

# Prenons-nous assez de risque dans les théories du risque? Do We Take Enough Risk in Risk Theories?

Gérard Colson

Volume 69, Number 1, mars 1993

L'asymétrie d'information

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/602099ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/602099ar>

[See table of contents](#)

## Article abstract

A short overview of how risk is conceived by practitioners reveals nine features of risk while theoreticians worry more about the way of solving the discrepancies between the predictions of the expected utility paradigm and the actual behaviour of people. Anyway, quickly expanding new theories of risk do not encompass enough components of risk. The last section of this paper is devoted to the new *bipolar theory of risk* proposed by the author, where risk is a vector and could benefit from a multicriterion approach.

## Publisher(s)

HEC Montréal

## ISSN

0001-771X (print)

1710-3991 (digital)

[Explore this journal](#)

## Cite this article

Colson, G. (1993). Prenons-nous assez de risque dans les théories du risque? *L'Actualité économique*, 69(1), 111–141. <https://doi.org/10.7202/602099ar>

## PRENONS-NOUS ASSEZ DE RISQUE DANS LES THÉORIES DU RISQUE ?\*

Gerard COLSON

*École d'administration des Affaires  
Université de Liège*

RÉSUMÉ – Un survol limité du concept du risque chez les praticiens nous révèle neuf caractéristiques du risque, tandis que les théoriciens s'intéressent surtout à la réduction des écarts entre les prédictions du paradigme de l'espérance d'utilité et le comportement des décideurs. Le foisonnement des nouvelles théories du risque n'incorporent pourtant pas assez de composantes du risque. Enfin, la dernière section de ce papier envisage une nouvelle théorie du risque : dans cette *théorie bipolaire*, le risque vectoriel peut bénéficier d'une approche multicritère.

ABSTRACT – *Do We Take Enough Risk in Risk Theories?* A short overview of how risk is conceived by practitioners reveals nine features of risk while theoreticians worry more about the way of solving the discrepancies between the predictions of the expected utility paradigm and the actual behaviour of people. Anyway, quickly expanding new theories of risk do not encompass enough components of risk. The last section of this paper is devoted to the new *bipolar theory of risk* proposed by the author, where risk is a vector and could benefit from a multicriterion approach.

---

### INTRODUCTION

Les nouvelles théories du risque en économie et en finance foisonnent depuis peu, beaucoup se rattachant à une recherche axiomatique autour de l'espérance d'utilité de von Neumann-Morgenstern. Même dans ce dernier domaine plus restreint, l'auteur n'a aucune chance d'être exhaustif ni même systématique. Si les citations et les choix qu'il a faits sont assez arbitraires, la couverture des théories lui semble cependant suffisante pour apprécier les grandes orientations et les lacunes dans la recherche, et aussi les succès. L'auteur a aussi pris le risque et un plaisir certain à faire connaître succinctement sa théorie bipolaire du risque.

*Prenons-nous assez de risque dans les théories du risque ?*

On peut comprendre cette phrase dans deux sens différents.

Selon le premier sens, la question : « *couvrons-nous assez les divers aspects du risque ?* » doit à notre avis recevoir une réponse négative nuancée. À la fin de la section 1, consacrée à un survol sommaire de l'approche pratique

---

\* L'auteur remercie Jean-Marc Martel et Kazimierz Zaras pour les judicieuses remarques qui ont permis d'améliorer la première version de ce texte.

du concept de risque, il nous apparaît que le risque présente au moins neuf caractéristiques essentielles. Dans la section 2, nous ne commentons brièvement que les théories du risque prédominantes qui se sont multipliées autour de la théorie unifiante de l'espérance d'utilité au sens de von Neumann-Morgenstern, suite à son mauvais comportement prédictif dans les situations extrêmes. Il en ressort que seules quelques caractéristiques du risque y sont traitées. Mais il serait injuste de ne pas rappeler l'existence de bien d'autres théories du risque qui se sont séparées du principe de l'espérance d'utilité et de tout ou partie de ses axiomes. Ces théories ne feront pas l'objet de cet article.

Selon le deuxième sens, la question : « *courons-nous assez de risque à travers ces théories ?* » reçoit aussi une réponse négative, mais sans discussion !

Ici nous faisons référence à la théorie financière qui pose presque toujours l'hypothèse contraignante d'une *aversion généralisée au risque*. À notre avis, cette théorie est *unipolaire conservatrice*, ignorant certains comportements hautement spéculatifs de l'investisseur. D'où l'idée de construire une théorie plus générale : la théorie bipolaire que nous résumons à la section 3 de cet article.

Selon cette dernière, le risque y est perçu en relation avec un pôle conservateur et un pôle spéculateur. De cette hypothèse découle de nombreuses implications essentiellement en théorie financière. Par exemple, l'approche PRV (prospect ranking vector), et l'approche espérance, semi-variances inférieure et supérieure sont des cas particuliers intéressants de cette théorie. Ils permettent l'un une approche pragmatique de la sélection de projets dans l'incertain, l'autre un nouveau paradigme pour tester le comportement des investisseurs.

En rapport avec l'issue spéciale de cette revue, cette théorie apporte deux éléments essentiels :

- l'*asymétrie* de comportement du décideur face aux gains et aux pertes et l'*asymétrie* des distributions de rendements des portefeuilles d'actifs sont bien traités par la théorie bipolaire,
- *le principe optimisant et monocritère de l'espérance d'utilité doit parfois laisser la place à une approche multicritère*. Ce sera le cas par exemple dans la recherche des portefeuilles spéculatifs dans une approche bipolaire (section 3).

## 1. CONCEPT ET TRAITEMENT DU RISQUE CHEZ LES PRATICIENS

Chez différentes classes de praticiens, les concepts et les traitements du risque sont très divers et se prêtent mal à des généralisations. Ainsi, les assureurs distinguent d'abord deux types de risques, dont généralement seul le premier est assurable :

- a) *le risque pur*: les conséquences potentielles sont des pertes, des blessures, des destructions, des désavantages...,
- b) *le risque spéculatif*: des résultats favorables et défavorables sont possibles.

Si on se tourne vers la gestion des risques, on constate que deux types d'approches sont suivies : « la gestion des risques de *pertes* » et « la gestion des risques de *fonctionnement* ». La première, la plus courante, est centrée sur la *perte* (= risque pur); la deuxième, minoritaire et plus récente, est centrée sur les objectifs à maintenir dans l'entreprise : *le risque est celui de non fonctionnement de tout ou partie de l'entreprise*.

Il est remarquable que l'acception courante du concept élimine la partie spéculative du risque en ne conservant que le côté *désavantage*, alors que les théories financière et économique envisagent les deux parties.

Les hommes d'affaires évaluent couramment les projets par le flux temporel des cash-flows, l'analyse du risque consistant à considérer les facteurs clés d'incertitude qui produisent une *variabilité* de la valeur actualisée nette. La mesure du risque est donc implicitement ramenée à une simple mesure de la variabilité, tout comme en gestion de portefeuille, lorsqu'on minimise la variance des rendements d'un portefeuille dans l'approche classique « Espérance-Variance ».

Hertz et Thomas (1983) ont traité des risques stratégiques dans les organisations et les entreprises. Selon eux, le risque signifie à la fois l'incertitude et les résultats de l'incertitude; il naît d'un *manque de prévisibilité* de la structure et des résultats ou conséquences, dans une situation de décision ou de planification. Ils ajoutent que les situations de décisions stratégiques impliquent une incertitude considérable sur la formulation du problème en termes structurels et sur les hypothèses sous-jacentes. D'où la nécessité de parler du manque de prévisibilité en termes de structure. Les facteurs clés d'incertitude portent sur

- la pertinence et la définition des hypothèses
- la génération d'alternatives stratégiques
- le niveau d'information de l'organisation sur le problème
- l'importance des conséquences
- la capacité d'atteindre divers buts de l'organisation.

Que l'on parle de risques de l'entreprise, de risques sociétaux (voir Sarin, 1984) ou individuels, on est frappé par la diversité des sujets et des objets de risques. Cette diversité rend peu probables la découverte d'un seul concept de risque polyvalent, la réduction à une seule mesure de risque et donc la construction d'une seule méthodologie de traitement de

risque. On peut cependant tirer une liste de neuf caractéristiques essentielles attribuables à la notion de risque :

1. *Une anticipation du futur*

Cette évidence est parfois oubliée dans certaines analyses. Ainsi une utilisation trop exclusive d'une analyse statistique du comportement des titres boursiers est en fait basée sur des hypothèses douteuses de reproduction du passé et de stabilité des bêtas.

2. *Une dichotomie : résultats favorables <-> résultats défavorables*

Toute décision entraîne des conséquences, les unes favorables, les autres défavorables aux yeux de ceux qui subissent ces conséquences. Les attitudes et la perception du risque vont différer fortement selon qu'on envisage l'un ou l'autre aspect de cette dichotomie. L'aspect psychologique de cette dichotomie peut être fort important.

Cette caractéristique est à la base de notre théorie bipolaire.

3. Les natures, lieux, sujets et objets du risque sont très différents.
4. L'incertitude et donc le risque ne se limitent pas aux *résultats*, mais concernent aussi les *éléments structurels et la formulation du problème*.
5. En pratique, des *niveaux d'aspirations* en analyse du risque sont plus fréquemment recherchés qu'un optimum.
6. *Le temps* est un facteur important qu'il faut intégrer explicitement dans l'analyse (voir par exemple Colson, 1983).
7. La perception du risque et les attitudes face au risque et à l'incertitude dépendent des situations vécues et du temps. D'ailleurs beaucoup de résultats expérimentaux le confirment.
8. Le risque apparaît à chaque étape des processus de décision, (Colson, 1983) et davantage sans doute au moment de la délimitation et la formulation du problème de décision.
9. Le risque se prête mal à une seule mesure. *Il présente un aspect vectoriel* qui découle essentiellement de la troisième caractéristique.

Ainsi, contrairement aux approches optimisantes de la littérature économique qui visent à définir un seul indice de mesure de valeur dans l'incertitude, afin de le maximiser ensuite, on pourrait se tourner utilement vers une approche plus pragmatique du type multicritère : *l'approche vectorielle* du risque autorise la recherche de solutions efficaces par rapport aux composantes de risque non agrégeables (cf. Colson et Zeleny, 1979, 1980 et cf. Colson, 1983, 1985 parmi d'autres).

## 2. LES APPROCHES THÉORIQUES DU RISQUE

On peut distinguer deux courants de recherches théoriques. Le premier ne vise pas une théorie unifiante du risque, mais regroupe toutes les théories probabilistes et les modèles de processus stochastiques qui servent à résoudre les problèmes des actuaires (voir par exemple Beard, Pentikainen et Personen, 1990). Au contraire de ces modèles *ad hoc*, une théorie unifiante s'est constituée autour du principe du maximum de l'espérance d'utilité, utilisé par les économistes et les financiers.

Dans ce dernier courant, à condition d'adopter un concept restreint du risque, où l'incertitude se limite à sa composante aléatoire décrite par une distribution de probabilités, on peut regrouper les approches en trois grandes classes (Colson, 1983, 1985) : l'espérance d'utilité, la fonction de pénalisation des écarts à une cible et la dominance stochastique. Ces trois approches sont fortement reliées entre elles. Nous en rappelons les grands axes ci-dessous.

### 2.1 La théorie de l'utilité de von Neumann-Morgenstern

#### i) Paradoxe de Petersburg

Le célèbre paradoxe de Petersburg a mis en évidence une première contradiction entre le comportement observé des gens et les indications prescriptives du critère de maximisation de l'espérance de valeur d'une loterie. Bernoulli (1738) a proposé de remplacer la fonction de valeur par une fonction d'utilité – qui était logarithmique, ce qui est un choix arbitraire –. Deux siècles après, von Neumann et Morgenstern (VN-M) (1944) fondent réellement la théorie de l'utilité, en démontrant qu'un individu, obéissant à un ensemble d'axiomes de comportement réputés raisonnables, doit choisir entre des choix risqués comme s'il maximisait l'espérance d'utilité (*Eu*). Ce paradigme de l'*Eu* a connu un succès considérable dans toutes les disciplines impliquant une explication des choix dans l'incertain. Par exemple, il contribue à expliquer, avec un certain succès, l'existence des assurances, le comportement face aux jeux de hasard, la préférence pour la liquidité, etc... En outre, il contribue apparemment à fonder plus solidement une partie de la théorie financière moderne.

#### ii) Les axiomes de comportement et leurs implications essentielles

On cite généralement trois axiomes prépondérants qui déterminent l'existence d'une fonction d'utilité cardinale.

L'axiome d'existence d'un préordre permet de construire une fonction d'utilité ordinaire pour classer les objets dans le certain. En adjoignant l'axiome de continuité, on peut construire une fonction d'utilité à valeurs réelles permettant de classer des loteries (Machina, 1982). Le troisième

axiome, l'*indépendance*, est celui qui autorise l'emploi de l'espérance d'utilité dans sa forme séparable et linéaire; la fonction d'utilité devient cardinale, c'est-à-dire définie à une transformation linéaire positive près ( $U = a + bu$ ,  $b > 0$ ). Pratiquement, l'échelle d'utilité est cardinale et définie dès qu'on a choisi arbitrairement deux points de repère sur cette échelle, comme pour une échelle de température.

L'ensemble des trois axiomes implique qu'une loterie  $X$  est préférée (indifférente) à une loterie  $Y$  si et seulement si  $Eu(X) > Eu(Y)$ , ( $Eu(X) = Eu(Y)$ ). L'espérance d'utilité de la loterie est :

$$Eu(X) = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i) \quad (\text{u.1})$$

où  $x_i$  est une des  $n$  issues possibles, de probabilité  $p_i$ , de la loterie  $X$ .

Les principales implications de l'axiome d'indépendance sont liées à la forme de (u.1) :

- a) La décomposabilité des loteries autorise le calcul des probabilités.  
Cette propriété est à la base de la résolution des arbres de décision.
- b)  $Eu$  est linéaire en probabilités, cette propriété implique à son tour deux propriétés d'invariance de la préférence entre deux loteries :
  - b1) ajouter ou soustraire à  $X, Y$  une même conséquence avec la même probabilité ne change pas la préférence entre  $X$  et  $Y$ .
  - b2) multiplier certaines probabilités par un même nombre positif dans les deux loteries  $X$  et  $Y$ , ne change pas les préférences entre  $X$  et  $Y$ .
- c) Chaque  $u(x_i)$  est déterminée *indépendamment* des autres résultats ( $x_j$ ), des probabilités ( $p$ ) de la loterie, et *indépendamment de la présentation* de la loterie, et plus généralement du *contexte* décisionnel.

Précisons que l'axiome d'existence d'un préordre est en fait composé de deux axiomes :

- l'axiome de *choix obligé* entre deux objets quelconques qui peuvent être des loteries. Ceci exclut tous les modèles de préférence à seuils qui sont largement utilisés dans les modèles multicritères (voir par exemple Colson et De Bruyn, 1989).
- l'axiome de *transitivité* de la préférence et de l'indifférence. On sait que la transitivité de l'indifférence ne peut être appliquée en chaîne, sous peine d'absurdité dans les modèles à seuils d'indifférence, et que même la transitivité de la préférence n'est pas toujours requise dans les modèles multicritères.

Mais c'est l'axiome d'indépendance qui a été la principale cause de discordance et de foisonnement des théories du risque qui se rattachent à la fonction d'utilité. Nous y reviendrons.

iii) *Les classes de fonction d'utilité en relation avec les attitudes face au risque*

Trois grandes classes de comportement face au risque ont été observées et modélisées.

Un joueur de jeu de hasard manifeste une *préférence au risque*, parce qu'il croit implicitement que la loterie lui est favorable alors que c'est l'inverse en moyenne. Au contraire, une personne qui s'assure a une *aversion au risque* lorsqu'elle paie une prime supérieure à l'espérance de perte du sinistre couvert, ce qui est le cas pour la plupart des polices d'assurances.

Enfin, une personne jouant de façon *répétitive* à une même loterie qui lui serait favorable (= espérance de gain positive) doit payer le billet de loterie au prix maximum de l'espérance de gain. Elle a alors une *attitude neutre au risque* et emploie le critère *Ev* (espérance de valeur).

Là où le décideur marque une préférence (une aversion ou une indifférence au risque), la fonction d'utilité est convexe (concave ou linéaire). Elle est *partout* respectivement convexe, concave ou linéaire si l'attitude au risque est *généralisée*.

*La théorie financière actuelle admet souvent la simplification arbitraire de considérer que la majorité des investisseurs ont une aversion généralisée au risque, et, accessoirement, que l'investisseur commun a une aversion absolue généralisée au risque, décroissante lorsque la richesse augmente, traduite dans une utilité DARA. Cette critique sera prise en compte dans la section 3. Il va de soi que les deux grandes classes d'attitude non neutre au risque ont donné lieu à des précisions et développements considérables dans la littérature. (Voir par exemple Levy, 1992).*

Un domaine complexe plus récemment exploré, (voir par exemple Richard, 1975; Duncan, 1977; Karni, 1979, 1989), est le comportement face au risque pour des loteries multiattributs. On peut alors distinguer de nombreux cas en fonction du signe des dérivées croisées de la fonction d'utilité  $u(X_1, X_2, \dots, X_n)$  où  $X_i$  est la loterie marginale de l'attribut  $x_i$  de la loterie  $X$  à  $n$  attributs.

L'attitude dynamique au risque n'est pas encore étudiée, à notre connaissance.

iv) *La fonction d'utilité individuelle uni et multidimensionnelle*

L'assertion de la fonction d'utilité individuelle unidimensionnelle a fait couler beaucoup d'encre (voir par exemple Farquhar, 1984). On y part du postulat qu'on pourra découvrir ou construire une fonction d'utilité



individuelle spécifiée dans sa forme et ses paramètres. Les multiples techniques d'assertion visent à éviter et/ou à corriger les biais de comportement du décideur. Ceci repose évidemment sur le postulat normatif que ces biais existent réellement, mais aussi sur le postulat d'existence ou de constructabilité d'une fonction d'utilité individuelle.

À ce sujet, l'effet de certitude, parmi d'autres effets perturbants, peut être réduit en remplaçant la recherche classique d'équivalents certains ( $u^{-1}(Eu(X))$ ) par la recherche de loteries équivalentes. L'effet de certitude naît d'une violation observée de l'axiome de continuité lorsqu'on passe de l'incertain au certain. Selon McCord et de Neufville (1986), qui ont beaucoup travaillé sur ce sujet, l'effet de certitude est le phénomène psychologique pernicieux qui fait que beaucoup d'individus apprécient davantage des résultats lorsqu'ils apparaissent dans le certain plutôt que dans une loterie. Le proverbe populaire associé est « *un tien vaut mieux que deux tu l'auras* ».

L'assertion de la fonction d'utilité multidimensionnelle repose sur des axiomes d'indépendance (Keeney, 1972) qui autorisent des décompositions de la fonction d'utilité jointe  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Les décompositions les plus utilisées sont celles qui aboutissent à la forme multiplicative, basée sur l'hypothèse d'indépendance mutuelle en utilité (MUI), et la forme additive, basée sur l'hypothèse emboîtée d'indépendance additive (AI). (voir Keeney et Raiffa, 1976).

Cette assertion de  $u(x_1, \dots, x_n)$  est basée sur les mêmes postulats d'existence ou de constructabilité de  $u$ . Une assertion précise nous semble un leurre, comme à beaucoup de chercheurs. C'est pourquoi nous avons mis au point un procédé d'assertion tolérant une certaine imprécision des réponses tant pour la vérification des indépendances que pour l'assertion des constantes (Colson, 1989). Une autre approche consiste à utiliser les sous-ensembles flous (Mathieu-Nicot, 1985).

#### v) *La résolution de l'incertitude temporelle*

Ce sont essentiellement les économistes et les financiers qui étudient les problèmes posés par l'incorporation du temps dans l'analyse du risque. Les économistes -tels Merton (1975), Chew et Epstein (1990), parmi d'autres - s'intéressent au problème de décision individuelle de consommation/épargne au cours d'une vie. En cas particulier se pose le problème de sélection de portefeuille. On fait souvent l'hypothèse que le décideur résoud ces problèmes en maximisant l'espérance d'utilité de sa consommation au cours du temps, en incluant éventuellement une utilité de l'héritage. Il existe des modèles d'analyse continue dans le temps et des modèles plus réalistes d'analyse discrète. Les modèles mathématiques sont complexes pour obtenir des résultats de nature très générale, relativement

peu utiles pour le décideur. Il est évident que ce chapitre, comme bien d'autres, demanderait un développement propre très important.

Au niveau des axiomes, il semblerait que l'incorporation du temps implique leur modification (voir par exemple Kreps et Porteus, 1978).

Un point plus important est que l'instabilité observée des fonctions d'utilité construites semble démontrer l'intérêt limité de la construction de fonctions d'utilités individuelles et combien l'effet du temps est une caractéristique importante du risque !

#### vi) *Critiques de l'espérance d'utilité*

Ces critiques sont trop nombreuses pour être résumées ici. Elles alimentent un courant de recherche fécond sur les *fondations de l'utilité et du risque*, en créant des situations de choix extrêmes, où paradoxalement, des sujets nombreux refusaient d'obéir volontairement et consciemment aux maximes de l'espérance d'utilité, et partant à ces axiomes. Depuis, les contradictions entre la théorie dominante de l'utilité de VN-M et les comportements observés se sont multipliées, donnant naissance par contrecoup à une multitude récente de théories concurrentes quant aux axiomes, aux prédictions, mais concordantes quant à leur caractéristique d'être, pour la plupart, de simples généralisations de l'espérance d'utilité (voir ci-dessous).

### 2.2 *Théories du risque et espérance d'utilité généralisée*<sup>1</sup>

De nombreuses nouvelles théories du risque qui se développent peuvent être rattachées à l'approche de l'espérance d'utilité à condition de généraliser le principe et la forme de la fonction d'utilité. Elles ont comme origines, des données empiriques, la recherche d'axiomes plus généraux (plus faibles) ou différents, l'intuition à propos des choix risqués. Ces origines avaient un point de départ commun : elles faisaient suite à une violation observée, répétitive et consciente du principe de l'espérance d'utilité classique. Le premier contestataire de la théorie « de l'école américaine » et le premier observateur de ces violations est Maurice Allais (1953, 1979), qui par son célèbre paradoxe, portant sur une situation extrême de choix, vint contredire particulièrement l'axiome d'indépendance.

L'approche de Machina -section 2.2.1 – est une tentative, de tendance traditionnelle, de réconcilier non pas les axiomes mais le principe de l'espérance d'utilité avec les comportements observés.

Même si elles diffèrent par bien d'autres points, les autres théories abandonnent la forme classique de l'utilité en la remplaçant par une forme généralisée.

1. Cette section doit beaucoup à l'article de Weber et Camerer (1987), où le lecteur trouvera un développement beaucoup plus détaillé et complet.

Les approches diffèrent par les axiomes, la forme de l'utilité et le type de dépendance pris en compte. Toutes abandonnent donc l'axiome d'indépendance au moins dans sa forme restrictive et certaines abandonnent aussi la transitivité des choix, ce qui est plus discutable.

### 2.2.1 *L'espérance d'utilité locale de Machina*

Machina (1982a,b,1983,1987) adopte tous les axiomes de von Neumann et Morgenstern, excepté l'axiome d'indépendance. Ces axiomes sont suffisants pour construire une fonctionnelle de préférences  $V(F)$ , où  $F$  est la distribution cumulée  $F(x)$ . Il ajoute que cette fonctionnelle doit être lisse et différentiable.

Il développe en série  $V(F)$  au voisinage de la loterie représentée par  $F^*$ .  $u(x, F^*)$  est la fonction d'utilité locale représentant le comportement du décideur au voisinage de  $F^*$ , d'une façon approchée. En vertu du calcul différentiel, cette approximation de  $V(F)$  est valable dans ce voisinage, et donc pour des loteries proches de  $F^*$ , le décideur obéira encore à l'espérance d'utilité classique. Par contre des glissements importants de  $F$  changeront  $u(x, F)$ . Mais en tout point, le décideur se comportera comme s'il maximisait  $Eu$ . Mais évidemment la comparaison de loteries très différentes en probabilités imposera la révision de  $u(x)$ .

### 2.2.2 *Les modèles avec fonction d'utilité générale séparable ou pondérée*

#### i) *Fonction générale de préférence*

$Eu$  et  $Ev$  sont des cas particuliers d'une *fonction générale de préférence* :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n f(x_i, p_i) \quad (\text{u.2})$$

qui est *séparable en ses arguments*, ou en certains d'entr'eux. Les cas particuliers sont les modèles suivants, où  $f(x_i, p_i)$  se simplifie progressivement :

$$f(x_i, p_i) = u(x_i) \cdot w(p_1, \dots, p_i) \quad \text{modèle RDEU} \quad (\text{u.3})$$

$$f(x_i, p_i) = u(x_i) \cdot w(p_i) \quad \text{prospect theory} \quad (\text{u.4})$$

$$f(x_i, p_i) = x_i \cdot w(p_i) \quad \text{Handa (1977)} \quad (\text{u.5})$$

$$f(x_i, p_i) = u(x_i) \cdot p_i \quad \text{Eu classique} \quad (\text{u.6})$$

$$f(x_i, p_i) = x_i \cdot p_i \quad \text{Ev classique} \quad (\text{u.7})$$

Les modèles *pondérés* sont les suivants. La séparation n'y est pas assurée.

$$f(x_i, p_i) = (p_i w(x_i) u(x_i)) / \left( \sum_{i=1}^n p_i w(x_i) \right) \quad (\text{u.8})$$

modèle de Chew et McCrimmon (1979)

$$f(x_i, p_i) = (u(x_i) x(p_i)) / \left( \sum_{i=1}^n p_i w(p_i) \right) \quad (\text{u.9})$$

modèle de Karmarkar (1978)

On voit à partir des formules comment certains modèles englobent d'autres et ont tous comme cas particuliers *Eu* ou *Ev* classiques.

ii) *Les effets pervers et la PROSPECT THEORY de Kahneman et Tversky (1979)*

Des expériences psychologiques ont permis de mettre en évidence au moins huit « effets pervers » par rapport à la théorie de l'utilité classique.

- 1) *l'effet de quantité*: c'est l'effet de la loi de l'utilité marshallienne marginale décroissante qui veut qu'une saturation progressive de la préférence pour un bien apparaisse quand la quantité de ce bien augmente. Par cet effet, Dyer et Sarin (1982) ont révélé que *l'attitude au risque doit être relative à l'attitude à la valeur dans le certain*. En fait l'utilité de VN-M n'est pas une simple fonction  $u(x)$ , car elle masque une double transformation du « bien »  $x$ , à savoir l'intensité de préférence variable sur des différences premières de  $x$ , traduite dans une fonction  $v(x)$ , construite dans le certain, et l'attitude réelle vis-à-vis du risque  $u(v)$ , dénommée aussi *attitude relative au risque*. Ainsi, en général, la loi marshallienne de l'utilité (au sens de valeur) décroissante fait qu'on surestime la véritable aversion au risque, voire qu'on peut masquer une neutralité ou une légère préférence au risque.
- 2) *l'effet du temps*, mis en évidence par Gafni et Torrance (1984), il peut renforcer l'effet de quantité par un phénomène d'*impatience*. « Un fruit mangé aujourd'hui vaut plus qu'un fruit mangé demain ».
- 3) *l'effet de certitude* est une différence de comportement dans le certain et l'incertain.
- 4) *l'effet d'aversion à l'ambiguïté ou encore de préférence pour l'information*, cet effet explique des contradictions à l'approche bayésienne des choix.

- 5) *l'effet de référence*. Les décideurs se fixent des points de repère ou références (par exemple le *statu quo*, la valeur zéro, un seuil de rentabilité etc...) par rapport auxquelles ils évaluent les situations de choix et les projets incertains. Il est par exemple manifeste d'observer des renversements de comportements face aux gains et aux pertes (*mirror effect*).
- 6) *l'effet de présentation* de la situation de choix est très important sur les sujets.
- 7) *l'effet multivarié* est dû à l'existence implicite d'attributs cachés joints à l'attribut unique sur lequel on estime une utilité  $u(x)$ .
- 8) *les effets de regrets, de désappointement ou de soulagement* sont liés à la résolution de l'incertitude sur une loterie qu'on n'a pas choisie.

Tous ces effets ont produit des théories explicatives, dont la plus importante est sans doute la *prospect theory* de Kahneman et Tversky. Ces derniers se sont intéressés aux effets de quantité, de certitude, de référence et de présentation. La fonction  $u(x)$  de ces auteurs est en fait une fonction de valeur construite par exemple autour de la valeur zéro comme référence. L'attitude au risque se traduit dans une fonction  $w(p)$  non linéaire de la probabilité. En 0 et 1,  $w(p)$  est discontinue pour tenir compte de l'effet de certitude.

Il est évident que le modèle de Karmarkar n'est qu'une variante pondérée du modèle de Kahneman et Tversky. Ces auteurs présentent un autre ensemble d'axiomes que ceux de *Eu* pour soutenir leur modèle descriptif.

iii) *Le modèle d'espérance d'utilité pondérée (WEU) de Chew et McCrimmon*

*Le modèle d'espérance d'utilité pondérée (WEU) de Chew et McCrimmon* est linéaire pondéré en probabilités, avec des poids  $w(x_i)$  qui sont interprétés par Weber et Camerer (1987) comme la « *concevabilité* » du résultat attendu. On peut le considérer comme un modèle « correctif » de *Eu*, quand il est présenté sous la forme du ratio suivant :

$$WEU(X) = \frac{V(X)}{W(X)} = \frac{\sum p_i v(x_i)}{\sum p_i w(x_i)} \text{ où } v(x_i) = u(x_i) \cdot w(x_i) \quad (u.10)$$

iv) *La propriété de non-linéarité en probabilités*

*La propriété de non-linéarité en probabilités* des modèles (u.3,4,5,8,9,10) entraîne une violation de la dominance stochastique (voir Weber et Camerer, 1987).

Les modèles présentés en 2.2.3 remédient à cette lacune.

### 2.2.3 Les modèles dépendants du rang (RDEU) ou de la loterie LDEU

- i) Les modèles RDEU dépendent du rang de la probabilité par leur fonction  $w(p_1, \dots, p_i)$ . Un cas particulier intéressant est la *théorie duale de l'Eu* de Yaari (1987), où  $u(x) = x$ , et où la fonction  $w(p_1, \dots, p_i)$  prend entièrement en compte l'attitude vis-à-vis du risque.
- ii) Les modèles LDEU, dépendant de la loterie, reposent sur des axiomes de choix obligé, de transitivité, de continuité et de dominance stochastique.

### 2.2.4 Les modèles incorporant le regret ou le soulagement du décideur

- i) Bell (1982, 1985) avait mis en évidence une composante « pathologique » de l'aversion au risque en observant un regret différent selon qu'on résolvait ou non une loterie non choisie dans une situation de choix.

La théorie des regrets de Bell établit la valeur d'une loterie  $X$ , en ajoutant à la valeur du résultat  $x_i$ , un montant  $D$  de désappointement fonction de la différence entre la valeur observée  $v(x_i)$  et la valeur de la loterie  $v^*$ . La mesure de risque  $\gamma$  est du type de la mesure généralisée de Stone (1973).

- ii) Fishburn (1982, 1984a), développe sa *théorie de l'utilité bilinéaire Skew Symmetrix* (SSB). La théorie des regrets et la théorie SSB de Fishburn se ressemblent. Elles travaillent toutes deux sur des comparaisons paires de loteries pour mettre en évidence les regrets du décideur.

## 2.3 Jugement provisoire sur les théories de l'utilité généralisée

Peu de ces théories récentes ont déjà été testées. Les quelques tests existants ne sont pas nécessairement convaincants dans la mesure où ils ne font que vérifier des comportements ou des effets pour lesquels ils avaient été justement modélisés. Il est donc trop tôt pour juger ces nombreuses théories du point de vue de leur pouvoir descriptif.

Comme le signalent très bien Weber et Camerer (1987), le pouvoir de conviction normatif de ces théories nouvelles dépend actuellement surtout de la séduction logique des axiomes utilisés et de leurs implications et de la séduction psychologique que peut produire leur représentation des préférences sous conditions de risque.

Dans l'état actuel des connaissances, on ne doit pas prédire un grand succès aux théories qui violent les axiomes de dominance stochastique ou de transitivité. L'axiome de continuité pose un réel problème, parce que s'il est archimédien, il entre par contre en conflit ouvert avec les comportements observés de recherche de cibles et de points de référence.

## 2.4 L'approche de pénalisation des écarts à une cible

### A. Le cas unidimensionnel

i) Stone (1973) a proposé la mesure de risque « généralisée » suivante :

$$r_{\alpha}(\gamma(F), \eta(F), F) \equiv \int_{-\infty}^{\gamma(F)} |x - \eta(F)|^{\alpha} dF(x) \quad (r.1)$$

où  $F(x) = P(\bar{x} \leq x)$  est la distribution cumulée sur la variable aléatoire  $\bar{x}$

$\gamma(F)$  = la limite supérieure de  $x$  (par exemple un fractile)

$\eta(F)$  = la cible *variable* (par exemple la moyenne)

$\alpha$  = le coefficient pondérateur des écarts à la cible.

Fishburn (1977) propose la mesure généralisée suivante :

$$\rho_{\alpha}(t, F) = \int_{-\infty}^t (t - x)^{\alpha} dF(x), \alpha \geq 0 \quad (r.2)$$

où  $t$  = la cible *fixe*.

Les deux mesures diffèrent essentiellement par le choix d'une cible fixe ou variable, mais aussi par la considération d'une cible « limite supérieure » chez Fishburn. On trouvera chez cet auteur les différents types de fonction d'utilité qui peuvent être associées à des cas particuliers de ces mesures. Cette association met en évidence les défauts de chaque mesure, si ces défauts sont mesurés en relation avec les axiomes de von Neumann et Morgenstern.

Ainsi l'axiome de continuité s'oppose à l'existence de discontinuités ou d'angles aigus (non lissité) de la fonction. L'approche bicritère (+E, -R) où on maximise E, l'espérance de valeur, et on minimise R, le risque, ne transforme la fonction d'utilité que si  $\alpha < 1$ .

Notons que  $\alpha$  est le degré de la mesure de risque, puisqu'il correspond au degré du polynôme de la fonction d'utilité associée à l'approche (E, R) lorsque  $\alpha$  est entier (Borch, 1969).

ii) *La littérature financière a privilégié la variance, et ses mesures dérivées, comme mesure de risque, et plus spécialement dans l'approche classique (+E, -V). De nombreuses critiques se sont élevées contre cette approche erronée. (Voir aussi Levy, 1992).*

D'abord l'arbitraire du choix de la variance parmi l'infinie variété des mesures de risque est évident. Ensuite, plus fondamentalement il est absurde de pénaliser les hauts rendements (au-dessus de la moyenne) comme les bas rendements. Markowitz (1959) déjà et Mao (1970) parmi d'autres, ont proposé de remplacer la variance par la semi-variance inférieure ( $S$ ), ce qui était déjà un progrès, mais au prix de complications algorithmiques pour déterminer la frontière efficiente des portefeuilles. Colson et Zeleny (1979, 1980) proposent d'adjoindre la semi-variance supérieure ( $S^*$ ) à maximiser, transformant l'approche  $(+E, -S)$  en approche tricritère  $(+E, -S, +S^*)$ , ce qui permet de valoriser les hauts rendements davantage que par la seule maximisation de  $E$ .

Nous reparlerons de ce point dans la section 3, en abordant la théorie bipolaire. Une dernière critique qu'on a adressée à l'approche  $(E, -V)$  est qu'elle ignore les autres moments de la distribution des rendements. Hormis pour le cas de la distribution normale définie par ses deux premiers moments, l'approche  $(E, -V)$  n'est donc qu'une approximation d'une approche multimoment. Certains auteurs ont alors introduit trois ou quatre moments; mais évidemment, la seule approche rigoureuse implique tous les moments. Or, une telle approche existe, c'est celle de la dominance stochastique, présentée ci-après.

### B. Le cas multidimensionnel

Beaucoup d'approches multicritères utilisent des cibles multidimensionnelles et une fonction de pénalisation des écarts à ces cibles.

Par exemple, la *chance constrained programming* (CCP) de Charnes et Cooper (1959) peut s'écrire

$$Z^C = \min_d \left\{ E_c [cd] \mid P(a_i d \geq b_i), i = 1 \text{ à } m; d \in D \right\}$$

où  $d$  est le vecteur de variables décisionnelles défini dans  $D$ ,  $c$  le vecteur de pénalités, et les  $m$  contraintes sont exprimées sous forme de probabilités de dépassement des disponibilités  $b_i$ . On voit ici que les mesures de risque sont de degré  $\alpha = 0$ . D'autres approches font intervenir la variance des objectifs. Dans le cas dynamique, la programmation stochastique avec recours (SPR) fait aussi appel à une fonction de perte. (Hogan, Morris et Thomson, 1981).

(On pourra approfondir ce sujet dans nos articles : Colson, 1983, 1985).



## 2.5 L'approche de la dominance stochastique (SD)

### i) Génération de la règle de dominance stochastique du premier ordre (FSD)

Pour fixer les idées, considérons que  $x$  est le rendement aléatoire en fin de période d'investissement. L'investisseur peut se fixer une cible financière  $t$ . Si  $t$  est le seuil de ruine, il voudra minimiser sa probabilité de ruine  $F(t)$  où  $t$  est devenu ce seuil. Une telle approche par cible unique est peu rigoureuse puisqu'elle ignore toutes les autres cibles possibles. D'où l'idée de balayer avec la cible  $t$ , l'ensemble des valeurs possibles de  $x$ .

Soient deux projets  $A$  et  $B$  dont les distributions cumulées de rendement sont :

$$F_A(x) \equiv P_A(\bar{x} \leq x) \text{ et } F_B(x) \equiv P_B(\bar{x} \leq x).$$

La règle *First Stochastic Dominance* (FSD) s'énonce :

$$A \succ_2 B \text{ si et seulement si } \begin{cases} F_A(x) \leq F_B(x), \forall x \\ F_A(x) < F_B(x), \text{ pour au moins une valeur de } x \end{cases}$$

Intuitivement  $A$  domine stochastiquement  $B$  si toute probabilité de ne pas dépasser une cible fixée quelconque est inférieure ou égale pour le projet  $A$  par rapport à  $B$ .

### ii) Les règles de dominance stochastique et leurs liens avec les autres approches

La règle de dominance stochastique du deuxième ordre (SSD) s'énonce :

$$A \succ_2 B \text{ si et seulement si } \begin{cases} G_A(y) \leq G_B(y), \forall y \\ G_A(y) < G_B(y), \text{ pour au moins une valeur de } y \end{cases}$$

$$\text{avec } G(y) = \int_{-\infty}^y F(x) dx.$$

On trouvera dans Bawa (1975), ou Whitmore et Findlay (1978), par exemple, les théorèmes montrant la correspondance biunivoque entre les règles de dominance du 1<sup>o</sup> ordre (FSD), 2<sup>o</sup> ordre (SSD) ou 3<sup>o</sup> ordre (TSD) et la règle du maximum de *Eu* pour certaines classes de fonctions d'utilité, et partant certains comportements généraux des décideurs. L'essentiel est que la règle FSD apparaît comme une exigence minimale de comportement : tout investisseur qui désire toujours plus de richesse doit s'y conformer rationnellement; la règle SSD y ajoute l'aversion généralisée au risque et ne correspond donc plus à l'unanimité des comportements.

iii) *Dominance stochastique convexe, et limites de l'approche*

On aura observé que les règles SD supposent des comparaisons pairées de distributions et sont très exigeantes en données (tous les fractiles de la distribution lorsqu'on ne peut établir une correspondance avec l'espace des paramètres ou moments, comme pour la normale par exemple). En outre, elles produisent des ensembles de solutions efficaces très grands et donc peu utiles. Enfin, certains projets non dominés simplement peuvent l'être par une combinaison convexe, c'est la dominance stochastique convexe de Fishburn (1975).

On peut conclure en disant que la règle SD du premier ordre reste une propriété générale souhaitable dans les modélisations du risque.

iv) *Dominance stochastique et espérance d'utilité*

Depuis 1980, il y a eu une véritable explosion de papiers dans ce domaine. On trouvera un recueil fort complet des relations entre SD et *Eu* chez Haim Levy (1992). On observe avec cet auteur que les trois premières règles SD sont davantage utilisées en finance, depuis qu'on a pu définir FSDR, SSDR et TSDR qui sont les 3 règles applicables lorsqu'on a un actif sans risque dans les portefeuilles à comparer.

Chez Zaras (1989) et Martel et Zaras (1990), on trouvera des règles valables pour la préférences au risque, ce qui intéresse la section suivante.

### 3. LA THÉORIE BIPOLAIRE DU RISQUE

L'objectif de cette section est d'abord de faire plaisir à l'auteur de ces lignes, mais aussi de mettre en lumière une nouvelle théorie du risque à prémisses psychologiques qui peut avoir des implications importantes en modélisation des préférences face au risque, en théorie financière, en théorie des décisions sous information incomplète.

Cette théorie présente, dans le cas statique, des développements déjà bien établis (Colson, 1981; Colson et Zeleny, 1979, 1980) et des extensions possibles dans le cas dynamique (Colson, 1986). En outre, elle aborde l'approche vectorielle du risque, en permettant la généralisation de certains travaux de Fishburn (1977, 1984b) en analyse du risque « unipolaire ». (Voir aussi Zaras, 1989 et Martel et Zaras, 1990).

Elle peut enfin donner un fondement théorique supplémentaire aux quelques tentatives, non encore publiées, d'une approche tricritère de type bipolaire « Maximum  $E$ , Minimum semi-variance inférieure  $S$ , Maximum semi-variance supérieure  $S^*$ . (Voir par exemple : Levkoff, 1982; Vljacic, 1991). Nous désignerons par la suite cette approche par  $(+E, -S, +S^*)$ .

### 3.1 Origines financières et prémisses psychologiques de la théorie bipolaire

- i) En 1976, Milan Zeleny nous faisait parvenir une proposition d'article, où il posait les bases d'un modèle pragmatique en finance : le modèle *PROSPECT RANKING VECTOR* (PRV). En travaillant ensemble, nous constatons les points suivants (voir aussi Zeleny, 1978) :
- 1) l'approche traditionnelle Espérance Variance (+E,-V) était incorrecte; elle constituait tout au plus une approximation d'un modèle multimoment, du moins si on exclut les cas exceptionnels où les distributions sont normales et, ou la fonction d'utilité est quadratique,
  - 2) multiplier jusqu'à l'infini le nombre de moments pour tenir compte de toutes les distributions de rendements conduisait à faire disparaître la mesure de risque pour la remplacer par l'approche de dominance stochastique,
  - 3) cette approche SD théoriquement séduisante se révélait un outil décisionnel impraticable,
  - 4) l'approche (+E,-V) restait par contre un outil fort employé,
  - 5) les investisseurs parlaient de *downside risk* et de *upside potential* en matière de cours boursiers.

En vue de concilier l'usage des pratiques avec une approche théoriquement fondée, il suggérait de ranger les projets incertains, dont on connaissait seulement la moyenne et la variance des rendements, en utilisant un vecteur *PRV*; dont les caractéristiques sont les suivantes :

- 1) *PRV* est un vecteur de trois composantes : la moyenne des rendements, *E*, et deux composantes de risque, *downside* et *upside*.
- 2) *PRV<sub>1</sub>*, la première composante de risque, envisage le côté *pessimiste* de l'investisseur, mais aussi un côté *volontariste* : le choix le moins risqué parmi un ensemble de projets indépendants doit minimiser la probabilité de ne pas atteindre un seuil de rendement (*return*),  $t_m$ , qui est le supremum d'un rendement minimal souhaité,  $r_m$ , et la valeur maximale,  $L$ , des rendements minima escomptés pour chacun des projets.
- 3) *PRV<sub>2</sub>* est la moyenne et *PRV<sub>3</sub>* est la seconde composante de risque, qui capte le côté optimiste du décideur, en mesurant sa crainte de manquer de bonnes opportunités de gain. Selon cette composante, le choix le moins risqué doit minimiser la probabilité de ne pas atteindre une cible supérieure,  $S$ , qui est le maximum des rendements maxima escomptés pour chacun des projets.
- 4) L'approche *PRV* est aussi approprié pour les rendements définis sur des intervalles  $(-\infty, \infty)$ , à condition de considérer des cibles  $t_m$  et  $S$  finies.

La formulation analytique est la suivante pour 2 projets  $j$  et  $l$  de rendements  $x_j, x_b$  de moyennes  $E_j, E_b$  et d'écart-type  $\sigma_j, \sigma_b$  dans un ensemble de  $n$  projets :

$$j \succ l \text{ selon PRV } \begin{cases} j \succeq l \text{ selon PRV}_1 \Leftrightarrow F_j(t_m) \leq F_l(t_m) \\ j \succeq l \text{ selon PRV}_2 \Leftrightarrow E_j \geq E_m \\ j \succeq l \text{ selon PRV}_3 \Leftrightarrow F_j(S) \leq F_l(S) \\ \text{au moins une inégalité stricte.} \end{cases}$$

$$F_j(t_m) = P(x_j < t_m), F_j(S) = P(x_j < S).$$

$$S = \max_i (E_i + k\sigma_i), t_m = \sup \left[ r_m, t_m = \max_i (E_i - k'\sigma_i) \right], i = 1 \text{ à } n$$

Dans cette formulation,  $k$  et  $k'$  sont des paramètres fixés par l'investisseur en accord avec son degré de confiance dans des rendements respectivement hauts et bas. Ce degré est donc un mélange réaliste entre ses degrés respectifs d'optimisme et de pessimisme d'une part, et ses degrés respectifs de préférence et d'aversion au risque. Cependant l'attitude au risque est mieux prise en compte dans les poids respectifs qu'il accordera aux deux composantes de risque dans une approche multicritère. On notera aussi le degré zéro de cette mesure de risque vectorielle, si on veut se référer à une éventuelle fonction d'utilité.

Le réalisme de ce modèle PRV est soutenu par quatre arguments. D'abord, le choix de l'investisseur dépend effectivement de tous les projets en présence et de la situation de l'investisseur, cette dernière étant prise en compte par le seuil volontariste  $r_m$ . Ensuite, le modèle permet de tenir compte du *niveau réel d'information* sur les distributions de rendements (voir Colson et Zeleny, 1979). En troisième lieu, le modèle obéit à l'hypothèse bipolaire exprimée ci-dessous. Enfin il est en accord avec les hypothèses minimales de comportement selon lesquelles un investisseur préfère plus de richesse à moins de richesse (règle FSD), mais aussi qu'il espère des gains spéculatifs tout en craignant des rendements pauvres ou des pertes.

ii) Nous écartant de cette approche à vocation conciliatoire entre pratique et théorie, il nous est apparu qu'une théorie pouvait se construire, dont le PRV serait un cas d'application. La théorie bipolaire statique du risque repose sur l'hypothèse psychologique suivante :

*« L'attitude de toute personne face au risque est caractérisée ex ante (= avant la décision) par un conflit mental entre deux pôles opposés : le POLE CONSERVATEUR pousse le décideur à s'orienter vers les choix les plus prudents, tandis que le POLE SPÉCULATEUR invite ce dernier à tenter des choix audacieux ».*

Il découle de cette hypothèse, que tout décideur face au risque aurait *simultanément et ex ante*, et non tour à tour ou en fonction du contexte, une aversion et une préférence au risque. Ceci repose aussi sur l'observation que les personnes sont à la fois attirées par les perspectives de gain ou de résultats favorables et effrayées de subir les pertes ou les désavantages de leur décision. L'existence de ce conflit interne préalable à la décision peut être observée chez les hésitants qui postposent leur décision pour retarder la résolution de ce conflit. *Ex post* (après la décision), une seule attitude au risque, aversion ou préférence, se révèle dans le choix effectué.

Notre théorie n'est donc pas contradictoire à d'autres théories qui ignorent ce conflit. Elle remonte simplement en amont de la décision et est susceptible d'éclairer certains comportements observés, tels les effets de renversement de préférences, et les effets de référence à des cibles.

### 3.2 Principales implications de la théorie bipolaire statique en finance

#### i) Une espérance d'utilité bipolaire

$W_1$  est la richesse terminale en fin de période de moyenne  $\bar{W}_1$  et on fait l'hypothèse bipolaire :

$$u \in U_B \text{ où } U_B \text{ est la classe des fonctions d'utilité bipolaire telle que} \\ u \in U_A \text{ pour tout } W_1 \leq \bar{W}_1 \text{ et } u \in U_P \text{ pour tout } W_1 > \bar{W}_1$$

où  $U_A$  et  $U_P$  sont les classes des fonctions d'utilités  $u_A$  et  $u_P$  compatibles respectivement avec l'aversion et la préférence au risque. On peut alors obtenir  $Eu$  pour une fonction bipolaire :

$$E[u_B(W_1)] = E_{-\infty}^{\bar{W}_1} [u_A(W_1)] + E_{\bar{W}_1}^{\infty} [u_B(W_1)].$$

Cette espérance appliquée à un ensemble de projets ou de portefeuilles permet de choisir un portefeuille ou projet qui sera conservateur ou spéculateur selon que la composante d'aversion l'emportera ou non sur la composante spéculative. (Colson, 1981).

Levkoff (1982) construit la fonction bipolaire en référence au modèle tricritère (+E, -S, + S\*), à savoir, si  $x$  est le rendement du portefeuille :

$$u_B(x) = \begin{cases} x - w^- S^-, & \text{pour } x \leq c \\ x + w^+ S^+, & \text{pour } x \geq c \end{cases}$$

$$\text{avec } S^- = E \left[ \left( \min \{x - h, 0\} \right)^2 \right], \text{ la semi-variance inférieure}$$

$$\text{avec } S^+ = E \left[ \left( \max \{x - h, 0\} \right)^2 \right], \text{ la semi-variance supérieure}$$

$c$  peut être une cible fixe (zéro ou le rendement de l'actif sans risque, par exemple) ou une cible variable, le plus souvent égale à la moyenne  $E$ .

Dans ce cas, l'espérance d'utilité bipolaire devient :

$$Eu_B(x) = E - w^- S^- + w^+ S^+ \quad (\text{b.1})$$

Cette expression montre clairement la pondération ( $w^-$ ,  $w^+$ ) à effectuer par le décideur entre sa crainte des bas rendements, mesurée par  $S^-$ , et son désir des hauts rendements, mesuré par le « potentiel attractif » que constitue  $S^+$ .

À cette approche correspond une fonction d'utilité composée de deux morceaux quadratiques, concave en-dessous de la cible  $c$  et convexe au-dessus. Pour rester finie, cette  $Eu$  doit porter sur des rendements finis vers le haut, ce qui est une exigence raisonnable en pratique.

Un cas particulier intéressant de (b.1) est la formule (b.2) :

$$Eu_B(x) = E - w^- \frac{V}{2} + w^+ \frac{V}{2} = E - \frac{w^- - w^+}{2} V \quad (\text{b.2})$$

qui apparaît lorsque la cible est  $E$  et les distributions de rendements sont symétriques. Dans ce cas, les semi-variances sont égales à la demi-variance. Nous en discutons ci-dessous.

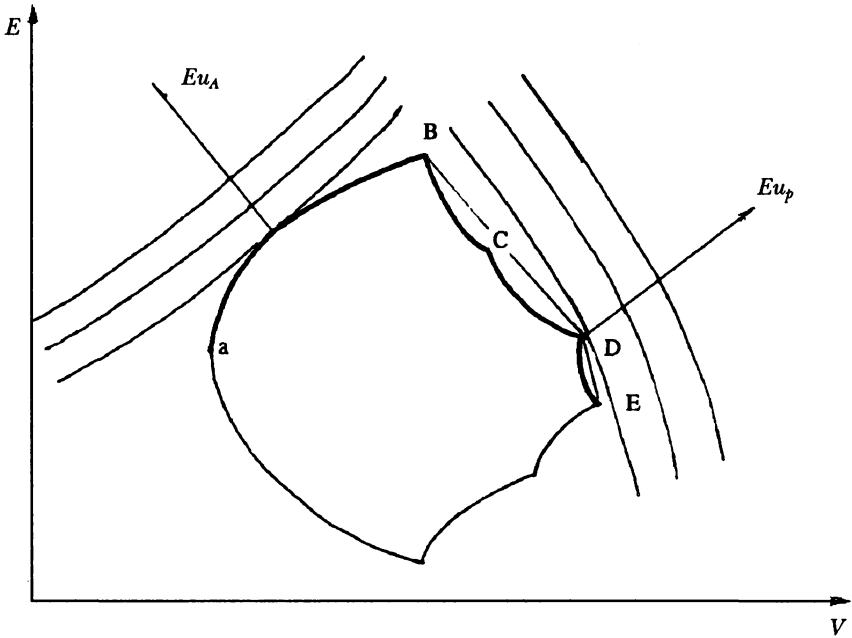
## ii) Une approche (+E, -V, +V) en sélection de portefeuille

La géométrie particulière (figure 1) de la partie droite de la frontière de l'ensemble d'opportunité des portefeuilles décrits dans l'espace des critères ( $E, V$ ) ne permet pas d'atteindre tous les portefeuilles de cette frontière avec une approche d'utilité du type b.2. Il faut alors recourir à une technique multicritère (+E, -V, +V).

Le paradoxe surgit ici : on doit à la fois minimiser et maximiser la variance.

Ce paradoxe s'explique aisément dans la théorie bipolaire puisque la variance est à la fois source de revenus spéculatifs et de pertes potentielles. Le fait d'ajouter l'espérance à ces deux critères opposés permet évidemment d'obtenir la frontière efficiente totale de Bawa (1977) comme étant la juxtaposition de la frontière efficiente de Markowitz-Tobin (arc aB) et de la frontière efficiente de droite : BCDE. (Voir figure 1 ci-dessous où la frontière de Bawa est dessinée en traits renforcés)

FIGURE 1

APPROCHE BIPOLAIRE EN SÉLECTION DE PORTEFEUILLE DANS L'ESPACE  $(E, V)$ .

SOURCE : Extrait de G. Colson (1981, p.355)

En résumant Colson (1981, p.355), on peut tirer les conclusions suivantes en relation avec la figure 1 :

- a) Comme la frontière efficiente de gauche est convexe, cette frontière n'est efficiente que pour les investisseurs qui ont une aversion généralisée au risque. En effet, les courbes d'indifférence pour une fonction d'utilité concave sont convexes et le portefeuille optimal sera situé sur l'arc aB de cette figure. En conséquence, la maximisation de  $Eu_A$  ou une approche bicritère  $(+E, -V)$  permettra le choix du portefeuille optimal sur cette frontière. Le choix entre les deux approches dépend du degré d'information sur la fonction d'utilité.
- b) Pour chaque investisseur ayant une préférence au risque, l'approche de la maximisation de  $Eu_p$  ne pourra produire qu'un portefeuille spécialisé d'une seule action correspondant à un des sommets de l'enveloppe linéaire convexe de la frontière efficiente de Bawa, soit les sommets B, D ou E de la figure 1. En effet, les courbes d'indifférence de  $Eu_p$  tournent leur convexité dans le sens opposé à celui des arcs BC, CD, DE de la frontière. Ici par contre, l'approche bicritère  $(+E, +V)$  peut produire n'importe quel portefeuille de la partie droite BCDE de cette frontière de Bawa.

- c) Or tout point de la frontière de Bawa correspond à un des investisseurs qui cherche simplement à maximiser son espérance de richesse, quelle que soit son attitude au risque.

Nous avons donc trouvé des points inaccessibles par une approche *Eu* avec attitude unipolaire au risque, mais bien accessibles par une approche multicritère. Cette dernière approche (+E,-V,+V) permet d'engendrer toute la frontière efficace pour tous les investisseurs qui désirent simplement plus de richesse.

iii) *Une approche (+E, -S, +S<sup>\*</sup>) en sélection de portefeuilles*

Il est cependant plus intéressant de décomposer la variance en la semi-variance inférieure à la moyenne  $S$ , et la semi-variance supérieure  $S^*$ . La maximisation des seuls critères ( $E, S^*$ ) produirait des portefeuilles spéculateurs et l'approche (+E, -S) fournit les portefeuilles conservateurs.

Levkoff (1982), et Vlajic (1991) sous notre direction, ont développé le modèle CAPM (*capital asset pricing model*) selon cette approche en arrivant à des conclusions théoriques intéressantes :

- la frontière efficace des portefeuilles devient une surface, de même que le *capital market line* devient le *capital market plane*, où apparaît « une droite tangente » de « portefeuilles de marchés » fonction de la variation possible des pondérations ( $w, w^*$ ) des attitudes conservatrice et spéculative.
- le rendement espéré d'équilibre pour un actif  $i$  se formule comme suit :

$$E(x_i) = x_f + \beta_i^+ E[\max\{0, (x_m - x_f)\}] + \beta_i^- E[\min\{0, (x_m - x_f)\}]$$

$$\text{avec } \beta_i^+ = \frac{CSV^+(x_m, x_i)}{S^+(x_m)} \text{ et } \beta_i^- = \frac{CSV^-(x_m, x_i)}{S^-(x_m)}$$

Les cosemi-variances  $CSV^+$  et  $CSV^-$  et les semi-variances  $y$  sont définies par rapport à la cible commune  $c = x_f$ , soit le rendement de l'actif sans risque.  $x_m$  représente le rendement de l'indice de marché. Ces modèles ont permis des tests empiriques selon la méthodologie de Fama et Mac Beth reprise dans Levy et Sarnat (1984, p. 491 et suivantes). Selon le premier auteur, le modèle ( $E, -S, S^*$ ) serait nettement supérieur aux modèles (+E, -V) et (+E, -S). Avec Vlajic (1991), nous avons obtenu des résultats moins probants, sauf que nous confirmons que le *pouvoir explicatif du modèle bipolaire* semble beaucoup plus élevé sur la base de nos tests, que celui des deux autres modèles classiques.



Si ces résultats doivent se confirmer, ce serait une belle preuve de l'apport supplémentaire de la théorie bipolaire à l'explication du comportement des marchés boursiers, et donc de la supériorité de l'approche vectorielle du risque.

iv) *L'approche PRV appliquée à la sélection de portefeuilles*

Cette approche est compatible avec la définition de cibles supérieure et inférieure par le décideur, dans un contexte d'information limitée sur les distributions de rendements. Appliquée à l'analyse (EV) de portefeuilles, elle permet de découvrir la frontière de portefeuilles *probablement efficaces*, avec une probabilité d'efficacité dépendant du degré d'information; mais aussi par la modulation des cibles, elle réduit l'ensemble admissible des portefeuilles selon les souhaits du décideur.

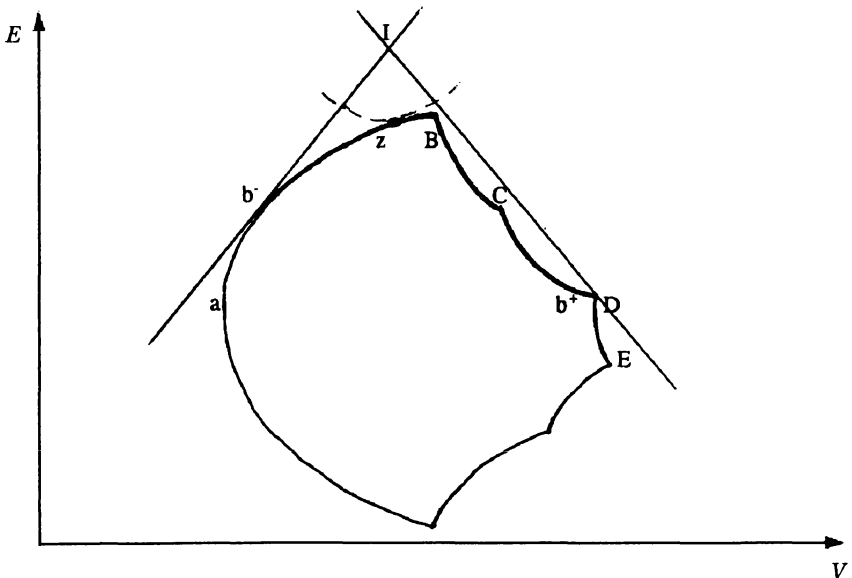
En effet, si nous définissons le modèle tricritère (+L, +E, +S), où

$L = E - k'\sigma$  est la fonction proposée par Baumol (1963)

$S = E + k\sigma$  est une fonction correspondante pour un pôle spéculateur,

on peut observer sur la figure 2, tirée de (Colson, 1981), que la frontière efficiente totale (en traits renforcés) est réduite dans la mesure où  $k$  et  $k'$  ont des valeurs finies. Sur cette figure,  $I$  est l'idéal des deux fonctions représentées et  $z$  le portefeuille le plus proche au sens euclidien.

FIGURE 2  
RÉDUCTION DE L'ENSEMBLE NON DOMINÉ :  $b'BCDb^+$



Il faut enfin observer que la frontière efficiente n'est plus que probable, puisque les distributions de rendement ne sont connues que par leurs moyennes et variances.

v) *L'analyse moyenne-vecteur de risques et la théorie du risque pur*

L'analyse (+E, -R) a été illustrée abondamment en finance. Fishburn (1977) par exemple, a proposé un modèle  $\alpha$ -t, où la mesure de risque utilisée est donnée par (r.2). Colson (1981) montre comment généraliser ce modèle dans l'approche bipolaire. Notons que l'approche de Fishburn, qu'il a axiomatisée en (1984b) correspond à une attitude unipolaire conservatrice volontaire, puisque cet auteur désirait construire une théorie du *risque pur*.

L'analyse (+E, -R, -R<sup>t</sup>) vise à maximiser l'espérance et à minimiser une mesure vectorielle bipolaire du risque. On peut démontrer aisément qu'elle est congruante avec l'approche de l'espérance d'utilité, en généralisant les démonstrations de Fishburn (1977) – voir Colson (1982).

On trouvera dans Colson (1987) les différentes formes des fonctions d'utilité bipolaires en relation avec les valeurs des paramètres d'un modèle généralisant les travaux de Fishburn (1977).

3.3 *Quelques implications de la théorie bipolaire en théorie des décisions et en modélisation des préférences face au risque*

- i) Sous l'influence excessive d'un pôle, une personne peut devenir soit extrêmement pessimiste, soit extrêmement optimiste. Dans le cadre de la théorie des décisions, le critère du *Maximin* de Wald serait adopté (par exemple dans un jeu hostile) sous la seule influence d'un pôle, tandis que le critère du *Maximax* conviendrait à l'autre influence exclusive. Ainsi, le critère de Hurwicz peut être considéré comme un critère de choix bipolaire dans la mesure où il exige une assertion des poids attribués par le décideur à ces deux critères unipolaires.
- ii) La modélisation des attitudes face au risque par la théorie bipolaire statique fournirait une explication élégante et de plus dynamique des glissements d'attitudes fondamentales de l'aversion vers la préférence en raison du contexte décisionnel ou par suite de l'effet de référence, bien pris en compte par cette théorie. La théorie dynamique, encore dans l'enfance (Colson, 1986) offrira des outils supplémentaires pour étudier la stabilité des processus décisionnels face au risque.

3.4 *Conclusions et statut actuel de la théorie bipolaire*

Il semblerait que cette théorie n'a encore attiré l'attention que des Européens. Un premier travail d'application de D. Langen (1989) fait apparaître son utilité dans le cadre d'un modèle de décision multiobjectif

pour la gestion bilantaire d'une banque allemande. Si on peut se fier au travail de Vlajcic (1991), son application au CAPM expliquerait mieux le comportement de l'investisseur en prenant en compte aussi son comportement parfois très spéculatif.

On ne peut classer cette théorie comme une généralisation de l'approche *Eu*, bien que des théorèmes de congruence existent. En fait, elle utilise, lorsque nécessaire, les trois approches principales du risque, mais également l'approche multicritère. Du point de vue axiomatique, l'approche PRV viole l'axiome de continuité – le passage du certain à l'incertain implique une discontinuité (Colson et Zeleny, 1979) – et celui d'indépendance mais est compatible avec la dominance stochastique SD. À notre avis la théorie bipolaire est assez souple pour s'adapter à différents types d'axiomes, mais aucune étude n'a été faite dans ce sens. Nous pouvons cependant dire que la théorie bipolaire est compatible avec FSD, mais pas avec SSD, puisqu'en cas de congruence avec le modèle *Eu*, elle propose des fonctions d'utilité semi-concave, semi-convexe mais croissantes. Ce dernier point est discuté par Zaras (1989).

#### CONCLUSION

Prenons-nous assez de risque dans les théories du risque ? Nous n'avons pas fait le tour des théories du risque, tant s'en faut. Au vu de l'exploration élémentaire abordée, dont les limites sont assez arbitraires, il nous apparaît que les théories du risque, en nombre croissant avec la disparition du statut privilégié de l'espérance d'utilité de von Neumann-Morgenstern, ne modélisent pas un assez grand nombre de facteurs ou de composantes de risque.

Du côté des praticiens, l'attente est évidente mais il existe aussi une certaine ignorance de techniques récentes d'analyse du risque, ce qui finalement n'étonne personne vu les préoccupations souvent divergentes des praticiens et des théoriciens du risque.

À cet égard, le paradigme multicritère nous apparaît bien utile pour traiter pragmatiquement les problèmes de décision à risques multiples, même si on s'écarte alors d'une théorie unifiante du risque telle qu'on l'espérait avant son explosion en approches théoriques multiples.

## BIBLIOGRAPHIE

- ALLAIS, M. (1953), « Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : Critique des postulats et axiomes de l'école américaine », *Econometrica*, 21, 4 : 503-546.
- ALLAIS, M. (1979), « The Foundation of a Positive Theory of Choice Involving Risk and a Criticism of the Postulates and Axioms of the American School » in ALLAIS, M., et D. HAGEN (eds), *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*, Reidel, Dordrecht : 27-145.
- ALLAIS, M. (1979), « The So-called Allais Paradox and Rational Decisions under Uncertainty » in ALLAIS, M., et D. HAGEN (eds), *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*, Reidel, Dordrecht : 437-699.
- BAUMOL, W.J. (1963), « An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection », *Management Science*, 10 : 175-182.
- BAWA, V.S. (1975), « Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects », *Journal of Financial Economics*, 2 : 95-121.
- BAWA, V.S. (1977), « Mathematical Programming of Admissible Portfolios », *Management Science*, 22 : 779-785.
- BEARD, R.E., T. PENTIKAINEN et E. PERSONEN (1990), *Risk Theory, the Stochastic Basis of Insurance*, Chapman and Hall, London.
- BELL, D.E. (1982), « Regret in Decision Making Under Uncertainty », *Oper. Res.*, 30 : 961-981.
- BELL, D.E. (1985), « Disappointment in Decision Making Under Uncertainty », *Oper. Res.*, 33 : 1-27.
- BERNOULLI, D. (1738, 1954), « Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis », *Comments Acad. Sci. Imper. Petropolitanae*, 5 : 175-192, Translated by Sommer, L. (1954), *Econometrica*, 22 : 23-36.
- BORCH, K. (1969), « A Note on Uncertainty and Indifference Curves », *Review of Economic Studies*, 36 : 150-160.
- CHARNES, A., et W. COOPER (1959), « Chance Constrained Programming », *Management Science* : 73-79.
- CHEW, S.H., et L.G. EPSTEIN (1990), « Nonexpected Utility Preferences in a Temporal Framework with an Application to Consumption-Savings Behaviour », *Journal of Economic Theory*, 50 : 54-81.
- CHEW, S.H., E. KARNI et Z. SAFRA (1987), « Risk Aversion in the Theory of Expected Utility with Rank Dependent Probabilities », *Journal of Economic Theory*, 42 : 370-381.
- CHEW, S.H., et K.R. MCCRIMON (1979), « Alpha-Nu Choice Theory : A Generalization of Expected Utility Theory », *Working Paper n° 669*, Faculty of Commerce and Business Administration, University of British Columbia, Vancouver.

- CHEW, S.H., et K.R. MACCRIMON (1979), « Alpha Utility, Lottery Composition and the Allais Paradox », *Working Paper* n° 686, Faculty of Commerce and Business Administration, University of British Columbia, Vancouver.
- CHEW, S.H., et W.S. WALLER (1986), « Empirical Tests of Weighted Utility Theory », *Journal of Math. Psychol.*, 30 : 55-72.
- COLSON, G. (1981), « Toward a Bipolar Theory of Risk », *EJOR* 6, 4 : 352-359.
- COLSON, G. (1982), *Contributions à l'étude des mesures d'information et de risque (Applications en sélection des investissements)*, Ph. D. Thesis, Université de Liège.
- COLSON, G. (1983), « Risque et MCDM », *Foundations of Control Engineering*, 8, (3-4) : 131-153.
- COLSON, G. (1985), « Theories of Risk and MCDM », in FANDEL and SPRONK (eds.) : *Multiple Criteria Decision Methods and Applications*, Springer, Berlin : 171-196.
- COLSON, G. (1986), « The Dynamic Bipolar Theory of Risk », *Working paper G.R.A.A.L.*, 8606, Université de Liège, communication au 3<sup>e</sup> congrès sur les théories du risque et de l'utilité, Aix en Provence, B. Munier.
- COLSON, G. (1987), « The Bipolar Theory of Risk : a Tutorial », *Working paper G.R.A.A.L.*, 8702, Université de Liège, communication au « II<sup>e</sup> Meeting of the Euro Working Group on Financial Modelling », Paderborn, RFA, 27 nov.
- COLSON, G. (1989), « M.A.R.S., A MultiAttribute Utility Ranking Support for Risk Situations with a « P,Q,I,R » Relational System of Preferences », *Mathematical and Computer Modelling*, 12, 10/11 : 1269-1298.
- COLSON, G., et M. ZELENY (1979), *Uncertain Prospects Ranking and Portfolio Analysis under the Conditions of Partial Information*, in *Mathematical Systems in Economics*, 44, Oelgeschlager, Gunn and Hain, Cambridge, Massachussets.
- COLSON, G., et M. ZELENY (1980), « Multicriterion Concept of Risk Under Incomplete Information », *Co. and OR.*, 7, 1-2 : 125-143.
- COLSON, G., et CHR. DE BRUYN (1989), « Models and Methods in Multiple Criteria Decision-Making », *Int. Series in Modern Applied Mathematics and Computer Science*, 23, Pergamon, Oxford.
- DUNCAN, G.T. (1977), « A Matrix Measure of Multivariate Local Risk Aversion », *Econometrica*, 45 : 895-903.
- DYER, J.S., et R.K. SARIN (1982), « Relative Risk Aversion », *Management Science*, 28 : 875-886.
- FARQUHAR, P.H. (1984), « State of the Art : Utility Assessments Methods », *Management Science*, 30 (11) : 1283-1300.
- FISHBURN, P.C. (1975), « Stochastic Dominance », Theory and Applications, in WHITE, D. et K. BOWEN, *The Role and Effectiveness of Theories of Decision in Practice*, Hodder and Stoughton : 60-72.

- FISHBURN, P.C. (1977), « Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns », *American Economic Review*, 67(2) : 116-126.
- FISHBURN, P.C. (1978) « On Handa's New Theory of Cardinal Utility and the Maximization of Expected Return », *Journal of Political Economy*, 86 : 321-324.
- FISHBURN, P.C. (1982), *The Foundation of Expected Utility*, Reidel, Dordrecht.
- FISHBURN, P.C. (1984a), « SSB Utility Theory : An Economic Perspective », *Math. Soc. Sc.* 8 : 63-94.
- FISHBURN, P.C. (1984b), « Foundations of Risk Measurement. I. Risk as Probable loss », *Management Science*, 30, 4, avril : 396-406.
- GAFNI, A., et G.W. TORRANCE (1984), « Risk Attitude and Time Preference in Health », *Management Science*, 30, 4, avril : 440-451.
- HANDA, J. (1977), « Risk, Probabilities and a New Theory of Cardinal Utilities », *Journal of Political Economy*, 85 : 97-122.
- HERTZ, D., et H. THOMAS (1983), *Practical Risk Analysis*, Wiley, New York.
- HOGAN, A.J., J.G. MORRIS et H.E. THOMPSON (1981), « Decision Problem under Risk and Chance Constrained Programming : Dilemma in the Transition », *Management Science*, 27, 6 : 698-716.
- KAHNEMAN, D., et A. TVERSKY (1979), « Prospect Theory : An Analysis of Decision under Risk », *Econometrica*, 47 : 263-291.
- KARMAKAR, U.S. (1978), « Subjectively Weighed Utility : A Descriptive Extension of the Expected Utility Model », *Organ. Behav. Human Perform.* 21 : 61-72.
- KARNI, E. (1979), « On Multivariate Risk Aversion », *Econometrica*, 47 : 1391-1401.
- KARNI, E. (1989), « Generalized Expected Utility Analysis of Multivariate Risk Aversion », *Int. Econ. Rev.* 30, 2 : 297-305.
- KEENEY, R.L. (1972), « An Illustrated Procedure for Assessing Multiattributed Utility Functions », *Sloan Management Review*, Automne : 37-50
- KEENEY, R.L., et H. RAIFFA (1976), *Decision with Multiple Objectives : Preferences and Value Trade-offs*, Wiley, New York.
- KREPS, D.M., et E.L. PORTEUS (1978), « Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory », *Econometrica*, 46, 1 : 185-200.
- LANGEN, D.(1989), « A Multiobjective Decision Model for Bank Asset/Liability Management », *Mathematical and Computer Modelling* 12, 10/11 : 1419-1435.
- LEVKOFF, J.S.(1982), *A Three Parameters Semi-variance Model of Capital Asset Pricing which explicitly considers Investor Preference for Upside Potential and Downside Risk*, Unpublished Ph.D., University of Virginia.
- LEVY, H., (1992), « Stochastic Dominance and Expected Utility : Survey and Analysis », *Management Science* 38, 4, avril : 555-593.

- LEVY, H., et M. SARNAT (1984), *Portfolio and Investment Selection : Theory and Practice*, Prentice Hall.
- MACHINA, M.J. (1982a), « Expected Utility », Analysis without the Independence Axiom, *Econometrica*, 50 : 277-323.
- MACHINA, M.J. (1982b), « A Stronger Characterization of Declining Risk Aversion », *Econometrica*, 50 : 1069-1079.
- MACHINA, M.J. (1983), « Generalized Expected Utility Analysis and the Nature of Observed Violations of the Independence Axiom », in STIGUM, B., et F. WENSTOP (eds), *Foundations of Utility and Risk Theories with Application*, Reidel : 263-293.
- MACHINA, M. (1987), Cardinal Properties of « Local Utility Functions », in MUNIER, B. (ed.), *Foundations and Applications of Utility, Risk and Decision Theories*, Reidel, Dordrecht.
- MAO, J.T.C. (1970), « Models of Capital Budgeting, E-V vs, E-S », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, janv., 4 : 657-675.
- MARKOWITZ, H. (1970), (1<sup>o</sup> ed 1959), *Portfolio Selection – Efficient Diversification of Investment*, Cowles Foundation, 16, Yale Un. Press, Wiley, New York.
- MARTEL, J.M., et K. ZARAS (1990), « Dominance stochastique en analyse multicritère face au risque », *working paper; Cahier du Lamsade*, n° 100, nov., Paris.
- MATHIEU-NICOT, B. (1985), *Espérance mathématique de l'utilité floue*, Collection de l'Institut de Mathématiques Économiques, 29, Université de Dijon.
- MCCORD, M., et R. DE NEUFVILLE (1986), « Lottery Equivalents » : Reduction of the Certainty Effect Problem in Utility Assessment, *Management Science*, 32, 1 : 56-60.
- MERTON, R.C. (1975), « Theory of Finance from the Perspective of Continuous Time », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Nov. : 659-674.
- RICHARD, S.F. (1975), « Multivariate Risk Aversion, Utility Independence and Separable Utility Functions », *Management Science*, 22, 1 : 12-21.
- SARIN, R.K. (1984), « The State-of-the-Art in Risk Analysis », *A Special Issue of Management Science*, 30, 4, Avril.
- STONE, B.K. (1973), « A General Class of Three-Parameter Risk Measures », *Journal of Finance*, 28 : 657-685.
- VLAJČIĆ, (1991), *Deux modèles alternatifs au Capital Asset Pricing Model fondés sur la semivariance; deux tests empiriques*, mémoire de licence, E.A.A., Université de Liège.
- VON NEUMANN, J., et O. MORGENSTERN (1944) (1967), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press.
- WEBER, M., et C. CAMERER (1987), « Recent Developments in Modelling Preferences under Risk », *OR. Spektrum*, 9 : 129-151.

- WHITMORE, G.A., et M.C. FINDLAY (1978), *Stochastic Dominance : An Approach to Decision Making under Risk*, Heath, Lexington, Mass.
- YAARI, M.E. (1987), « The Dual Theory of Choice under Risk », *Econometrica*, 55 : 95-115.
- ZARAS, K. (1989), « Dominances stochastiques pour deux classes de fonctions d'utilité : concaves et convexes », *RAIRO, Recherche Opérationnelle* 23, 1 : 57-65.
- ZELENY, M. (1978), « Multidimensional Measure of Risk : Prospect Ranking Vector (PRV) », in ZIONTS, S. (ed.), *Multiple Criteria Problem Solving*, Springer, New York : 529-548.