Assurances

Assurances

Du calcul des primes pures des assurances sur la vie

Adolphe Dollo

Volume 5, Number 2, 1937

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1102856ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1102856ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0004-6027 (print)
2817-3465 (digital)

Explore this journal

Cite this document

Dollo, A. (1937). Du calcul des primes pures des assurances sur la vie. *Assurances*, *5*(2), 61–69. https://doi.org/10.7202/1102856ar

Assurances

Revue trimestrielle consacrée à l'étude théorique et pratique de l'assurance au Canada

61

Enregistrée à Montréal comme matière de seconde classe.
Les articles signés n'engagent que leurs auteurs.

Prix:
L'abonnement: $1.00
Le numéro: 25 cents

Directeur: GÉRARD PARIZEAU
Publicité : ANTOINE DESMARAIS

Administration:
334, rue Notre-Dame est,
Montréal

5e année — MONTRÉAL, JUILLET 1937 — Numéro 2

Du calcul des primes pures des assurances sur la vie

par

ADOLPHE DOLLO, I.C. (Bruxelles)

Professeur titulaire à l'École Polytechnique de Montréal,
Professeur titulaire à l'École des Hautes Études Commerciales,
Directeur des cours de l'Actuariat de cette École,
Directeur de l'École Centrale de Préparation.

Equité mathématique

Si une compagnie d'assurance, qui est essentiellement une entreprise commerciale, ne devait pas réaliser de bénéfices et n'avait pas de frais d'exploitation, et si les primes perçues des assurés équivalaient exactement aux sommes que la compagnie s'est engagée à leur verser, il y aurait ce qu'on appelle « équité mathématique ».

Prime pure

Les primes calculées, dans l'hypothèse de l'équité mathématique, sont appelées « primes pures » (net premiums) ou primes mathématiques.

Pour couvrir les frais de gestion et tenir compte des bénéfices à réaliser, les primes pures sont majorées par la compagnie. Ces augmentations sont appelées chargements. La prime pure devient alors la « prime d'inventaire » (office premium). Celle-ci est parfois majorée encore afin de couvrir certaines commissions à accorder à des agents et devient alors la « prime commerciale » (gross premium). Ces deux augmentations peuvent d'ailleurs être effectuées d'une seule fois.

Dans un article précédemment publié dans cette revue, il a été traité des chargements et nous nous bornerons donc à l'établissement de la prime mathématique.

Prime unique

L'assuré peut s'acquitter envers la compagnie, de laquelle il achète une police d'assurance, en une seule fois ou en plusieurs paiements annuels (sauf pour les rentes viagères immédiates qui doivent être réglées en un seul versement).

L'expression « prime unique » (single premium) est utilisée lorsque l'assuré règle par un seul paiement. Dans le cas contraire on emploie le terme « primes annuelles » (annual premiums).

Nous donnerons plus loin des exemples de calculs de prime unique pure, mais nous avons besoin pour cela de quelques explications complémentaires.

Probabilité

Supposons que nous jetions un dé à jouer sur une table avec l'espoir de le voir s'arrêter avec un 6 au-dessus et que la chose se produise. Nous dirons qu'un « événement favorable » (happening event) est arrivé; sinon nous dirons « événement défavorable » (failing event).

Chaque face du dé avait la même chance d'apparaître au-dessus. Sur les six faces, le chiffre 6 avait une chance favorable contre cinq chances défavorables.

Nous dirons que la probabilité de jeter un 6 au premier coup est de $\frac{1}{6}$ ou de $0.16\frac{2}{3}$ ou encore de $16\frac{2}{3}\%$. Nous dirons encore que les chances de jeter un 6 au premier coup sont de 1 contre 5.

Au point de vue des mathématiques, la meilleure façon de s'exprimer est $0.16\frac{2}{3}$, vu que l'on rapporte tout à l'unité ou « certitude » (certainty). Celle-ci se produirait si toutes les faces du dé étaient garnies d'un 6.

La « probabilité (probability) favorable » à un événement est donc le rapport des cas qui lui sont favorables au nombre total des cas possibles. La « probabilité défavorable » à un événement est le rapport des cas qui lui sont défavorables au nombre total des cas possibles. Les deux ensemble ont pour somme l'unité ou la certitude, si nous exprimons chacune d'elles en décimales ou en fractions ordinaires.

Dans notre exemple, la probabilité de jeter un 6 au premier coup est de $\frac{1}{6}$ ou $0.16\frac{2}{3}$ et la probabilité de ne pas jeter un 6 est de $\frac{5}{6}$ ou $0.83\frac{1}{3}$ et les deux ensemble donnent 1.

Nous savons tous que nous ferons rouler un dé, vingt ou trente fois de suite, sans avoir un 6. Il ne faut donc jamais appliquer les probabilités à un petit nombre d'essais. La probabilité se rapprochera d'autant plus de la vérité que le nombre des épreuves sera plus grand. Sur 500 jets consécutifs du dé, nous aurons peut-être retourné 85 fois le 6 et le rapport du nombre de fois où nous l'avons obtenu au nombre total des essais sera de $\frac{85}{500}$ ou 0.17, très voisin de la probabilité trouvée ci-dessus.

Espérance mathématique

Si une personne s'attend à recevoir une certaine somme d'argent, mais n'en est pas certaine, nous appellerons « espérance mathématique » (mathematical expectation) de cette personne le produit de la somme attendue par la probabilité de la recevoir.

Dans une loterie, par exemple, dont le gagnant recevra \$2,000.00, cinq cents billets ont été vendus et une personne en a acheté cinq. Sa probabilité de gagner est de $\frac{5}{500}$ ou 0.01 et son espérance mathématique est de $0.01 \times 2000 = \$20$.

Probabilité d'atteindre un certain âge

Des statistiques ont permis d'établir des tables de mortalité. Les nombres que nous utiliserons dans la suite sont empruntés à la Table de l'Expérience Américaine (*American Experience Table*).

Nous y trouvons que sur 92637 individus de l'âge de 20 ans, il en reste normalement 78106 à l'âge de 40 ans. Nous dirons que la probabilité d'un homme de 20 ans de vivre jusqu'à 40 ans est $\frac{78106}{92637} = 0.84314$.

La probabilité d'une personne de l'âge x d'atteindre l'âge x + n est donc: ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$, l_x désignant le nombre de la table à l'âge x et l_{x+n} le nombre restant à l'âge x + n.

EXEMPLES DE CALCUL DES PRIMES PURES

Prime mathématique d'une dotation pure de $1,000

Supposons qu'une personne de 20 ans s'assure pour toucher à 40 ans une somme de $1,000.00. C'est ce qu'on appelle une « dotation pure » (pure endowment). Cette somme, qui ne sera payable que dans vingt ans, n'a pas cette valeur au moment où l'assurance est prise et pour en avoir la valeur, il faut l'escompter pour 20 ans. (Afin de continuer à nous servir des tables américaines, nous utiliserons le taux de 3½ %). Les $1000.00 payables dans 20 ans ont pour valeur actuelle:

$$1{,}000 \times 1.035^{-20} = 1{,}000 \times 0.50256588 = \$502.57.$$

L'espérance mathématique de cette dotation constitue la prime pure unique de ce genre d'assurance. Nous venons de voir qu'un homme de 20 ans a une probabilité de 0.84314 d'atteindre 40 ans.

La prime unique sera donc: $502.57 \times 0.84314 = \$423.74$.

Autre manière d'établir cette prime (sans usage direct de la probabilité, mais par l'emploi de l'équité mathématique)

Supposons que 92637 individus de 20 ans s'assurent en même temps pour une dotation pure de $1,000.00 à l'âge de 40 ans et appelons P la prime unique que chacun paiera à la compagnie d'assurance. Celle-ci recevra, au moment de la signature simultanée de tous ces contrats: 92637 fois P.

Chacun des 78106 survivants recevra, à 40 ans, $1,000.00; soit un déboursé total de la compagnie de $78,106,000.00.

Ramenons cette somme d'argent à la date de la signature des contrats en l'escomptant pour 20 ans à $3\frac{1}{2}\%$:

$$78{,}106{,}000 \times 0.50256588 = \$39{,}253{,}210.62.$$

Exprimons l'équité mathématique:

$$92367 \text{ fois } P = \$39{,}253{,}210.62,$$

d'où la valeur de la prime unique:

$$P = \frac{39{,}253{,}210.62}{92{,}637} = \$423.74.$$

Remarque: cette méthode n'a pas réellement évité la probabilité. Le résultat obtenu peut se mettre sous la forme:

$$P = \frac{39{,}253{,}210.62}{92{,}637} = \frac{78{,}106 \times 1000 \times 0.50256588}{92{,}637}$$

$$= \frac{78{,}106}{92{,}637} \times 1000 \times 0.50256588$$

Sous cette forme, la fraction est la probabilité d'un homme de 20 ans d'atteindre 40 ans et le reste est la dotation de 1000 escomptée pour 20 ans.

Formule des actuaires de la dotation pure

Les actuaires suivent des méthodes plus courtes pour calculer les primes pures, grâce à certains artifices mathématiques.

Le symbole international de la prime unique de la dotation pure est ${}_nE_x$, x désignant l'âge de l'assuré et n dans combien d'années la compagnie aura à lui payer la dotation.

Avec ces nouvelles notations et celles que nous avons expliquées précédemment, nous pourrons écrire la fraction numérique ci-dessus sous la forme algébrique:

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n} \times 1000 \times v^n}{l_x}$$

v^n représente le facteur d'escompte pour n années.

Ce résultat peut s'écrire, en multipliant les deux termes de la fraction par un même facteur d'escompte v^x:

$$_nE_x = \frac{v^{x+n}\, l_{x+n} \times 1000}{v^x\, l_x}$$

Enfin les actuaires conviennent de remplacer les produits de la forme $v^x \times l_x$ par un seul symbole D_x appelé facteur de commutation. Ces facteurs de commutation sont dans les tables employées par les actuaires.

La formule s'écrira d'une manière simplifiée:

$$_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \times 1000$$

L'exemple numérique d'une dotation de \$1000 à 40 ans, pour un assuré de 20 ans, se traiterait de la manière suivante, en cherchant les facteurs de commutation dans les tables:

$$_{20}E_{20} = 1000\frac{D_{40}}{D_{20}} = 1000 \times \frac{19727.4}{46556.2} = \$423.74.$$

Prime mathématique d'une assurance à vie entière ou Assurance ordinaire sur la vie (Whole life insurance).

Supposons que 89032 individus de 25 ans prennent en même temps et à la même compagnie d'assurance une police pour que \$1000 soient versés à leur décès à un bénéficiaire désigné dans le contrat. En désignant par P la prime versée par chacun d'eux, la compagnie recevra:

89032 fois P.

Il en mourra normalement la première année 718 dans l'année et la compagnie aura à payer \$718,000. La deuxième année 718 autres disparaîtront et les nouveaux déboursés de la compagnie seront de \$718,000. L'année suivante, elle déboursera \$718,000 et ainsi de suite jusquà la disparition du dernier des 89032 assurés initiaux.

Pour être ramenées à la date de signature des contrats, ces sommes devront être escomptées respectivement pour un, deux, trois ans, etc., et la somme de ces valeurs actuelles devra être égale à la somme des primes touchées par la compagnie, d'après l'équité mathémathique:

$$89032 \text{ fois } P = 718000v + 718000v^2 + 718000v^3 + \ldots \text{ ou}$$

$$89032 \text{ fois } P = 718000 \times 0.96618357 + 718000 \times 0.93351070 + 718000 \times 0.90194271 + \ldots$$

On ferait ces produits jusqu'à la disparition du dernier assuré (normalement à 95 ans) et après les avoir additionnés, on diviserait cette somme par 89032 pour avoir la prime unique.

Nous ferons grâce au lecteur de ces soixante-dix produits qui n'ajouteraient rien à l'exposé de la question.

Formule des actuaires de l'assurance à vie entière

Par des transformations analogues à celles que nous avons exposées au sujet de la prime unique de la dotation pure, les actuaires arrivent à une formule très simple que nous donnons ci-dessous.

Dans cette formule:

A_x est le symbole international pour l'assurance à vie entière,

D_x est le facteur de commutation dont nous avons déjà parlé,

M_x est un nouveau facteur de commutation dont la nature serait un peu longue à expliquer dans cet article,

x reste l'âge de l'assuré.

$$A_x = 1000 \times \frac{M_x}{D_x}$$

Les facteurs de commutation M_x se trouvent dans la même table que les quantités D_x.

Dans le cas de l'exemple d'un homme prenant, à 25 ans, une police d'assurance à vie entière de $1000, la prime mathématique sera:

$$A_{20} = \frac{M_{20}}{D_{20}} \times 1000 = \frac{11631.14 \times 1000}{37673.6} = \$308.73$$

Primes annuelles

Le lecteur comprendra que nous devons nous borner, dans les limites de cet article, à deux exemples de calcul de primes pures. Nous avons cependant besoin de citer deux autres formules de prime unique avant d'expliquer comment passer de la prime unique aux primes annuelles.

Rente viagère temporaire immédiate, payable d'avance

La formule de la prime unique mathématique de ce cas est, en supposant que le montant annuel de la rente est de $1.00:

$$_{n}a_{x} \text{ ou } a_{x,n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

N_x est un autre facteur de commutation que l'on trouve dans les mêmes tables que D_x et M_x.

Exemple: Une personne envoie son fils étudier dans un pays étranger pour une période de dix ans. Elle désire assurer à ce jeune homme de vingt ans une rente viagère de $1000 par année, payable au début de chaque année. Que devra-t-elle payer à une compagnie d'assurance?

$$a_{20,10} = \frac{N_{20} - N_{30}}{D_{20}} = \frac{984399.6 - 596803.6}{46556.2} = \$8.32533 \text{ pour une}$$

rente viagère de $1.00.

Pour $1000.00, la somme à verser sera de $8325.33.

Rente viagère ordinaire immédiate, payable d'avance

La formule de la prime unique est, pour une rente annuelle, de $100:

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Exemple: Une personne désire faire servir à une autre personne de 25 ans, incapable de gagner sa vie une rente annuelle, payable d'avance, de $600.00 jusqu'à la mort du bénéficiaire. Quelle somme devra-t-elle verser à une compagnie d'assurance?

La réponse, pour $1.00 de rente annuelle sera:

$$a_{25} = \frac{N_{25}}{D_{25}} = \frac{770113.6}{37673.6} = \$20.44173$$

Pour $600.00 la prime unique sera:

$$600 \times 20.44173 = \$12265.04$$

Prime annuelles d'une dotation pure

Excepté dans le cas des rentes viagères immédiates, les compagnies d'assurance autorisent leurs clients à payer des primes annuelles au lieu d'une prime unique. Chacune de ces primes annuelles doit néanmoins être versée au début de l'année. C'est donc l'assuré qui va, à son tour, servir une rente à la compagnie d'assurance et il n'est que juste, pour celle-ci, que le risque de mort de l'assuré soit couvert.

La valeur actuelle ou prime unique de cette rente viagère doit être égale à la prime unique à remplacer.

Ces primes annuelles peuvent être en nombre limité, comme dans le premier exemple que nous traitons ci-après. Elles peuvent aussi être payables jusqu'à la mort de l'assuré.

Reprenons l'exemple numérique de dotation pure que nous avons traité précédemment.

Une personne de 20 ans s'assure pour toucher, à 40 ans, une somme de \$1000.00. Nous avons trouvé que la prime unique est de \$423.74. L'assuré est autorisé à remplacer ce versement par 10 versements annuels, payables d'avance. Quelle est la valeur de chacun de ces paiements?

Appelons P le paiement individuel. Nous avons trouvé dans le cas d'une rente viagère temporaire de 10 ans, payable d'avance, une prime unique de \$8.32533.

Nous pourrons donc écrire:

$$8.32533 \text{ fois } P = 423.74$$

et

$$P = \frac{423.74}{8.32533} = \$50.90$$

Primes annuelles d'une assurance à vie entière

Nous traiterons ici le cas ou l'assuré est autorisé à payer des primes annuelles jusqu'à sa mort. Reprenons l'exemple d'assurance à vie entière traité plus haut.

Un homme de 25 ans prend une assurance à vie entière de \$1,000.00, payable à un bénéficiaire mentionné dans le contrat. Nous avons trouvé une prime unique de \$308.73. Il s'agit de la remplacer par des primes annuelles, payables d'avance jusqu'au décès de l'assuré.

Il devra donc servir à la compagnie d'assurance une rente viagère ordinaire payable d'avance. Appelons P le montant qu'il devra payer chaque année.

Nous avons vu aussi que, dans le cas de son âge, et pour une rente annuelle de \$1.00, la prime unique est de \$20.44173.

Nous écrivons donc: $20.44173 \text{ fois } P = 308.73$

ou $$P = \frac{308.73}{20.44173} = \$15.10$$

*

Nous terminons en demandant au lecteur d'être bienveillant si nos explications lui ont semblé parfois trop théoriques. Il est souvent difficile de traduire des formules mathématiques en mots ordinaires.

Nous serons satisfaits si le lecteur est convaincu que les primes d'assurance qu'on réclame de lui ne sont pas l'effet du hasard ou de l'âpreté au gain comme le pensent malheureusement certaines personnes.