propriété, est constamment égale à $m_2 = 1 - m_1$. Tous les revenus sont distribués par les entreprises E. Le graphe du circuit est donc à présent celui-ci :

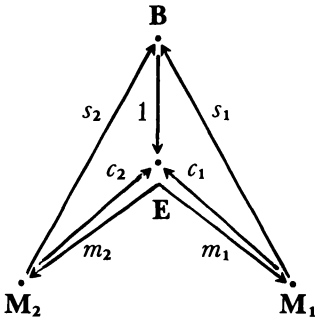
12. F. Poulon, art. cité, pp. 390-399.

13. J.S. Chipman, *op. cit.*, 1ère partie.

14. F.A. Machlup, « Period Analysis and Multiplier Theory », *Quarterly Journal of Economics,* novembre 1939.

15. J. Marchal, F. Poulon, « The Spreading Process of Incomes in an Economy », in *Frontiere dell economia,* Essais en l'Honneur de G. Demaria, Cedam, Padova, 1978.

FIGURE 2



Nous voulons, comme précédemment, mais dans ce nouveau cas de figure, donner l'interprétation probabiliste du multiplicateur. Dans le cas précédent, il s'agissait du multiplicateur scalaire, car il n'y avait qu'une seule catégorie d'agents, M, percevant des revenus. À présent, étant donné qu'il y a deux catégories d'agents, M_1 et M_2, percevant des revenus, il s'agit de multiplicateur matriciel.

Nous rappellerons d'abord ce qu'est l'analyse traditionnelle du multiplicateur matriciel, correspondant à ce cas de figure. Nous n'en verrons que mieux ensuite son interprétation probabiliste.

1° *L'analyse traditionnelle du multiplicateur matriciel*

Soit R la matrice dont le coefficient r_{ij}, à la croisée de la ligne i et de la colonne j, est la propension marginale des titulaires de revenus de la catégorie i à acheter aux titulaires de revenus de la catégorie j. R est donc une matrice carrée, et I désigne la matrice unité de même format.

On note V le vecteur-ligne des ressources initiales des différentes catégories de titulaires de revenus. V est normalisé : ses composantes sont non-négatives et de somme égale à 1.

Le « multiplicateur matriciel » (ou plus exactement : vectoriel) donnant, pour chaque catégorie de titulaires de revenus, le revenu supplémentaire induit par cette répartition initiale V, est le vecteur $\mu = V.(I - R)^{-1}$.

Quant au revenu supplémentaire total perçu par toutes les catégories de ménages réunies, c'est le multiplicateur scalaire $\varkappa$, dont l'expression est :

$$\varkappa = \mu \,.\, U = V(I - R)^{-1}\, U,$$

où U est le vecteur-colonne dont toutes les composantes sont égales à 1.

Dans le cas de figure étudié, il n'y a que deux catégories de titulaires de revenus : les ménages salariés (M_1) et les ménages capitalistes (M_2). La matrice R est donc une matrice de format 2x2.

Pour déterminer les coefficients de cette matrice on doit considérer que les ménages s'achètent mutuellement les produits de leur travail ou de leur richesse, à travers les dépenses qu'ils font auprès des entreprises et les revenus qu'ils en reçoivent. Les entreprises ont un rôle tout à fait passif que l'on peut même supprimer. Ainsi, au graphe partiel de la figure 3 ci-dessous, tirée de la figure 2 :

FIGURE 3

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M}_2 \arrow[r, shift right, "c_2"'] & \mathbf{E} \arrow[l, shift right, "m_2"'] \arrow[r, shift left, "m_1"] & \mathbf{M}_1 \arrow[l, shift left, "c_1"] \end{tikzcd}$$

on substitue, par contraction des pôles, le graphe de la figure 4 ci-après :

FIGURE 4

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M}_2 \arrow[loop left, "c_2m_2"] \arrow[r, shift left, "c_2m_1"] & \mathbf{M}_1 \arrow[loop right, "c_1m_1"] \arrow[l, shift left, "c_1m_2"] \end{tikzcd}$$

Les valuations des arcs de ce graphe sont précisément les propensions marginales des ménages à dépenser leurs ressources les uns auprès des autres. La matrice R est donc :

$$R = \begin{bmatrix} c_1m_1 & c_1m_2 \\ c_2m_1 & c_2m_2 \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$(I - R)^{-1} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 - c_2m_2 & c_1m_2 \\ c_2m_1 & 1 - c_1m_1 \end{bmatrix}$$

où $s = m_1s_1 + m_2s_2$ est la propension marginale à épargner de l'ensemble consolidé des ménages : c'est une moyenne, pondérée par les parts de revenus, des propensions marginales de chaque catégorie de ménages.

Le calcul de μ (multiplicateur-vectoriel), et par suite de $\varkappa$ (multiplicateur-scalaire), dépend du choix de V. Nous considérerons trois cas importants :

a) $V = V_1 = [1 \;\; 0]$: seuls les salariés détiennent, au départ, l'unité monétaire lancée dans le circuit. Le multiplicateur scalaire est alors :

$$\varkappa = k_1 = 1 + \frac{c_1}{s} .$$

b) $V = V_2 = [0 \ 1]$: cas symétrique avec les capitalistes. On a alors :

$$\varkappa = k_2 = 1 + \frac{c_2}{s} .$$

c) $V = \bar{V} = [\mathrm{m}_1 \ \mathrm{m}_2]$: c'est le cas suggéré par la figure 2 où l'unité monétaire est répartie (par les entreprises) entre M_1 et M_2 dans les proportions m_1 et m_2 respectivement. Le calcul montre alors que :

$$\varkappa = k = \frac{1}{s} .$$

Comme $\bar{V} = m_1V_1 + m_2V_2$, on peut vérifier que l'on a aussi : $k = m_1k_1 + m_2k_2$.

Tel est le multiplicateur matriciel dont la présentation traditionnelle, nous l'avons vu, est faite dans une économie fictive sans entreprises et, a fortiori, sans banques. Cette suppression est abusive. L'interprétation probabiliste du multiplicateur matriciel réhabilite entreprises et banques, sinon dans l'intégralité de leurs fonctions véritables, du moins en leur rendant « droit de cité ».

2° *L'interprétation probabiliste du multiplicateur matriciel*

Cette interprétation du multiplicateur part du graphe de la figure 2 auquel est associé une chaîne de Markov ergodique à quatre états (B, E, M_1, M_2) dont la matrice de transition est donnée par le tableau suivant :

$n-1$ \ n	B	E	M_1	M_2
B	0	1	0	0
E	0	0	m_1	m_2
M_1	s_1	c_1	0	0
M_2	s_2	c_2	0	0

Considérons la matrice Q entourée de traits gras dans le tableau ci-contre : Q est obtenue par suppression de la ligne et de la colonne correspondant à l'état B, dans la matrice de transition de la chaîne de Markov. On peut constater que Q correspond au graphe partiel de la figure 3.

La théorie des chaînes de Markov enseigne que la matrice $(I - Q)^{-1}$ est une matrice dont le terme q_{ij} (pour $i, j = E, M_1, M_2$) représente le nombre moyen de passages dans l'état j, d'une unité monétaire partie de l'état i, jusqu'à son premier retour en B.

Le calcul établit que :

$$(I - Q)^{-1} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & m_1 & m_2 \\ c_1 & 1 - c_2 m_2 & c_1 m_2 \\ c_2 & c_2 m_1 & 1 - c_1 m_1 \end{bmatrix}$$

Le nombre total de passages de l'unité monétaire dans les états percepteurs de revenus (M_1 et M_2), jusqu'à son premier retour en B, est bien le multiplicateur total $\varkappa$ de revenu. La valeur de $\varkappa$ dépend du « point de départ » dans le circuit, de l'unité monétaire : M_1, M_2 ou E.

Si on considère que l'unité monétaire a été prêtée par B à E pour payer exclusivement des salaires aux ménages M_1, on a :

$$\varkappa = q_{M_1 M_1} + q_{M_1 M_2} = \frac{1}{s} (1 - c_2 m_2 + c_1 m_2) = 1 + \frac{c_1}{s} = k_1$$

De même, si on considère que l'unité monétaire a été prêtée par B à E pour ne payer que des intérêts ou des dividendes à M_2, on trouve :

$$\varkappa = q_{M_2 M_1} + q_{M_2 M_2} = \frac{1}{s} (c_2 m_1 + 1 - c_1 m_1) = 1 + \frac{c_2}{s} = k_2$$

Enfin, si l'unité monétaire est prêtée par B à E sans autre condition, on obtient :

$$\varkappa = q_{EM_1} + q_{EM_2} = \frac{1}{s} (m_1 + m_2) = \frac{1}{s} = k$$

On pourrait aussi vérifier que les deux dernières colonnes, lues ligne par ligne, de $(I - Q)^{-1}$ fournissent les multiplicateurs vectoriels associés aux valeurs respectives $\bar{V}$, V_1 et V_2 du vecteur V de ressources initiales des deux catégories de ménages.

L'interprétation probabiliste du multiplicateur est celle qui correspond le mieux, on le voit, à la représentation du circuit de la figure 2 : les entreprises et les banques y jouent un rôle, même minime. Elles ne sont pas purement et simplement oubliées comme dans les analyses traditionnelles du multiplicateur de revenu, au mépris de la réalité immédiate.

Il arrive néanmoins que les banques ou les entreprises soient « ressuscitées » par l'analyse traditionnelle pour l'étude de problèmes de circulation monétaire. Il s'agit alors de problèmes spécifiques, proches en fait de celui du multiplicateur, et dont l'analyse probabiliste peut également rendre compte.

3. APPLICATION DE L'ANALYSE PROBABILISTE À DES PROBLÈMES PROCHES DE CELUI DU MULTIPLICATEUR DE REVENU.

Le problème du multiplicateur appartient à la catégorie des problèmes de circulation monétaire, c'est-à-dire un ensemble de problèmes relatifs à la circulation de la monnaie entre ces trois pôles fondamentaux de l'activité économique que sont les banques, les entreprises et les ménages.

Le multiplicateur de revenu, nous l'avons vu, analyse la circulation de la monnaie entre ces trois pôles en mettant l'accent sur le rôle des ménages.

Le multiplicateur de crédit est un problème voisin où le système bancaire, protagoniste, joue même un rôle quasi exclusif.

La vitesse de circulation de la monnaie constitue enfin un problème traditionnel, où est notamment souligné le rôle des entreprises.

Nous montrerons, sur des cas de figure simples, comment ces deux problèmes peuvent être traités aussi par la méthode probabiliste.

3.1 *Le multiplicateur de crédit*

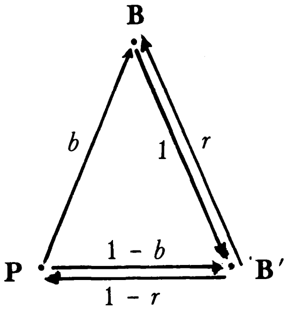
Dans la théorie du multiplicateur de crédit, ménages et entreprises sont confondus en un seul pôle P désignant les « particuliers ». En revanche, le système bancaire est décomposé en deux pôles : l'un que nous noterons toujours B, désignant la banque centrale ; l'autre, noté B', désignant les banques commerciales.

De façon générale, le multiplicateur de crédit s'exprime comme un rapport $\frac{\Delta C}{\Delta L}$, où ΔC est l'augmentation totale des crédits bancaires liée à ΔL représentant l'accroissement du refinancement, si les réserves libres des banques sont nulles, ou bien la diminution de leur liquidité, dans le cas contraire.

Nous voulons montrer que l'on peut aussi interpréter le multiplicateur de crédit d'un point de vue probabiliste. Le multiplicateur de crédit apparaîtra comme le nombre moyen de passages d'une unité monétaire dans l'état B' de « monnaie de banque » jusqu'à son premier retour à l'état B de « monnaie centrale ».

Le circuit est désormais illustré par le graphe suivant :

FIGURE 5



Où : r ($0 < r < 1$) est le coefficient de réserves des banques ;

b ($0 < b < 1$) est le taux de conversion de la « monnaie de banque » en billets de la banque centrale.

On suppose qu'une unité de monnaie centrale est mise à la disposition de B' par B : il peut s'agir, par exemple, d'une unité de monnaie centrale détenue par les banques à la suite d'un refinancement offert par la banque centrale. Cette unité monétaire reste alors dans le circuit de la monnaie de banque jusqu'à son retour, sous forme de réserves bancaires ou de billets, dans le circuit de la monnaie centrale. Le temps de premier retour à B, de l'unité monétaire partie de B, est le temps de circuit. Le multiplicateur de crédit est le nombre moyen de passages en B' au cours de ce temps de circuit, sachant que chaque passage en B' équivaut à un crédit bancaire d'une unité monétaire octroyé à P. Ces crédits sont nourris par B' dans la proportion $1 - r$, et refinancés par B dans la proportion r.

Le multiplicateur de crédit est donc $\frac{p_{B'}}{p_B}$, où $p_{B'}$ et p_B sont les probabilités stationnaires, pour l'unité de monnaie, d'être respectivement en B' et B, dans le processus markovien ergodique représenté par la figure 5.

Le calcul montre que:

$$\frac{p_{B'}}{p_B} = \frac{1}{r + b - rb}$$

Il s'agit bien d'une expression très classique du multiplicateur de crédit. Une autre expression, proche de celle-ci mais plus simple encore, est souvent avancée[16] :

$$\frac{1}{r + b}$$

On peut vérifier que cette expression correspond à un circuit encore plus simple, faisant totalement abstraction du pôle P, associé à une chaîne de Markov à deux états B et B', entre lesquels les probabilités de passage sont données par la matrice de transition suivante :

16. J. Marchal, *Monnaie et Crédit*, Cujas, Paris, 6ième édition, 1976, pp. 206-210.

$n-1$ \ n	B	B'
B	0	1
B'	$r+b$	$1-(r+b)$

Pour avoir réhabilité le rôle des banques dans la circulation monétaire, le multiplicateur de crédit n'en laisse pas moins les entreprises toujours à l'arrière-plan. C'est à l'analyse de la vitesse de circulation de la monnaie qu'il revient de les mettre plus en lumière.

3.2 *La vitesse de circulation de la monnaie*

Il y a en fait deux concepts de vitesse de circulation de la monnaie : la *vitesse-revenu* (V_Y) et la *vitesse-transaction* (V_T).

La vitesse-transaction indique la valeur des achats, et la vitesse-revenu indique la valeur des revenus financés par une même unité monétaire au cours d'un temps de circuit, à déterminer.

L'analyse traditionnelle de la vitesse de circulation de la monnaie, ignorant la création monétaire, suppose l'existence préalable d'un stock de monnaie circulant entre les agents économiques, comme un fluide à l'intérieur d'une machine hydraulique. Le problème consiste alors en l'évaluation du stock de monnaie nécessaire au financement des achats ou des revenus des agents, compte tenu de leurs habitudes de paiement ou d'épargne. L'épargne dont il est question, n'est d'ailleurs qu'une épargne de transaction, laissée en dépôt auprès des intermédiaires financiers, un certain temps parfaitement défini.

Nous choisissons une unité de temps arbitraire et nous supposons que le temps de séjour en encaisse de l'épargne des ménages est égal à un nombre entier n d'unités de temps. Si s $(0 < s < 1)$ est la propension à épargner des ménages, et Y leur revenu de chaque période, une épargne sY est constituée à chaque période, pour n périodes. Il apparaît alors qu'un stock de monnaie $\bar{M}$ égal à $n.sY$ est nécessaire au financement du revenu.

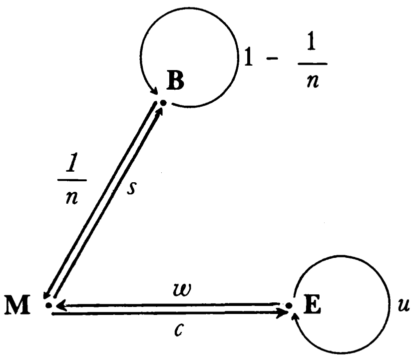
On en déduit aussitôt l'expression de la vitesse-revenu :

$$V_Y = \frac{Y}{\bar{M}} = \frac{1}{n\,.\,s}$$

C'est cette expression, ainsi que celle de V_T, que l'analyse probabiliste peut nous permettre d'obtenir.

Nous considérons de nouveau le circuit d'une unité monétaire entre les trois états B, E, M où B représente l'ensemble des intermédiaires financiers. A un instant quelconque où l'unité monétaire est en B, on peut dire, ne sachant pas depuis combien de temps elle est dans cet état, qu'elle a une probabilité $\frac{1}{n}$ de sortir de B (vers M) dans la période de temps consécutive, et une probabilité $1 - \frac{1}{n}$ de rester en B. Le circuit se représente par le graphe de la figure 6 ci-après :

FIGURE 6



On a : $c + s = 1$; $w + u = 1$.

Le coefficient w est la part du chiffre d'affaires des entreprises affectée au paiement des salaires aux ménages ; $u = 1 - w$ est la part complémentaire, affectée au « coût d'usage de la production », c'est-à-dire à la consommation intermédiaire et à la consommation de capital fixe des entreprises.

Le temps de circuit est toujours le temps de premier retour à B, à partir de B, d'une unité monétaire, dans la chaîne de Markov ergodique associée au graphe de la figure 6. Ce temps est, on le sait, égal à l'inverse de la probabilité stationnaire p_B, pour l'unité monétaire, d'être en B.

La vitesse-transaction est le nombre moyen de passages de l'unité monétaire en E au cours du temps de circuit, tandis que la vitesse-revenu est le nombre homologue en M.

Donc :

$$V_T = \frac{p_E}{p_B}$$

$$V_Y = \frac{p_M}{p_B}$$

Le calcul des probabilités stationnaires montre que :

$$\frac{p_M}{p_B} = \frac{1}{n \,.\, s} = V_Y$$

$$\frac{p_E}{p_B} = \frac{c}{w} \,.\, V_Y = V_T$$

On voit ainsi que la vitesse-transaction est supérieure à la vitesse-revenu si et seulement si $c > w$, ce qui est,d'ordinaire, le cas : la propension à consommer des ménages est supérieure en général à la part des recettes des entreprises affectée au paiement de salaires.

L'étude de la vitesse-transaction révèle bien d'ailleurs jusqu'où va la réhabilitation du rôle des entreprises : pour la première fois, en effet, on considère que les entreprises ne sont pas seulement vouées au versement de revenus aux ménages, mais qu'elles effectuent aussi d'autres dépenses liées à leur activité de production. Toutefois nous ne sommes pas allés jusqu'à prendre en compte les profits des entreprises et leur accumulation nette de capital fixe.

Tout au long de l'étude que nous avons menée dans cet article nous sommes restés dans la « sphère de la circulation » : notre but était seulement de montrer comment le calcul des probabilités, et surtout la théorie des chaînes de Markov, pouvait servir à interpréter des phénomènes de circulation monétaire tels que le multiplicateur de revenu, le multiplicateur de crédit ou la vitesse de circulation de la monnaie. Pour cela, nous avons le plus souvent considéré un circuit où toutes les principales catégories d'agents étaient présentes, même si on leur faisait jouer un rôle bien en-deçà de leur rôle véritable. Ce faisant, nous n'en avons d'ailleurs que mieux aperçu peut-être l'insuffisance de ces analyses purement « circulatoires » au regard de l'analyse du circuit économique réel.

Il y a, pensons-nous, deux insuffisances fondamentales dans les analyses classiques de circulation monétaire que nous avons évoquées. La première consiste en l'oubli de la *contrainte de remboursement* qui est attachée à toute distribution de crédit. La seconde consiste en l'oubli des *profits non distribués* des entreprises, affectés au financement de leur accumulation nette de capital fixe. Ces deux oublis sont d'ailleurs liés, puisque c'est la contrainte de remboursement des crédits qui impose aux entreprises de réaliser des profits suffisants pendant un temps limité, le temps de circuit.

Si l'on « répare » cet oubli, la théorie du circuit prend immédiatement une tout autre dimension : elle débouche sur l'analyse des crises, auprès de laquelle les analyses de multiplicateur ou de vitesse de circulation de la monnaie présentées ici, feraient bien pâle figure.

Mais la méthode probabiliste, elle, loin d'en souffrir, verrait au contraire s'accroître son champ d'action. On peut donc considérer aussi cette étude comme une introduction méthodologique à une théorie plus générale du circuit économique.

Jean MARCHAL,
Université de Paris I
et
Frédéric POULON,
Université de Bordeaux I.