

## Programmation mathématique et théorie économique

Michel Truchon

Volume 64, Number 2, juin 1988

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/601443ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/601443ar>

[See table of contents](#)

### Publisher(s)

HEC Montréal

### ISSN

0001-771X (print)

1710-3991 (digital)

[Explore this journal](#)

### Cite this article

Truchon, M. (1988). Programmation mathématique et théorie économique. *L'Actualité économique*, 64(2), 143–156. <https://doi.org/10.7202/601443ar>

## PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE ET THÉORIE ÉCONOMIQUE<sup>1</sup>

Michel TRUCHON  
Université Laval\*

*« Linear Programming has been one of  
the most important postwar developments  
in economic theory. »*

Dorfman, Samuelson et Solow (1958)

La phrase en exergue est la première de la préface du livre de ces trois économistes célèbres. Elle pourra en surprendre plusieurs, surtout parmi les plus jeunes pour qui la programmation linéaire appartient davantage à la recherche opérationnelle qu'à la discipline économique. Elle est pourtant typique de l'engouement des économistes des années 50 pour la programmation linéaire, engouement qui devait ensuite s'étendre à la programmation non linéaire et à la programmation discrète.

Cet article traite des contributions des économistes à la programmation mathématique et des apports de cette dernière à l'analyse économique. La section 1 rappelle l'attrait qu'ont exercé l'analyse des activités et la programmation linéaire sur les économistes des années 50. Elle souligne également les nombreuses applications économiques qui en ont été faites de même que les divers courants de recherche qu'elles ont inspirés. Elle se termine par une invitation à un recours plus fréquent à l'analyse des activités, et aux méthodes qui en découlent, dans les études microéconomiques. La section 2 souligne d'abord les contributions des économistes à la programmation non linéaire. Elle présente ensuite une théorie générale de la dualité en programmation mathématique et discute de son intérêt pour la théorie économique. La section 3 traite de l'importance des indivisibilités et des problèmes combinatoires comme phénomènes économiques de même que de l'état d'avancement des recherches en programmation discrète. Elle présente également une contribution récente de Scarf (1981a, 1981b, 1986) concernant la solution des problèmes discrets. La conclusion reprend le plaidoyer de Simon (1972, 1976, 1978, 1979) en faveur de la reconnaissance de la complexité des problèmes économiques.

---

\*Département d'économique.

1. Cet article développe les thèmes du discours prononcé par l'auteur, lors du banquet de la Société canadienne de sciences économiques, à Sherbrooke, le 21 mai 1987, à titre de président de la Société. L'auteur aimerait remercier ses collègues Gérald LeBlanc, Tadek Matuszewski, Roger Dehem, Bernard Fortin et Claude Autin pour leurs commentaires sur des versions antérieures de ce texte. Leur responsabilité quant aux idées exprimées ici ne saurait cependant être mise en cause.

## 1. PROGRAMMATION LINÉAIRE ET ANALYSE DES ACTIVITÉS

Nombreux furent les économistes qui contribuèrent, non seulement au développement de la théorie et des techniques de résolution de la programmation linéaire, mais également à ses applications. C'est ainsi qu'on pouvait noter la participation de plusieurs d'entre eux à une conférence sur la programmation linéaire à Chicago en 1949<sup>2</sup>.

La plupart des textes de la conférence de Chicago furent publiés sous la direction de Koopmans (1951a), dans un livre maintenant célèbre. Koopmans explique que le titre, *Activity Analysis of Production and Allocation*, a été choisi pour bien faire ressortir l'aspect fondamental de la nouvelle approche, soit l'utilisation du concept d'activité comme méthode de production élémentaire.

L'intérêt des économistes pour l'analyse des activités s'explique, en partie, par le fait que cette dernière offre une façon de formuler le problème de l'entreprise qui colle davantage à la vision de ses gestionnaires. Koopmans (1951b; p.6) n'a d'ailleurs pas manqué de souligner que le recours à la technologie linéaire pouvait représenter un gain en réalisme dans plusieurs cas. En même temps, la programmation linéaire permet de résoudre concrètement certains des problèmes d'optimisation qui se posent à l'entreprise.

De fait, plusieurs économistes allaient aider à démontrer le potentiel de la programmation linéaire par des applications empiriques et théoriques à des problèmes de toutes sortes. On peut citer les problèmes de transport, de mélange d'essence, de rotation des cultures en agriculture, d'investissement dans l'industrie de l'électricité et d'estimation. Il n'est qu'à consulter la revue *Econometrica* des années 50 et 60 pour se rappeler bon nombre de ces contributions. La place accordée par cette revue et d'autres, comme *The Review of Economic Studies* et *The American Economic Review*, aux articles sur le sujet témoigne de l'importance que lui accordait notre profession. On dénombre également plusieurs contributions d'économistes dans des revues comme *Management Science*, *Operations Research* et *Revue Française de Recherche Opérationnelle*<sup>3</sup>.

Par delà ses applications empiriques et théoriques, l'analyse des activités a été l'occasion pour les économistes de découvrir la théorie des ensembles convexes et en particulier les théorèmes de séparation pour ces ensembles. Le fait de prendre comme technologie, l'ensemble des combinaisons linéaires non négatives d'un nombre fini d'activités, c'est-à-dire un cône polyédrique convexe, ouvrait la voie à l'utilisation des résultats concernant ces derniers ensembles. Morgenstern et von Neumann (1944) en avaient déjà démontré la puissance dans le contexte de la

---

2. Entre autres: Kenneth Arrow, Robert Dorfmann, David Gale, Nicholas Georgescu-Roegen, Tjalling Koopmans, Oscar Morgenstern, Stanley Reiter, Paul Samuelson, Herbert Simon, David Hawkins, Leonid Hurwicz, Abba Lerner, Armen Alchian, Evsey Domar, Julius Margolis, Jacob Marschak, Lloyd Metzler, David Rosenblatt, Tibor de Scitovsky.

3. À titre d'exemple, voir Baumol (1958a et 1958b), Beckmann et Koopmans (1957), Beckmann et Marschak (1955), Charnes, Cooper et Mellon (1952), Massé et Gibrat (1959), Radner (1959), Solow (1959), Bessière (1959), Boiteux et Bessièrès (1961) et Matuszewski, Pitts et Sawyer (1964).

théorie des jeux. En programmation linéaire, ces résultats ont conduit directement à l'important théorème de la dualité. Koopmans (1951b) s'en est aussi servi pour montrer qu'une condition nécessaire et suffisante à l'efficacité d'un programme de production est l'existence d'un système de prix susceptible de conduire les décideurs vers ce programme ou, à tout le moins, de les y maintenir. Il avait prédit, à la même époque, que la théorie des ensembles convexes allait devenir un outil important en économique. Effectivement, d'autres économistes, notamment Arrow (1951), Debreu (1951, 1954) et Malinvaud (1953), n'allaient pas tarder à faire un usage intensif de cette théorie.

L'analyse des activités a également été le cadre de travaux importants en croissance optimale. von Neumann (1945-1946) avait innové à plus d'un égard en présentant le premier modèle formel d'analyse des activités, en étudiant un problème de croissance, en montrant le rôle des prix dans la caractérisation d'un programme de croissance optimale<sup>4</sup> et en utilisant un théorème de point fixe pour la démonstration de l'existence d'un équilibre.

Malinvaud (1953, 1959) devait suivre la voie dans un article où on trouve, entre autres, la première formulation des conditions de transversalité, maintenant standard en optimisation dynamique.

Dorfman, Samuelson et Solow (1958) ont eux aussi étudié les problèmes de croissance. Ils ont, entre autres, formulé la première conjecture du « turnpike » qui veut que, dans un plan à long terme, on a intérêt à emprunter le sentier de croissance équilibrée et maximale pendant la majeure partie du temps, même si le point de départ n'est pas sur ce sentier et qu'on ne cherche pas à s'y trouver à la période terminale. Cette conjecture devait être démontrée de façon formelle par Radner (1961). On venait ainsi donner un poids encore plus grand au modèle formulé vingt ans plus tôt par von Neumann (1945-1946)<sup>5</sup>.

La programmation mathématique a également fourni le cadre conceptuel et les outils qui ont permis la concrétisation des idées mises de l'avant par Lange (1936) et Taylor (1929) concernant les possibilités de la planification décentralisée. La première contribution est celle d'Arrow et Hurwicz (1960), qui ont formalisé le processus itératif imaginé par Lange pour arriver à un optimum social. Ce processus, qui imite un système de marché, n'est en fait rien d'autre qu'une méthode dite du gradient, comme celles qu'on retrouve dans bon nombre d'algorithmes de programmation linéaire et non linéaire<sup>6</sup>.

L'algorithme de décomposition de Dantzig et Wolfe (1961), d'abord conçu pour résoudre des problèmes de grande taille, en les décomposant en plusieurs sous-problèmes, a inspiré deux autres approches à la planification décentralisée. Dans la première, dont Malinvaud (1967, 1968) s'est fait le pionnier, la décentralisation se

---

4. On y retrouve en fait ce qui est sans doute la première formulation connue d'un problème dual.

5. L'ouvrage original avait été publié, en allemand, en 1937.

6. Voir Uzawa (1958).

fait par les prix. Chaque unité de décision résout le problème qui la concerne, en utilisant les prix fournis par le bureau central, et communique ensuite sa solution à ce dernier. Le bureau central cherche ensuite à combiner toutes ces solutions de façon optimale. Ce sont les variables duales associées à la solution de ce dernier problème qu'il communique ensuite aux unités. Le processus continue jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer l'objectif global.

Dans la deuxième approche, amorcée par Kornai et Liptak (1965), la décentralisation se fait par les quantités. De manière plus précise, le bureau central propose une répartition des quotas de production et des ressources aux unités qui communiquent ensuite la solution duale de leur problème au bureau central. Ces variables duales représentent le coût marginal des biens produits ou la productivité marginale en valeur des ressources, selon le cas. Le bureau central modifie ensuite la répartition antérieure en favorisant davantage les unités qui produisent au moindre coût ou ont une productivité marginale en valeur plus élevée dans l'utilisation des ressources. On continue jusqu'à un optimum global. Ce processus s'apparente au déroulement d'un jeu. Formellement, on cherche d'ailleurs le maximum d'une certaine fonction.

Ces premiers travaux en planification décentralisée ont donné naissance à un courant de recherches qui se poursuit encore de nos jours<sup>7</sup>. Le cadre conceptuel fourni par l'algorithme de Dantzig et Wolfe a aussi été utilisé par Baumol et Fabian (1964) pour montrer comment les économies externes pouvaient être internalisées à l'aide de subventions et de pénalités.

L'analyse des activités n'est pas étrangère non plus à la conception des fonctions de production basées sur les micro-données. Selon cette approche, dont les principaux protagonistes sont Houthakker (1955), Johansen (1972), Sato (1975) et Hildenbrand (1981), les choix technologiques quant aux proportions des facteurs sont faits au moment de l'investissement en nouveaux équipements. La technologie se trouve définie par un ensemble de vecteurs d'activités correspondant aux différents équipements fonctionnant à pleine capacité. Par la suite, le choix est limité à la combinaison de ces activités à l'intérieur des limites imposées par leur capacité. La fonction de production ainsi obtenue est non paramétrique. Elle repose plutôt sur la distribution empirique des données technologiques entre les unités de production.

Finalement, est-il besoin de rappeler la filiation des modèles intersectoriels, dont l'usage est aujourd'hui très répandu, avec l'analyse des activités. L'ouvrage de Koopmans (1951a) contient d'ailleurs plusieurs contributions à ces modèles<sup>8</sup>. On n'y manque pas non plus de faire le lien entre la programmation linéaire et la théorie des jeux<sup>9</sup>.

Compte tenu de cet engouement pour l'analyse des activités et la programmation linéaire, on aurait pu s'attendre à une révolution dans l'enseignement et la

---

7. Voir, par exemple, Heal (1969, 1971, 1974) et Weitzman (1970).

8. Nommément par Arrow, Georgescu-Roegen, Koopmans, Samuelson et Smith.

9. Voir les articles de Dantzig, Dorfman, Gale, et de Kuhn et Tucker.

pratique de l'économique. Les étudiants des années 60, dont j'étais, ont eu droit à des cours sur la programmation linéaire et plusieurs ont même rédigé une thèse de maîtrise dans ce domaine. En plus du livre de Dorfman, Samuelson et Solow (1958), ils ont eu à leur disposition un certain nombre d'autres livres sur les modèles linéaires, dont celui de Gale (1960). De plus, tout manuel de microéconomie qui se respectait se devait d'inclure au moins un chapitre ou une section sur la programmation linéaire<sup>10</sup>. Cependant, la plupart du temps, ces chapitres ou sections étaient tout simplement juxtaposés à une présentation traditionnelle de la théorie de l'entreprise. Il a fallu attendre le livre de Vandermeulen (1971) pour une présentation de cette dernière à partir de l'analyse des activités. Ce livre est toutefois resté méconnu et la révolution dans l'enseignement ne s'est pas produite. Bien plus, de nos jours, les étudiants en économie sont peu souvent initiés aux modèles linéaires.

La perpétuation de la tradition dans l'enseignement n'est en fait que le reflet de la prédominance de l'approche néo-classique dans la pratique de l'économique, en même temps qu'elle contribue à maintenir cette dernière. Les progrès de l'économétrie et le développement d'un autre type de dualité, celle entre les fonctions de production et de coût, ont beaucoup contribué au maintien de cette tradition. Comme on peut reconstruire n'importe quelle fonction de production quasi concave à partir de la fonction de coût correspondante et comme les données pour estimer cette dernière sont en général plus facile à obtenir, les objections contre le concept de fonction de production néo-classique ont donc perdu quelque peu de leur force.

L'approche néo-classique n'en continue pas moins de faire appel à des hypothèses très fortes comme la différentiabilité et l'homothéticité. Avec les formes fonctionnelles les plus courantes, les élasticités de substitution sont constantes et égales entre elles, voire unitaires. Hildenbrand (1981) a montré que les données microéconomiques d'un certain nombre d'industries étaient difficilement compatibles avec toutes ces hypothèses. Entre autres, les élasticités de substitution seraient très faibles (entre .002 et -.1) et varieraient constamment le long des isoquantes.

Une objection plus fondamentale à l'approche néo-classique, et qui est loin d'être nouvelle, concerne son réalisme. S'il s'agit d'expliquer et de prédire la direction des changements dans les prix observés, suite à des changements particuliers dans les conditions économiques, tels les salaires, taux d'intérêt, droits de douane, etc., on peut sans doute se contenter d'une représentation très abstraite de l'entreprise, comme le soutenait Machlup (1967), dans une allocution que rappelait Séguin Dulude (1986). Il en va autrement lorsqu'on s'intéresse au comportement des entreprises elles-mêmes ou qu'on recherche des prédictions qui soient les plus précises possibles. L'amélioration de la qualité de ces dernières passe nécessairement par une meilleure représentation du comportement des agents dans les modèles économiques.

---

10. Voir Baumol (1961), Lesourne (1960) et Dehem (1958). Ce dernier a également participé à la traduction de Dorfman, Samuelson et Solow (1958).

Dans cette perspective, on peut difficilement négliger la façon dont les entreprises prennent effectivement leurs décisions. Or, elles ont recours à des outils de plus en plus sophistiqués pour ce faire. C'est ainsi que la programmation linéaire ou ses prolongements et, plus généralement, la recherche opérationnelle ont fait une pénétration marquée dans beaucoup d'entreprises. On s'attendrait donc à ce que les modèles économiques incorporent davantage d'éléments de ces outils de décision. C'est un point de vue soutenu fréquemment par Simon (1972, 1976, 1978, 1979) et qui sera repris en conclusion, à propos de la complexité des problèmes de décision. La recherche opérationnelle est sans doute normative en ce qu'elle éclaire les décideurs dans leurs prises de décision mais, comme le souligne à juste titre Simon (1978; p.495), elle est en voie de devenir également une science positive, qui décrit une partie des processus réels de décision, parce que de plus en plus de décideurs suivent ses enseignements.

Non seulement l'analyse des activités et les fonctions de production basées sur les micro-données correspondent-elles davantage à la marche concrète des entreprises, mais elles permettent également l'utilisation de données de toutes sortes et dans n'importe quel format. Elles autorisent, entre autres, le recours à des données fournies par des ingénieurs et reflétant les dernières innovations technologiques.

Si ces approches ne sont pas plus répandues, c'est sans doute en partie parce qu'elles donnent l'impression de trop faire intervenir le jugement du constructeur et de l'utilisateur du modèle. On oublie alors que le choix d'une forme fonctionnelle et d'une technique d'estimation représente également un jugement de valeur important. C'est peut-être aussi parce que l'on craint les problèmes de traitement de l'information que comporte ce type d'approche. C'est une objection qui a toutefois de moins en moins sa raison d'être, les coûts du traitement de l'information allant sans cesse en diminuant.

## 2. PROGRAMMATION NON LINÉAIRE

Comme les économistes n'ont pas voulu se confiner aux technologies linéaires, il n'est pas surprenant qu'ils se soient intéressés très tôt à la programmation non linéaire. Ils y firent de nombreuses contributions tant au niveau de la théorie que des algorithmes. Citons, entre autres, l'article célèbre de Kuhn et Tucker (1951), plusieurs chapitres du livre de Arrow, Hurwicz et Uzawa (1958)<sup>11</sup>, et les articles de Arrow et Enthoven (1961) et de Houthakker (1960). Aujourd'hui, les conditions de Kuhn et Tucker font partie du bagage intellectuel de tous ceux qui s'intéressent à la théorie économique.

Étant donné les interprétations économiques de la dualité en programmation linéaire et les nombreuses applications qui en furent faites, les économistes ne pouvaient pas manquer non plus de se pencher sur la dualité en programmation non linéaire, comme en témoignent les travaux de van Moeseke (1965), Gale (1967), Balinski et Baumol (1968) et Cass (1974). Cependant, cohérents avec eux-mêmes,

---

11. Par Arrow, Chenery, Hurwicz, Solow et Uzawa.

les économistes se sont confinés au cas convexe et ont laissé aux mathématiciens, notamment à Gould (1969, 1972), Rockafellar (1974), Tind et Wolsey (1981), le soin d'apporter les derniers raffinements à un théorie générale de la dualité.

Dans cette théorie, qui est présentée de façon détaillée et d'un point de vue économique dans Truchon (1987), les variables duales de la programmation linéaire sont remplacées par des fonctions d'évaluation plus générales. Dans le problème dual, on cherche une fonction d'évaluation des ressources, telle que la valeur du stock de ressources utilisées à tout niveau d'activité est au moins aussi grande que la valeur de la fonction objectif à ce même niveau et telle que la valeur du stock de ressources disponibles est la plus faible possible. La valeur ainsi obtenue pour le stock de ressources sera toujours au moins aussi grande que la valeur optimale du primal. Cependant, le problème d'évaluation des ressources sera résolu de façon correcte uniquement si la valeur obtenue pour le dual est égale à celle du primal.

C'est ici que le choix de la classe de fonctions dans laquelle on cherche une solution au dual revêt toute son importance. Si la classe n'est pas suffisamment riche, il subsistera un écart entre les deux valeurs. Ce serait le cas, par exemple, si on se bornait à la classe des fonctions linéaires lorsqu'il y a des rendements décroissants ou à la classe des fonctions affines lorsqu'il y a des rendements croissants. Fort heureusement, il existe toujours une classe suffisamment riche pour que l'écart entre les valeurs des deux fonctions objectif soit complètement éliminé et pour que le problème d'évaluation des ressources soit ainsi solutionné de façon satisfaisante. Il suffit que cette classe contienne la fonction de perturbation, qui est alors elle-même une solution du dual.

Quant à la fonction lagrangienne traditionnelle, il est bien connu que, dans le cas d'un problème non convexe, elle n'a pas nécessairement de col même si le primal a une solution. Qu'à cela ne tienne, la nouvelle théorie de la dualité comprend également une fonction lagrangienne généralisée dans laquelle le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, les variables duales, est remplacé par la fonction d'évaluation des ressources, celle qu'on retrouve déjà dans le problème dual. Si la classe de fonctions dans laquelle on recherche une fonction d'évaluation est suffisamment riche, non seulement les problèmes primal et dual auront-ils des solutions dont les valeurs sont égales mais la fonction lagrangienne généralisée aura un col et réciproquement. De plus, le gradient de la fonction d'évaluation ou tout supergradient de cette fonction, lorsqu'elle n'est pas différentiable, satisfait les conditions de Kuhn et Tucker. Cette théorie a donc toute la beauté et la symétrie de celle de la programmation linéaire.

Cette théorie générale est de nature à mieux faire comprendre les raisons fondamentales des imperfections de marché et de l'impossibilité de la décentralisation par les prix linéaires en présence de non-convexités. Ces dernières sont plus importantes que l'on croit. Par exemple, Starret (1972) avait soulevé la possibilité que la présence d'externalités dommageables et l'hypothèse de convexité soient incompatibles. Plus récemment, Otani et Sicilian (1977) confirmaient les appréhensions de Starret, sous des hypothèses assez faibles. Une telle proposition signifie



qu'on ne peut pas espérer internaliser ces externalités par des pseudo-mécanismes de marché, c'est-à-dire des prix linéaires.

Cette théorie générale de la dualité indique aussi les directions à suivre pour mettre au point des mécanismes qui prennent en compte ces imperfections de marchés. Vega-Redondo (1987) offre un bel exemple de ce genre de mécanisme. Il propose un équilibre de Lindahl généralisé pour une économie non convexe. La fonction de taxation quadratique qui fait partie de cet équilibre, bien que ne s'appuyant pas directement sur la théorie générale de la dualité en programmation non linéaire, s'inspire carrément de la même approche.

### 3. PROGRAMMATION DISCRÈTE

Même si l'on se contente d'enseigner à nos étudiants à voir le monde en termes lisses, on ne peut nier la présence des indivisibilités comme phénomène économique. Certains auteurs, comme Stigler (1952), ont tenté de minimiser le problème en arguant qu'on pouvait toujours louer bon nombre de facteurs indivisibles mais la présence de cette possibilité ne fait que confirmer l'existence des indivisibilités. C'est tout simplement une autre entreprise qui doit les assumer. De plus, comme l'avaient déjà souligné Koopmans (1957, p.152)<sup>12</sup> et Frank (1969, p.48) et comme le rappellent Edwards et Starr (1987), les économies d'échelle résultent ultimement de la présence d'indivisibilités et d'autres non-convexités.

L'omniprésence des indivisibilités allait amener un certain nombre d'économistes à s'intéresser à la programmation discrète, dès ses tout débuts. Comme le rappelle Scarf (1981a, 1981b), on espérait que ce domaine de recherche soit aussi fructueux pour l'analyse économique que l'avait été la programmation linéaire. Cet espoir était d'autant plus grand que la programmation discrète se prête également bien au traitement des contraintes conditionnelles et, avec elles, à toutes les formes de non-convexité et même de non-connexité de la région accessible.

Parmi les contributions à la programmation discrète, on note l'association de Gomory et Baumol (1960) pour analyser les problèmes posés par la dualité dans ce contexte. Leur proposition, qui consistait à réimputer au problème original les variables duales d'un problème linéaire convexe équivalent, devait cependant s'avérer sans intérêt.

De leur côté, Reiter et Sherman (1962) ont analysé les problèmes de localisation avec externalités dans une formulation qui donnait un problème discret. Frank (1969) nous a fourni une première extension de l'analyse des activités au cas discret. Il y montre, entre autres, le rôle potentiel des prix non linéaires en présence d'indivisibilités. Plus près de nous, il faut souligner une contribution importante de Scarf (1981a, 1981b, 1986) sur laquelle nous allons revenir et une thèse de White (1983) rapportée par Scarf (1986).

---

12. Il disait: «*I have not found one example of increasing returns to scale in which there is not some indivisible commodity in the surrounding circumstances.*»

On compte peu d'autres contributions d'économistes à la programmation discrète et au traitement des indivisibilités de manière plus générale en théorie économique. Selon Scarf (1986), l'optimisme initial des économistes pour la programmation discrète se serait vite évanoui parce que, devant la complexité des problèmes discrets, les chercheurs ont dû se tourner vers l'analyse combinatoire et la théorie des graphes. Leurs recherches ont d'ailleurs donné naissance à une nouvelle branche des mathématiques, la théorie de la complexité (des calculs ou des algorithmes). Aujourd'hui, on ne dispose toujours pas de résultats théoriques généraux ni d'algorithmes universels qui aient une interprétation économique aussi intéressante que celle de la méthode du simplexe.

On peut donc comprendre que les économistes aient délaissé ce champ d'étude aux mathématiciens et aux spécialistes de la recherche opérationnelle. C'est également à ces derniers qu'on a laissé le soin de mettre au point une théorie de la dualité applicable aux problèmes discrets. Dans ses grandes lignes, elle est très semblable à celle qui a été exposée plus haut pour la programmation non linéaire. Tout comme en programmation linéaire, c'est souvent à l'occasion du développement de nouveaux algorithmes que les progrès sur la dualité en programmation discrète ont été réalisés. Cela n'est guère surprenant, étant donné la liaison étroite entre la recherche de la meilleure utilisation des ressources et l'évaluation de ces dernières.

Le désintéressement des économistes pour la programmation discrète est d'autant plus déplorable que plusieurs problèmes de décision contiennent un aspect combinatoire non négligeable. Ainsi, un producteur d'électricité, qui doit décider quelle combinaison de ses différents équipements utiliser à différentes périodes de l'année, fait face à un problème combinatoire dont la complexité peut croître rapidement avec le nombre de ses équipements<sup>13</sup>. La compagnie d'aviation ou de location d'avions, qui envisage d'acheter de nouveaux appareils, ne peut recourir à l'analyse marginaliste. Elle doit d'abord trouver comment les nouveaux avions seraient utilisés pour déterminer le type et le nombre d'appareils à acheter. On est bien loin de la substitution capital-travail. C'est plutôt un problème combinatoire fort complexe sur lequel nos théories traditionnelles ont peu à dire. Les problèmes de choix des consommateurs comportent souvent, eux aussi, des indivisibilités importantes.

Dans sa contribution sur la solution des problèmes discrets, Scarf (1981a, 1981b, 1986) propose de remplacer le système de prix des problèmes convexes par un voisinage discret qui a la propriété suivante: tout optimum dans ce voisinage est un optimum global. Le parallèle avec les propriétés des fonctions pseudo-concaves, dont tout maximum local est aussi un maximum global, est évident. Ces voisinages ont deux autres propriétés intéressantes: le voisinage de chaque point est la translation de ceux des autres points et il dépend uniquement de la technologie, qui est supposée linéaire.

---

13. Boiteux et Bessière (1961) offrent une discussion non technique des différentes facettes de ce type de problème.

C'est un résultat théorique très puissant. Une fois connu ce voisinage, un algorithme s'impose de lui-même pour trouver un optimum. Il s'agit de vérifier si on a un optimum local et, lorsque ce n'est pas le cas, de se déplacer au point du voisinage qui donne la meilleure amélioration à la fonction objectif.

Sur le plan pratique, il y a cependant une grande difficulté. Le voisinage peut contenir un nombre de points qui croît exponentiellement avec la taille du problème. Le défi est donc de découvrir la structure de ce voisinage ou de faire des hypothèses qui en diminuent la taille de façon à accélérer les recherches.

Scarf (1986) a étudié la structure de ces voisinages pour un certain nombre de problèmes. Pour le problème de transport, que les économistes de ma génération connaissent bien, il a montré que l'exploration du voisinage de chacun des points équivaut à l'application de la méthode du simplexe. On voit donc clairement que ce système de voisinage constitue une généralisation du concept de prix implicites en programmation convexe.

#### 4. CONCLUSION

Il est encore beaucoup trop tôt pour évaluer ce que peut apporter cette contribution de Scarf pour l'analyse économique. Une chose cependant est certaine. Si les économistes visent un plus grand réalisme dans leurs modèles, ils ne pourront négliger indéfiniment les indivisibilités de toutes sortes et les problèmes combinatoires avec toute la complexité qu'ils apportent. Selon Scarf (1981a), la reconnaissance de la complexité des problèmes économiques sera un ingrédient important de toute nouvelle théorie de l'entreprise. Il affirme même (1981b) que la théorie de la complexité va jeter un nouveau pont entre la programmation mathématique et la théorie économique.

Il reprenait à son compte des propos tenus à plusieurs reprises par Simon (1972, 1976, 1978, 1979). Selon ce dernier, la théorie de la complexité des calculs a non seulement fourni des algorithmes puissants, souvent basés sur des règles heuristiques, mais elle a aussi encouragé le développement de nouveaux types de modèles de décision rationnelle qui prennent en compte les limites de l'homme et de ses ordinateurs dans la collecte et le traitement de l'information. Cette approche a donné de bons résultats dans d'autres disciplines, comme l'intelligence artificielle. Il est urgent, selon lui, que les économistes s'en inspirent pour inclure dans leur analyse et leurs modèles les aspects concrets des processus de décisions.

#### BIBLIOGRAPHIE

- ARROW, K.J., « An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics », in *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, ed. by J. Neyman, Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1951, 507-532.
- ARROW, K.J. and A.C. ENTHOVEN, « Quasi-Concave Programming », *Econometrica*, 29 (1961), 779-801.

- ARROW, K.J. and L. HURWICZ, « Decentralisation and Computation in Resource Allocation », in *Essays in Economics and Econometrics in Honour of Harold Hotelling*, ed. by R. Pfouts, Chapel Hill, N.C.: University of North Carolina Press, 1960.
- ARROW, K.J., HURWICZ, L. and UZAWA, H., *Studies in Linear and Non-Linear Programming*, California: Stanford University Press, 1958.
- BALINSKI, M.L. and W.J. BAUMOL, « The Dual in Nonlinear Programming and its Economic Interpretation », *Review of Economic Studies*, 35 (1968), 237-256.
- BAUMOL, W.J., « Marginalism and the Demand for Cash in the Light of Operations Research Experience », *Review of Economics and Statistics*, 40 (1958), 209-214.
- BAUMOL, W.J., « Activity Analysis in One Lesson », *American Economic Review*, 48 (1958), 837-873.
- BAUMOL, W.J., *Economic Theory and Operations Analysis*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1961.
- BAUMOL, W.J. and T. FABIAN, « Decomposition, Pricing for Decentralization and External Economies », *Management Science*, 2 (1964), 1-32.
- BECKMANN, M. and T.C. KOOPMANS, « Assignment Problems and the Location of Economic Activities », *Econometrica*, 25 (1957), 53-76.
- BECKMANN, M. and T. MARSCHAK, « An Activity Analysis Approach to Location Theory », *Kyklos*, 8 (1955), 125-143.
- BESSIERE, F., « Application de la dualité à un modèle de programmation à long terme », *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, 3(1959), 115-129.
- BOITEUX, M. et F. BESSIERE, « Sur l'emploi des méthodes globales et marginale dans le choix des investissements », *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, 5(1961), 259-269.
- CASS, D., « Duality: A Symmetric Approach from the Economist's Vantage Point », *Journal of Economic Theory*, 7 (1974), 272-295.
- CHARNES, A., W.W. COOPER and B. MELLON, « Blending Aviation Gasolines », *Econometrica*, 20 (1952), 135-159.
- DANTZIG, G.B. and P. Wolfe, « The Decomposition Algorithm for Linear Programs », *Econometrica*, 29 (1961), 767-778.
- DEBREU, G., « The Coefficient of Resource Utilization », *Econometrica*, 19(1951), 273-292.
- DEBREU, G., « Valuation Equilibrium and Pareto Optimum », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, 40 (1954), 588-592.
- DEHEM, R., *Traité d'analyse économique*, Paris: Dunod, 1958.
- DORFMANN, R., P.A. SAMUELSON and R. SOLOW, *Linear Programming & Economic Analysis*, New York: McGraw-Hill Ltd., 1958.
- EDWARDS, B.K. and R.M. STAR, « A Note on Indivisibilities, Specialization, and Economy of Scale », *American Economic Review*, 77 (1987), 192-194.

- FRANK, C.R., Jr., *Production Theory and Indivisible Commodities*, New-Jersey: Princeton University Press, 1969.
- GALE, D., *The Theory of Linear Economic Models*, New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.
- GALE, D., « A Geometric Duality Theorem with Economic Applications », *Review of Economic Studies*, 34 (1967), 19-24.
- GOMORY, R.E. and W.J. BAUMOL, « Integer Programming and Pricing », *Econometrica*, 28 (1960), 521-550.
- GOULD, F.J., « Extensions of Lagrange Multipliers in Nonlinear Programming », *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17 (1969), 1280-1297.
- GOULD, F.J., « Nonlinear Duality Theorems », *Cahiers du Centre d'études de recherche opérationnelle*, 14 (1972), 196-212.
- HEAL, G.M., « Planning without Prices », *Review of Economic Studies*, 26 (1969), 347-363.
- HEAL, G.M., « Planning, Prices and Increasing Returns », *Review of Economic Studies*, 28 (1971), 281-295.
- HEAL, G.M., *The Theory of Economic Planning*, New York: American Elsevier Publishing Co. Inc., 1974.
- HILDENBRAND, W., « Short-Run Production Functions Based on Microdata », *Econometrica*, 49 (1981), 1095-1125.
- HOUTHAKKER, H.S., « The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis », *Review of Economic Studies*, 23 (1955), 27-31.
- HOUTHAKKER, H.S., « The Capacity Method of Quadratic Programming », *Econometrica*, 28 (1960), 62-87.
- JOHANSEN, L., *Production Functions*, Amsterdam-London: North-Holland Publishing Company, 1972.
- KOOPMANS, T.C. (eds.), *Activity Analysis of Production and Allocation*. New-York: John Wiley & Sons, Inc., 1951a.
- KOOPMANS, T.C., « Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities », in *Activity Analysis of Production and Allocation*, ed. by T.C. Koopmans, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1951b, 33-97.
- KOOPMANS, T.C., *Three Essays on the State of Economic Science*, New York: McGraw Hill, 1957.
- KORNAL, J. and T. LIPTAK, « Two-level Planning », *Econometrica*, 33 (1965), 141-169.
- KUHN, H.W. and A.W. TUCKER, « Nonlinear Programming », in *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, ed. by J. Neyman, Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1951, 481-492.
- LANGE, O., « On the Economic Theory of Socialism », *Review of Economic Studies*, 4 (1936), 53-71; 123-142.

- LESOURNE, J., *Technique économique et gestion industrielle*, Paris: Dunod, 1960.
- MACHLUP, F., « Theories of the Firm: Marginalist, Behavioral, Managerial », *American Economic Review*, 57 (1967), 1-33.
- MALINVAUD, E. « Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources », *Econometrica*, 21 (1953), 233-268.
- MALINVAUD, E. « Programmes d'expansion et taux d'intérêt », *Econometrica*, 27(1959), 215-227.
- MALINVAUD, E., « Decentralized Procedures for Planning », in *Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning*, ed. by E. MALINVAUD and M.O.L. BACHARACH, New York: Saint-Martin's Press, 1967.
- MALINVAUD, E., « Note sur l'étude des procédures de planification », *Canadian Journal of Economics*, 1 (1968), 16-36.
- MASSÉ, P. and R. GIBRAT, « Application of Linear Programming to Investments in the Electric Power Industry », *Management Science*, 3 (1957), 149-166.
- MATUSZEWSKI, T.I., P.R. PITT and J.A. SAYERS, « Linear Programming Estimates of Changes in Input Coefficients », *Canadian Journal of Economics and Political Science*, 30 (1964), 203-210.
- MOESEKE, P. Van, « A General Duality Theorem of Convex Programming », *Metroeconomica*, 17 (1965), 161-170.
- NEUMANN, J. von, « A Model of General Economic Equilibrium », *Review of Economic Studies*, 13 (1945-46), 1-9.
- NEUMANN, J. von, and O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press, 1944.
- OTANI, Y. and J. SICILIAN, « Externalities and Problems of Nonconvexity and Overhead Costs in Welfare Economics », *Journal of Economic Theory*, 14(1977), 239-251.
- RADNER, R., « The Application of Linear Programming to Team Decision Problems », *Management Science*, 5 (1959), 143-150.
- RADNER, R., « Paths of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States: A Turnpike Theorem », *Review of Economic Studies*, 28 (1961), 98-104.
- REITER, S. and G.R. SHERMAN, « Allocating Indivisible Resources Affording External Economies or Diseconomies », *International Economic Review*, 3 (1962), 108-135.
- ROCKAFELLAR, R.T., « Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in Nonconvex Programming », *SIAM Journal on Control*, 12 (1974), 268-283.
- SATO, K., « Production Function and Aggregation », *Contributions to Economic Analysis*, 90, Amsterdam: North-Holland; New York: American Elsevier, 1975.
- SCARF, H., « Productions Sets with Indivisibilities – Part I: Generalities », *Econometrica*, 49 (1981a), 1-32.
- SCARF, H., « Productions Sets with Indivisibilities – Part II: The Case of Two Activities », *Econometrica*, 49 (1981b), 395-423.

- SCARF, H., « Neighborhood Systems for Production Sets with Indivisibilities », *Econometrica*, 54 (1986), 507-532.
- SÉGUIN DULUDE, L., « Quelques réflexions sur la complémentarité des approches marginalistes et managériales », *L'Actualité Économique/ Revue d'analyse économique*, 62 (1986), 157-165.
- SIMON, H.A., « Theory of Bounded Rationality », in *Decision and Organization*, ed. by C.B. Radner and R. Radner, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1972, 161-176.
- SIMON, H.A., « From Substantive to Procedural Rationality », in *Method and Appraisal in Economics*, ed. by S.J. Latsis, Cambridge: Cambridge University Press, 1976, 129-148.
- SIMON, H.A., « On How to Decide What to Do », *The Bell Journal of Economics*, 19 (1978), 494-507.
- SIMON, H.A., « Rational Decision Making in Business Organizations », *American Economic Review*, 69 (1979), 493-513.
- SOLOW, R.M., « On the Structure of Linear Economic Models », *Econometrica*, 20(1952), 29-46.
- STARRET, D., « Fundamental Nonconvexities in the Theory of Externalities », *Journal of Economic Theory*, 4 (1972), 180-199.
- STIGLER, G., *The Theory of Price*, New York: Macmillan, 1952.
- TAYLOR, F.M., « The Guidance of Production in a Socialist Economy », *American Economic Review*, 19 (1929), 1-8.
- TIND, J. and L.A. WOLSEY, « An Elementary Survey of General Duality Theory in Mathematical Programming », *Mathematical Programming*, 21 (1981), 241-281.
- TRUCHON, M., *Théorie de l'optimisation statique et différentiable*, Chicoutimi: Gaëtan Morin éditeur, 1987.
- UZAWA, H., « Iterative Methods for Concave Programming », in *Studies in Linear and Non-Linear Programming*, ed. by K.J. Arrow, L. Hurwicz and H. Uzawa, Stanford: Stanford University Press, 1958.
- VANDERMEULEN, D.C., *Linear Economic Theory*, New-Jersey: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1971.
- VEGA-REDONDO, F., « Efficiency and Nonlinear Pricing in Nonconvex Environments with Externalities: A Generalization of the Lindahl Equilibrium Concept », *Journal of Economic Theory*, 41 (1987), 54-67.
- WEITZMAN, M., « Iterative Multi-Level Planning with Production Targets », *Econometrica*, 38 (1970), 50-65.
- WHITE, P., « Discrete Activity Analysis », Ph.D. Thesis, Yale University, 1983.