Circuit
Musiques contemporaines

Une introduction musicologique à la recherche « mathémusicale » : aspects théoriques et enjeux épistémologiques
A Musicological Introduction to “Mathemusical” Research: Theoretical Aspects and Epistemological Challenges

Moreno Andreatta

Volume 24, Number 2, 2014

La recherche musicale : aux croisements de l’art et de la science

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1026184ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1026184ar

See table of contents

Publisher(s)

Les Presses de l’Université de Montréal

ISSN

1183-1693 (print)
1488-9692 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Andreatta, M. (2014). Une introduction musicologique à la recherche « mathémusicale » : aspects théoriques et enjeux épistémologiques. *Circuit*, *24*(2), 51–66. https://doi.org/10.7202/1026184ar

Article abstract

This article presents certain theoretical aspects and discusses some epistemological challenges of the author’s research into the links between mathematics and music. After a general introduction on the context of “mathemusical” research at Ircam and the place of the MISA project (Computer Modeling of Algebraic Structures in Music and Musicology) in the research activities of the Musical Representations team, we discuss the problem of algebraic formalization in set theory and transformational theory, two analytic paradigms whose theoretical and computational aspects we have studied in the process of constructing an abstract model of musical structures and processes. Musical analysis based on the theory of sets and their transformations raises interesting philosophical questions, notably in their relationships with phenomenology and the cognitive sciences. In particular, relating our musicological perspective with phenomenology, we advance the idea of “phenomenological structuralism” in a reinterpretation of the structural tradition in musical analysis.

Une introduction musicologique à la recherche « mathémusicale » : aspects théoriques et enjeux épistémologiques

Moreno Andreatta

Contexte de la recherche « mathémusicale » à l'Ircam

Bien que présent depuis les années 1980 dans les activités de recherche de l'Institut de recherche et coordination acoustique/musique (Ircam), le domaine de relations entre mathématiques et musique n'a été officiellement intégré aux axes d'activités des différentes équipes qu'à partir de la fin des années 1990[1]. C'est, en particulier, à la suite du Quatrième Forum Diderot « Mathématiques et musique[2] », organisé sous l'égide de la Société mathématique européenne (SME) et se déroulant simultanément dans trois villes (Paris, Vienne et Lisbonne), que la recherche sur les rapports entre mathématiques et musique a pu trouver un ancrage institutionnel, avec la mise en place de séminaires d'étude (séminaire MaMuX à l'Ircam et *mamuphi* à l'École normale supérieure), ainsi que la création d'une revue à comité de lecture (le *Journal of Mathematics and Music*) et d'une société savante internationale (la Society for Mathematics and Computation in Music, en abrégé SMCM). Cette société, née pour rapprocher deux communautés de chercheurs partageant souvent les mêmes outils conceptuels mais ayant une conception profondément différente en ce qui concerne les aspects computationnels des théories analytiques, a fortement contribué au processus d'institutionnalisation de la discipline *Mathematics and Music* à laquelle un code (00A65) est désormais attribué au sein de la MSC (*Mathematics Subject Classification*)[3].

Parmi les différentes actions et initiatives qui ont permis à l'Ircam de jouer aussi un rôle de catalyseur dans ce processus progressif d'institutionnalisation, on retiendra en particulier le projet MISA (Modélisation informatique des structures algébriques en musique et musicologie), soutenu par le CNRS, et qui s'est accompagné par la création, en 2004, d'un poste de chercheur CNRS

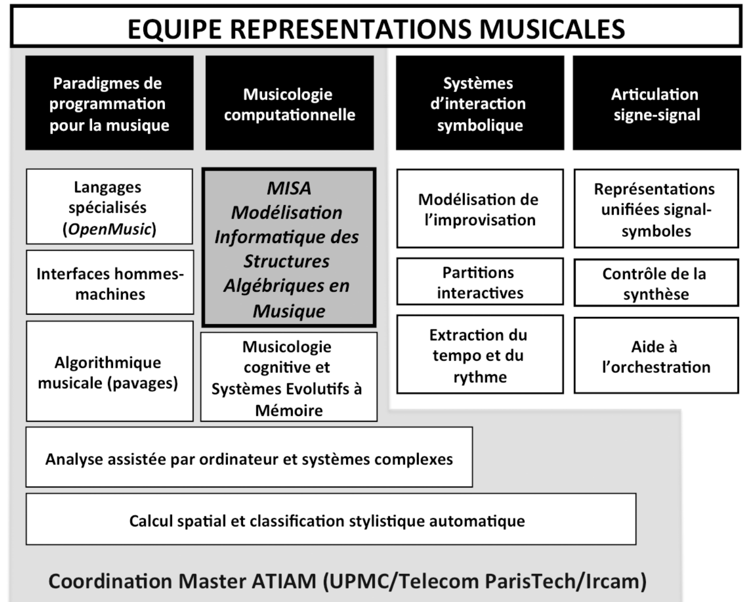
1. Pour s'en rendre compte, il suffit de parcourir le recueil des textes d'André Riotte et Marcel Mesnage (2006), deux figures fondatrices de la musicologie computationnelle et des approches formelles en analyse musicale. On y trouvera plusieurs articles coécrits avec les chercheurs de ce qui s'appelait à l'époque le CRIME (Cellule de recherche instruments modèles écriture), et regroupant des compositeurs (André Riotte et Claudy Malherbe) ainsi que des informaticiens et mathématiciens (Gérard Assayag et Emmanuel Amiot). Pour une courte analyse de ces contributions dans le domaine de la musique algorithmique, voir Andreatta, 2013.

2. Voir Assayag *et al.*, 2002.

3. Pour un panorama assez exhaustif des différents axes de recherche au sein de cette communauté, nous renvoyons aux Actes des différentes conférences biannuelles de la Society for Mathematics and Computation in Music (SCMC). À titre d'exemple, l'édition que nous avons organisée à l'Ircam en juin 2011 a rassemblé plus d'une centaine de chercheurs, travaillant dans des domaines aussi divers que la théorie des gammes dans ses relations avec la théorie des mots, les modèles géométriques, topologiques et computationnels,

la *Set Theory* et la théorie transformationnelle, l'analyse musicale computationnelle et cognitive, la théorie de l'improvisation et des gestes. Voir Agon *et al.*, 2011.

FIGURE 1 Positionnement du projet MISA dans l'organigramme des activités de recherche de l'équipe Représentations musicales de l'Ircam.



permanent dans cette discipline émergente. Par son caractère transversal, ce projet occupe une place centrale dans l'axe thématique « Musicologie computationnelle », ayant comme domaine d'étude les aspects formels de la musicologie, dans ses rapports avec la modélisation informatique des partitions et des processus analytiques et compositionnels. Cet axe constitue, avec les paradigmes de programmation pour la musique, les systèmes d'interaction symbolique et l'articulation signe-signal, l'un des quatre domaines de recherche principaux de l'équipe Représentations musicales de l'Ircam dirigée par Gérard Assayag (figure 1)[4].

Avec l'objectif – à plus long terme – d'apporter une contribution originale dans le domaine des rapports entre mathématiques, musique, informatique et sciences cognitives[5], le projet MISA a permis tout d'abord de mieux préciser les enjeux d'une recherche « mathémusicale » par rapport à l'application directe des mathématiques à la musique, une démarche qui est très ancienne et plus courante dans le domaine de la musicologie computationnelle. Historiquement, les rapports entre mathématiques et musique sont conçus sous l'angle *applicatif*, dans un mouvement qui va des mathématiques vers la musique (« Musica est exercitium arithmeticæ », selon la célèbre définition de Leibniz[6]). L'une des préoccupations centrales du projet MISA est de ren-

4. Ce projet a également nourri certains contenus pédagogiques du Master ATIAM (Acoustique, traitement du signal et informatique appliqués à la musique), coordonné depuis sa création en 1993 par l'Ircam, en particulier à travers l'unité d'enseignement MMIM (Modèles mathématiques en informatique musicale). Pour une présentation des aspects musicologiques de cette unité d'enseignement, voir Andreatta et Chemillier, 2007.

5. En particulier grâce à deux projets qui sont désormais inscrits dans les axes de recherche de l'équipe Représentations musicales, à savoir le projet « Mathématique/Musique & Cognition » soutenu par l'AFIM (Association française d'informatique musicale), ainsi que le projet « Géométrie de l'Interaction et Musique », réalisé dans le cadre des programmes PEPS - Interaction Math-ST2I. Le lecteur pourra trouver des informations sur l'ensemble des initiatives organisées dans le cadre de ces deux projets de recherches aux adresses suivantes : <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/Cognition.html> et <http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/PEPS-GdIM.html> (consultés le 14 avril 2014).

6. Lettre de Leibniz à Christian Goldbach, 17 avril 1712. Voir Leibniz, 1734, p. 240.

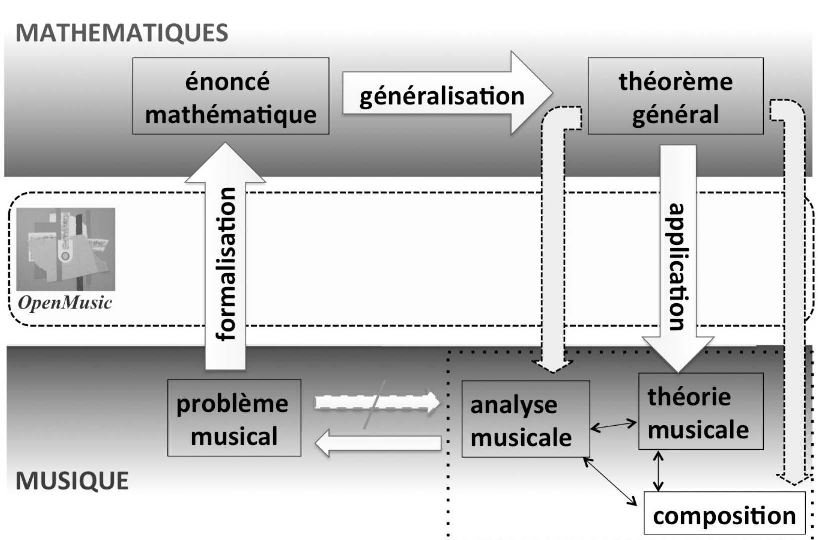
verser justement cette perspective et partir de certains problèmes théoriques posés par la musique qui sont susceptibles d'intéresser non seulement les musicologues et théoriciens de la musique mais aussi les mathématiciens et les informaticiens. Une partie des problèmes théoriques abordés ont donné lieu à de nouveaux résultats mathématiques, résultats qui ont eu, à leur tour, des applications tout à fait inédites en musique. C'est précisément ce double mouvement, de la musique à la formalisation mathématique et des mathématiques aux applications musicales, qui constitue l'essence de ce que nous avons appelé une « dynamique mathémusicale[7] » et dont le schéma ci-après propose une vue synoptique (figure 2)[8].

Ce schéma s'applique à une série de problèmes théoriques sur lesquels nous avons travaillé, allant de la théorie des ensembles des classes de hauteurs et la théorie transformationnelle à la construction des canons rythmiques mosaïques (*Tiling Rhythmic Canons*) en passant par la théorie des séquences périodiques et le calcul des différences finies, la relation Z et la théorie des ensembles homométriques, les théories diatoniques, les ensembles bien repartis (*Maximally Even Sets*) et la théorie des *block-designs* en composition algorithmique. À défaut d'expliquer tous ces problèmes, cet article présentera quelques aspects théoriques et enjeux épistémologiques de la théorie des ensembles des classes de hauteurs. Ceci permet à la fois d'offrir un court

7. Voir Andreatta, 2010.

8. La place de la modélisation informatique est représentée par le logo d'*OpenMusic*, langage de programmation visuelle employé, selon le type de problème musical initial, à la fois comme espace de calcul pour obtenir des énoncés mathématiques mais aussi comme support d'expérimentation dans la phase de modélisation informatique d'un énoncé formel en vue d'une application en théorie, analyse ou composition musicales.

FIGURE 2 Schéma détaillant le double mouvement d'une « dynamique mathémusicale », à partir d'un problème musical formalisé, généralisé et ensuite appliqué en théorie, analyse ou composition musicales.



rappel de deux orientations formelles majeures en analyse musicale tout en mettant en évidence l'originalité d'une démarche computationnelle dans une perspective « mathémusicale[9] ». Ces deux orientations s'inscrivent dans une démarche systématique en musicologie, dont les origines remontent à la fin du XIXe siècle. L'approche algébrique, et sa mise en œuvre en informatique musicale, ajoute en effet l'élément *computationnel* au caractère *systématique* de la musicologie, telle qu'elle s'est constituée, grâce à Guido Adler, vers la fin du XIXe siècle[10]. Rappelons que dans cet article fondateur, Adler considère la musicologie comme étant formée de deux branches : une branche *historique* et une branche *systématique*. La partie systématique est définie comme « la recherche [*Aufstellung*] et la justification [*Begründung*] des principes les plus généraux[11] » à la base de chaque branche du système musical et se compose elle-même de quatre parties (figure 3).

Une analyse détaillée de ces quatre parties nous offre des éléments importants pour situer le problème de la formalisation des structures musicales dans une perspective musicologique. Une première branche se consacre à la recherche (*Erforschung*) et aux fondements (*Begründungen*) des lois ou principes du système musical sous ses aspects harmonique (*Harmonik*), rythmique (*Rhythmik*) et mélodique (*Melik*). Notons ici le double caractère à l'intérieur de chaque sous-discipline, l'harmonie étant conçue dans ses aspects tonals

9. Pour une description exhaustive des différents problèmes théoriques, dans une perspective de recherche « mathémusicale », nous renvoyons à notre mémoire d'habilitation à diriger des recherches intitulé « *Mathematica est exercitium musicæ* : la recherche "mathémusicale" et ses interactions avec les autres disciplines » (Andreatta, 2010).

10. À propos de Guido Adler, voir l'article de Caroline Traube dans ce numéro (ndlr).

11. Voir Adler, 1885, p. 11-12.

FIGURE 3 Les quatre branches de la musicologie systématique chez Guido Adler (schéma extrait de Adler, 1885).

II. Systematisch.

Aufstellung der in den einzelnen Zweigen der Tonkunst zuhöchst stehenden Gesetze.

A. Erforschung und Begründung derselben in der			B. Aesthetik der Tonkunst.	C. Musikalische Pädagogik und Didaktik	D. Musikologie
1. *Harmonik* (tonal od. tonlich).	2. *Rhythmik* (temporär oder zeitlich).	3. *Melik* (Cohärenz von tonal und temporär).	1. Vergleichung und Werthschätzung der Gesetze und deren Relation mit den appercipirenden Subjecten behufs Feststellung der *Kriterien des musikalisch Schönen.* 2. Complex unmittelbar und mittelbar damit zusammenhängender Fragen.	(Zusammenstellung der Gesetze mit Rücksicht auf den Lehrzweck) 1. Tonlehre, 2. Harmonielehre, 3. Kontrapunkt, 4. Compositionslehre, 5. Instrumentationslehre, 6. Methoden des Unterrichtes im Gesang und Instrumentalspiel.	(Untersuchung und Vergleichung zu ethnographischen Zwecken).

Hilfswissenschaften: Akustik und Mathematik.
Physiologie (Tonempfindungen).
Psychologie (Tonvorstellungen, Tonurtheile und Tongefühle).
Logik (das musikalische Denken).
Grammatik, Metrik und Poetik.
Pädagogik
Ästhetik etc.

(d'où les deux termes *tonal* et *tonlich*) et l'étude du rythme étant envisagée à la fois dans une dimension temporelle (*temporär*), mais aussi par rapport au temps chronologique (*zeitlich*). Quant à la dimension mélodique (*Melik*), elle repose sur l'idée de cohérence tonale et temporelle (*Cohärenz von tonal und temporär*). Une deuxième branche de la musicologie systématique s'intéresse à la question de l'esthétique du système musical et tente d'établir des critères du beau musical (*Kriterien des musikalisch Schönen*), en particulier du point de vue de l'aperception des sujets (*appercipirenden Subjecten*)[12]. L'influence de la pensée d'Eduard Hanslick sur Adler est ici particulièrement évidente[13], mais l'intérêt pour les liens entre le concept de beau dans la musique et le problème de l'aperception offre un élément intéressant pour comprendre la singularité de la vision musicologique d'Adler où l'enseignement de l'harmonie, du contrepoint et de la composition était inclus *de facto* dans la discipline musicologique, comme on peut le constater en regardant la troisième branche de la partie systématique : pédagogie et didactique musicale. La quatrième et dernière branche, *Musikologie*, se réfère à ce qu'on appellera plus tard l'ethnomusicologie.

Il nous semble important d'insister sur le fait qu'en marge de cette division générale en quatre branches, Adler propose une série de disciplines auxiliaires (*Hilfswissenschaften*) qui concernent plus directement les méthodes à utiliser dans la démarche systématique en musicologie. Parmi ces disciplines, figurent l'acoustique et les mathématiques, la physiologie (*Tonempfindung*[14]), la psychologie, qui comprend l'étude de la représentation (*Tonvorstellung*), du jugement (*Tonurtheile*) et de l'appréciation du son (*Tongefühle*)[15], la logique de la pensée musicale (*musikalisches Denken*) et ainsi de suite (grammaire, métrique, poétique, etc.). Il faut remarquer qu'ainsi présentée, la musicologie systématique n'est pas une simple extension de la *Musikwissenschaft* mais implique une réorientation complète de la discipline musicologique vers des questions fondamentales qui ne sont pas par nature d'ordre historique.

Cette typologie, qui se trouve explicitée pour la première fois à l'intérieur d'un essai de définition des objets, méthodes et finalités de la recherche musicologique, permet de mieux comprendre la réception des idées d'Adler aux États-Unis[16], en particulier autour de Charles Seeger et de l'influence de celui-ci dans l'établissement de la musicologie comme discipline universitaire bien structurée[17]. Entre les deux branches historique et systématique de la musicologie il y a eu, selon Seeger, un schisme qui a conduit à abandonner l'approche systématique et à privilégier l'orientation historique. Il s'agit donc de restaurer la balance entre les deux approches en considérant « l'histoire et le système comme deux orientations distinctes mais interdépendantes à l'intérieur de

12. Il est difficile de savoir si Adler se réfère à la notion d'aperception au sens kantien, en tant qu'unité de la conscience qui précède le contenu de nos intuitions sensibles, ou bien si le terme renvoie à l'idée d'une prise de conscience claire d'une perception ou d'une connaissance, comme chez Leibniz.

13. Voir Hanslick, 1854.

14. Le terme fait écho à l'ouvrage du théoricien allemand Hermann von Helmholtz (1863).

15. Si l'on cherche une référence explicite à d'autres théoriciens de l'époque, on serait tenté de suggérer le premier tome du traité *Tonpsychologie* de Carl Stumpf (1883), une hypothèse que nous nous limitons à avancer sans essayer de la justifier ultérieurement. De même nous n'essaierons pas de commenter l'interprétation du terme *Tonvorstellung* en tant que « cognition » – comme le propose Helga de la Motte-Haber (1982) – et qui suggère de considérer la réflexion d'Adler comme une première étape vers la constitution des sciences cognitives.

16. Voir Andreatta, 2003.

17. Les contributions majeures de Charles Seeger ont été collectées dans *Studies in Musicology, 1935-1975*, un ouvrage qui a été réédité en 1977 avec une introduction intitulée « Systematic (Synchronic) and Historical (Diachronic) Orientations in Musicology » (Seeger, 1977, p. 1-15).

18. Greer, 1998, p. 196.

19. Voir Andreatta, 2003.

20. Voir Andreatta, 2005.

21. Voir Klein, [1872]1893. L'approche *paradigmatique* au problème de la classification de structures musicales, dont nous présenterons brièvement les concepts de base, peut être considérée comme une transposition en musique du programme de Klein qui consiste à étudier la géométrie en fonction des structures algébriques qui opèrent sur celle-ci. À chaque espace géométrique correspond, ainsi, un groupe de transformations, si bien que la géométrie euclidienne n'est qu'un choix possible d'un groupe de transformations, d'autres géométries – en particulier les géométries non euclidiennes – ayant désormais le même droit d'existence au sein des mathématiques.

22. Nous avons ainsi pu constater que le problème de la naissance du concept de « structure » en mathématique est au cœur de plusieurs travaux historiques qui ouvrent, également, des perspectives théoriques nouvelles en philosophie des mathématiques. Voir, par exemple, Corry, 1996 ; Patras, 2001 ; Krömer, 2007 ; et Marquis, 2009.

23. Le langage de programmation visuelle *OpenMusic*, développé par l'équipe Représentations musicales de l'Ircam et initialement conçu pour la composition assistée par ordinateur (Agon, 1998 ; Agon *et al.*, 1999), est de plus en plus employé comme outil analytique (voir, notamment, Andreatta, 2003). L'environnement « MathsTools » a été conçu en collaboration étroite avec Carlos Agon qui en a accompagné les évolutions dans les différentes versions du langage de programmation *OpenMusic*.

la discipline musicologique[18] ». Cette double articulation entre une approche de type « historique/critique » et une autre approche qu'il qualifie de « systématique/scientifique » offre un cadre conceptuel pour comprendre la portée musicologique d'un phénomène qui n'a pas de précédent dans l'histoire de la musique, à savoir la naissance et le développement, en particulier aux États-Unis, d'une théorie de la musique qui essaie de s'affranchir de la composante physique et de dépasser, à l'aide d'outils formels issus de la théorie des groupes, la réduction des lois de l'harmonie à la résonance naturelle. Nous allons maintenant montrer comment les mathématiques ont favorisé la cristallisation de certaines idées théoriques en musique, en particulier autour du problème de la formalisation et de la représentation des structures musicales.

Des ensembles de classes de hauteurs à la théorie transformationnelle

La recherche « mathémusicale » s'articule autour de trois aspects – théorique, analytique et compositionnel – qui sont souvent étroitement liés dans l'utilisation des méthodes algébriques en musique et musicologie. Bien qu'il soit tentant de les séparer, afin de mettre en évidence leurs propres modes de fonctionnement, nous avons montré le caractère très limitatif d'une telle catégorisation qui prétendrait définir les champs possibles d'application d'une méthode algébrique donnée à la musique ou à la musicologie[19]. Il est bien connu qu'au XXe siècle, théorie musicale, analyse et composition sont des disciplines qui s'influencent mutuellement, comme on peut le constater en analysant, en particulier, l'histoire des modèles algébriques en musique[20].

Il est tout à fait possible d'accompagner un regard rétrospectif sur l'émergence de l'approche algébrique en musique d'une analyse de l'évolution du concept de structure mathématique au sein de l'algèbre moderne à partir du « programme d'Erlangen » de Felix Klein[21] jusqu'aux développements les plus récents sur la théorie mathématique des catégories, en passant par l'axiomatique hilbertienne et l'expérience bourbakiste[22]. Le formalisme de Hilbert et l'approche structurale de Bourbaki sont deux moments de la pensée mathématique contemporaine qui ont influencé de façon décisive la naissance et l'évolution de la théorie de la musique au sens moderne. Cela permet notamment de comprendre la nature algébrique aussi bien de la *Set Theory* d'Allen Forte (1973) que de la *Transformational Theory* de David Lewin (1987). Notre contribution principale dans ce domaine a été d'offrir une formalisation algébrique et une modélisation informatique de ces deux approches théoriques s'appuyant sur la théorie des actions des groupes et leur implémentation dans l'environnement informatique « MathsTools » d'*OpenMusic*[23].

L'implémentation, réalisée en *OpenMusic*, se déploie dans une architecture *paradigmatique*[24] permettant à l'analyste de choisir son propre critère d'équivalence entre des structures d'accords en utilisant comme *paradigmes* d'analyse les différents groupes que l'on peut choisir de faire opérer sur l'espace musical. Elle englobe, comme cas particulier, les différentes tables de classification d'accords qu'on retrouve dans les traités théoriques et pédagogiques de la *Set Theory*, aussi bien dans la tradition américaine[25] qu'européenne[26]. Le paradigme de la *Set Theory*, en effet, postule une équivalence entre les structures musicales à une transposition et/ou une inversion près, ce qui revient à considérer le groupe diédral comme structure algébrique sous-jacente au catalogue d'accords. Ce groupe est engendré par des rotations et réflexions d'un polygone régulier inscrit dans le cercle, les rotations et réflexions pouvant être interprétées musicalement comme des transpositions et des inversions[27]. On peut, de même, considérer d'autres groupes et donc d'autres critères d'équivalence telle l'équivalence à une transposition (cas du groupe cyclique, c'est-à-dire le groupe engendré par des rotations), à une augmentation (le groupe *affine*, ou groupe engendré par des multiplications) ou une permutation près (cas du groupe *symétrique* ou groupe engendré par les permutations)[28]. L'architecture paradigmatique de cet environnement est décrite dans la première figure de la page suivante (figure 4), qui montre les représentations circulaires et les structures intervalliques associées aux différentes classes d'équivalence d'un même accord[29].

Notons également que l'approche paradigmatique est indépendante du type de représentation géométrique utilisée. La représentation circulaire permet d'associer à tout accord d'un espace tempéré égal un polygone inscrit dans un cercle. Elle peut être ainsi accompagnée, selon le contexte dans lequel on modélise une partition, par d'autres représentations géométriques, telles le *Tonnetz* (ou réseau des notes), dans lequel chaque accord majeur est voisin des trois accords mineurs obtenus en gardant deux notes inchangées et en déplaçant la note restante d'un ton ou d'un demi-ton. Ces trois transformations, permettant de passer, par exemple, d'un accord de *do* majeur aux accords de *la* mineur, *do* mineur et *mi* mineur, sont appelées traditionnellement R (comme la « relative »), P (comme la « parallèle ») et L (comme le « *leading-tone* »). Elles sont représentées dans la deuxième figure de la page suivante (figure 5), qui indique également les axes engendrant le réseau. Ces axes correspondent respectivement aux deux intervalles de tierce majeure et de tierce mineure, si bien que chaque note du *Tonnetz* est obtenue comme une somme d'un certain nombre de ces deux types d'intervalles.

24. Le terme *paradigmatique* a été choisi pour souligner la portée philosophique de l'approche algébrique en analyse musicale. Les groupes algébriques jouent le rôle de *paradigmes* dans un sens très proche de celui utilisé par Thomas Kuhn dans son analyse de la structure des révolutions scientifiques (Kuhn, 1962). L'idée sous-jacente est celle de l'intérêt, pour un analyste ou un musicologue, de choisir le « paradigme » le mieux approprié pour décrire de façon pertinente un phénomène musical observé. Notons que le terme *paradigmatique* avait également été adopté en musicologie par Nicolas Ruwet dans son approche structuraliste de l'analyse musicale fortement influencée par la linguistique (1966). Notre approche *paradigmatique* basée sur la théorie des groupes de transformations suggère cependant une nouvelle interprétation de la démarche structurale en analyse musicale, indépendamment de toute considération sur le rapport entre musique et langage.

25. Voir Forte, 1973 ; Rahn, 1980 ; et Morris, 1987.

26. Voir Costère, 1954, 1962 ; Zalewski, 1972 ; et Vieru, 1980.

27. Ces deux types de symétrie sont visualisés en figure 6 à l'aide de la représentation circulaire (partie gauche) et du *Tonnetz* (partie droite).

28. Dans ce cas, on autorise n'importe quelle permutation des intervalles présents dans la structure intervallique, ce qui revient à construire le catalogue des 77 textures du compositeur mexicain Julio Estrada (2011). Ce catalogue, le plus réduit parmi ceux qui sont issus d'opérations pertinentes d'un point de vue musical, est équivalent, d'un point de vue mathématique, aux 77 partitions du nombre 12 en somme d'entiers.

29. Un accord se déployant sur plusieurs octaves est analysé et représenté à l'aide du cercle et de

sa structure intervallique associée (exprimée en nombre de demi-tons) et à travers une réduction à l'octave ainsi qu'une opération d'équivalence modulo les transpositions (groupe cyclique), les transpositions et inversions (groupe diédral), les augmentations (groupe affine) ou les permutations (groupe symétrique). Dans le cas du groupe diédral, l'accord est accompagné par son label (5-29) dans la table de classification de la *Set Theory*, ce qui correspond à l'accord de cinq notes en 29[e] (Forte, 1973).

FIGURE 4 Architecture *paradigmatique* pour la théorie, l'analyse et la composition assistées par ordinateur basée sur le concept d'action du groupe cyclique (Z_n), diédral (D_n), affine (A_n) et symétrique (S_n) sur un tempérament égal donné.

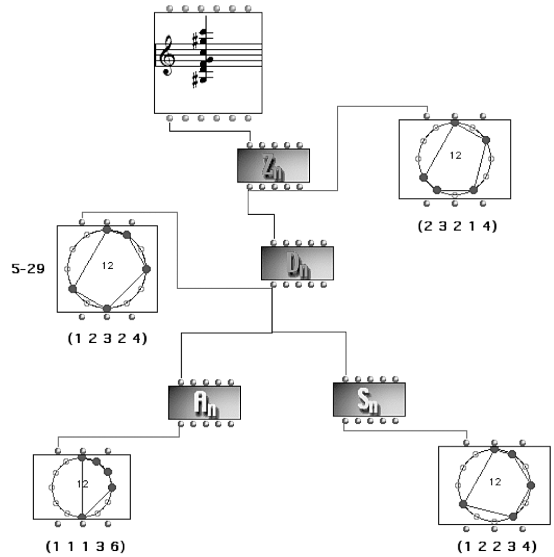


FIGURE 5 Le *Tonnetz* (ou réseau des notes), avec les trois transformations de base – R, P et L – permettant de passer d'un accord majeur à l'accord mineur correspondant, ayant deux notes en commun avec l'accord de départ et une troisième note obtenue par mouvement de demi-ton ou de ton (ascendant ou descendant).

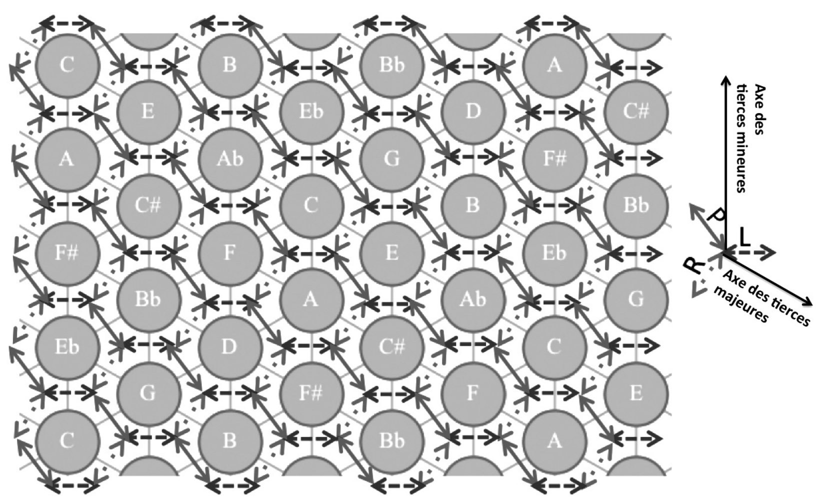
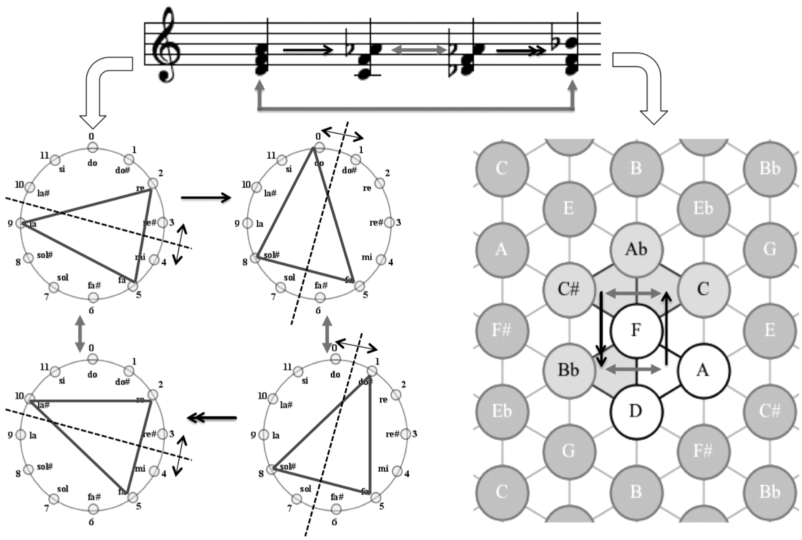


FIGURE 6 Une même progression harmonique analysée à l'aide de la représentation circulaire (à gauche) et du *Tonnetz* (à droite).



La figure ci-dessus (figure 6) montre un exemple de progression d'accords analysée à l'aide de la représentation circulaire (à gauche) et du *Tonnetz* (à droite)[30].

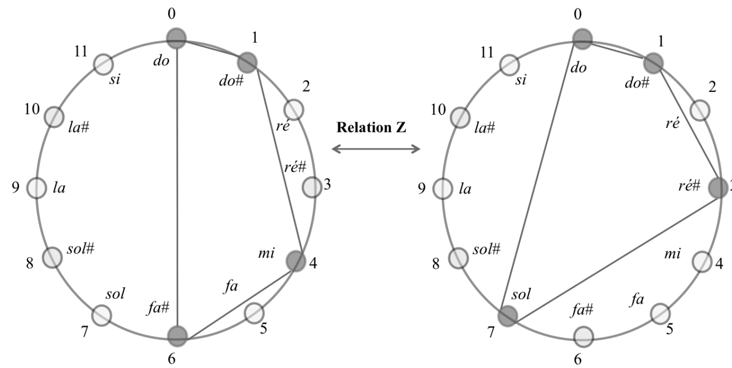
L'approche paradigmatique est élégante mais elle est loin de rendre compte de toute relation d'équivalence pertinente d'un point de vue musical. Un contre-exemple, qui constitue également un problème « mathémusical » auquel nous nous sommes beaucoup intéressé, concerne ce qu'on appelle en cristallographie l'homométrie, c'est-à-dire la propriété commune à deux cristaux ayant le même spectre à rayons X mais n'étant pas superposables via une transformation géométrique qui préserve les distances de ses éléments (isométrie). L'équivalent musical de l'homométrie est la relation Z, c'est-à-dire la propriété commune à deux accords ayant le même vecteur d'intervalles mais n'étant pas superposables via une transposition ou une inversion[31]. Elle concerne, par exemple, les deux tétracordes suivants (figure 7), qui sont appelés « tétracordes tous-intervalles » (*all-interval tetracords*), puisque chaque intervalle (de la seconde mineure jusqu'au triton) est présent dans les deux accords une et une seule fois, d'où le vecteur d'intervalles [1 1 1 1 1 1].

Il s'agit d'une propriété musicale que l'on retrouve, utilisée de façon explicite ou parfois inconsciente, chez de nombreux compositeurs, de Milton Babbitt à Magnus Lindberg, en passant par Pierre Boulez, Elliott Carter,

30. Dans les deux types de représentations, l'approche paradigmatique permet d'établir des équivalences entre des accords (à une transposition ou une inversion près). Dans le cas de l'équivalence à une transposition près, on utilise implicitement le groupe cyclique, correspondant à des rotations dans la représentation circulaire ou des translations dans le *Tonnetz*. Dans le cas de l'équivalence à une transposition et/ou une inversion près, cette équivalence est induite par le groupe diédral et elle correspond à une symétrie axiale à la fois dans la représentation circulaire et dans le *Tonnetz*.

31. Dans la terminologie de la *Set Theory*, le vecteur d'intervalles (*interval vector*) est un ensemble entre crochets [a_1, a_2, …, a_6] où les six nombres a_1, a_2, …, a_6 indiquent la multiplicité d'occurrences des six premiers intervalles (allant de la seconde mineure jusqu'au triton) à l'intérieur de l'accord. Le lecteur intéressé par une description formelle de cette propriété pourra se référer à l'article de Mandereau *et al.*, 2011. Notons que le problème d'une classification exhaustive des accords en relation Z dans un tempérament (égal) quelconque reste un problème ouvert.

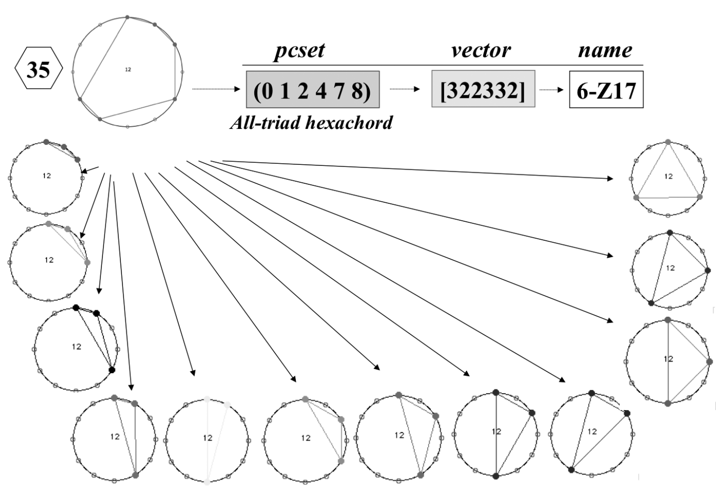
FIGURE 7 Deux tétracordes en relation Z, correspondant respectivement aux ensembles des classes des hauteurs ayant comme vecteur d'intervalles l'ensemble [1 1 1 1 1 1], ce qui s'exprime musicalement en disant que chaque classe d'intervalles, de la seconde mineure (entre *do* et *do#*) au triton (entre *do* et *fa#* pour le premier tétracorde ou entre *do#* et *sol* pour le deuxième tétracorde) est contenue exactement une fois dans chaque tétracorde.



George Benjamin et, tout récemment, Tom Johnson. La musique d'Elliott Carter, par exemple, fait large usage de la relation Z, notamment dans plusieurs pièces des années 1990 où le compositeur utilise en particulier un hexacorde ayant la propriété remarquable de contenir la totalité des 12 accords de trois notes (à une transposition et/ou inversion près), d'où l'appellation hexacorde « toutes-triades » (*all-triads hexachord*) (figure 8)[32].

32. S'agissant d'une propriété concernant les ensembles des classes de hauteur, l'inclusion doit être considérée à une transposition/inversion près. L'hexacorde toutes-triades est indiqué avec l'ensemble correspondant des classes de hauteur (*pcset*), le vecteur d'intervalles (*vector*) et son label dans la table d'Allen Forte (*name*).

FIGURE 8 Hexacorde ayant la propriété de contenir l'ensemble des 12 accords de trois notes répertoriés dans le catalogue de la *Set Theory*.



Comme l'indique son label 6-Z17 dans le catalogue de la *Set Theory*, il s'agit de l'hexacorde (d'où le 6) qui est en position 17 dans la liste des possibles hexacordes, avec la lettre Z indiquant qu'il a la propriété d'être en relation Z avec un autre accord de six notes (plus exactement, il s'agit de l'accord encadré en pointillé en figure 9). La pièce pour piano 90+ (1994), écrite par Carter à l'occasion du 90e anniversaire du compositeur Goffredo Petrassi, fait large usage de ce type de structure musicale. La figure suivante montre le début de la pièce avec une segmentation qui recouvre presque totalement l'intégralité des notes à l'aide uniquement de l'hexacorde « toutes-triades » (encadré en ligne continue) et de l'accord relié au premier par la relation Z (encadré en pointillé) (figure 9).

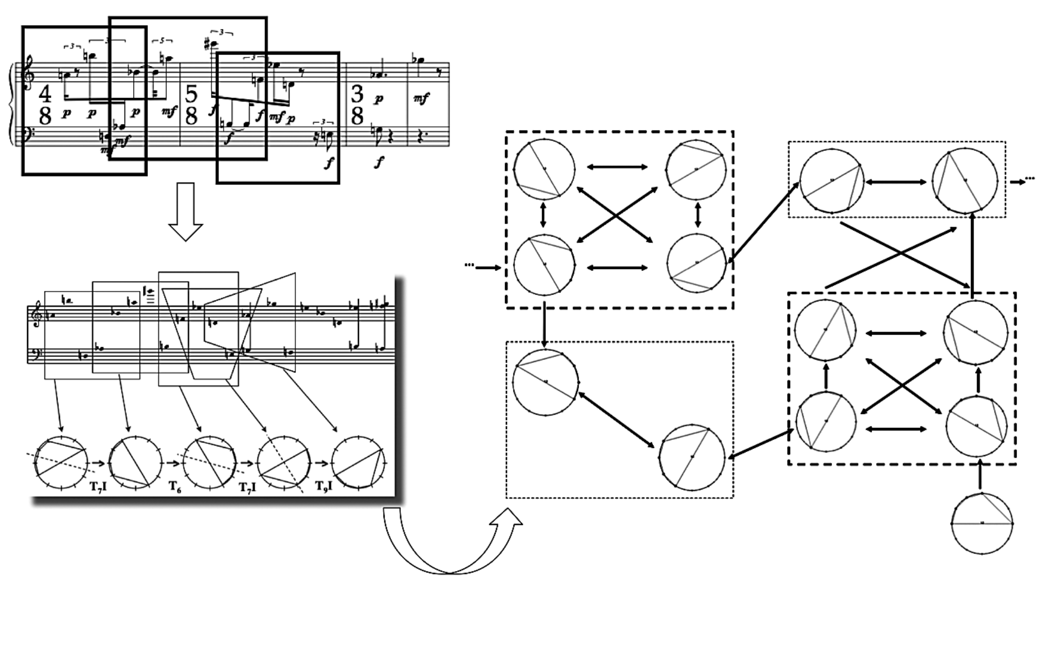
FIGURE 9 Utilisation de l'hexacorde « toutes-triades » (encadré en ligne continue) au début de la pièce pour piano *90+* d'Elliott Carter (éditions Boosey & Hawkes).

En guise de conclusion : ouverture sur des enjeux épistémologiques

À la différence de l'approche analytique utilisant la *Set Theory*, la théorie transformationnelle consiste à appliquer systématiquement le type de segmentation par *imbrication* dont on vient de voir un exemple avec la pièce d'Elliott Carter. Il s'agit donc, d'un point de vue mathématique, de segmenter une partition de musique à travers un *recouvrement* de sous-ensembles qui sont liés par des opérations musicales de transposition et d'inversion. Elle permet ainsi de créer un espace abstrait de relations entre les accords, cet espace pouvant décrire le déroulement temporel de la pièce (*progression transformationnelle*) ou bien une organisation spatiale des transformations algébrico-musicales (*réseau transformationnel*). La figure ci-dessous (figure 10) montre un exemple d'une démarche transformationnelle dans le cas de l'analyse du *Klavierstück III* (1953) de Karlheinz Stockhausen par David Lewin[33], une analyse que nous avons reprise en utilisant la représentation circulaire pour mettre en évidence les transformations musicales permettant de décrire la partition à partir d'une même structure de pentacorde. Ces transformations ne changent pas la nature « ensembliste » du pentacorde, car les cinq formes sont « équivalentes » à une transposition ou une inversion près (ou une com-

33. Lewin, [1993]2007. Le réseau transformationnel, représenté dans la partie droite, montre les différentes transformations entre les accords. Les transpositions sont indiquées avec des flèches simples (unidirectionnelles) tandis que les inversions le sont avec des flèches doubles ou bidirectionnelles.

FIGURE 10 Segmentation par imbrication et progression/réseau transformationnels associés à l'aide de la représentation circulaire dans le *Klavierstück III* (1953) de Karlheinz Stockhausen.



binaison des deux opérations), mais elles « structurent » le matériau harmonique de la pièce à la fois dans son déploiement temporel et spatial.

Le dépassement du cadre strictement ensembliste de la *Set Theory* à l'aide d'une approche transformationnelle, avec la prise en compte du caractère spatial des formes temporelles, constitue un véritable tournant en analyse musicale. En effet, pour reprendre le titre du chapitre de *Musical Form and Transformation* consacré à l'analyse de *Klavierstück III* de Stockhausen par Lewin[34], l'analyse transformationnelle implique non seulement la *construction* d'un réseau d'ensembles de classes de hauteurs mais également l'*utilisation* de cette architecture formelle afin de dégager des critères de pertinence pour la perception des structures en jeu dans la pièce. L'intérêt de *construire* un réseau transformationnel réside ainsi dans la possibilité de l'*utiliser* à la fois pour « structurer » l'écoute par rapport à la singularité de l'œuvre analysée mais également pour établir des critères formels qui pourront servir pour aborder le problème de son interprétation. Cette construction s'appuie, en effet, sur une volonté implicite de l'analyste de rendre *intelligible* une logique musicale à l'œuvre dans la pièce analysée. Cette logique, comme nous l'avons vu, se concrétise à travers une mise en relation d'objets et de morphismes dans un espace abstrait de potentialités. Pour paraphraser la conclusion de Lewin, dans le cas des progressions transformationnelles, quand nous sommes à un point d'une telle progression, nous sommes à un *instant* précis du temps, de la *narration* de la pièce, tandis que dans le cas d'un réseau abstrait, nous sommes plutôt à un *point* bien défini à l'intérieur d'un *espace* créé par la pièce. Dans un réseau spatial, les différents événements musicaux « se déroulent à l'intérieur d'un univers bien défini de relations possibles tout en rendant l'espace abstrait de cet univers accessible à nos sensibilités. Autrement dit, l'histoire projette ce qu'on appelle traditionnellement la forme[35] ».

Par son substrat algébrique, on peut proposer de façon légitime, comme nous l'avons suggéré ailleurs[36], des rapprochements entre la théorie transformationnelle en analyse musicale et de nouveaux courants de la psychologie du développement ayant recours à la théorie mathématique des catégories[37]. Les morphismes, sorte de généralisations de la notion de fonction, permettent en effet « la prise en compte d'un aspect de la cognition logico-mathématique qui ne procède pas de la transformation du réel (opérations et groupements d'opérations) mais de la simple activité de *mise en relation*[38] ». Cette lecture de l'approche catégorielle éclaircit, à notre avis, un aspect fondamental de l'analyse musicale transformationnelle, à savoir à la fois le dépassement d'une vision taxinomique et ensembliste et l'attention portée vers les transformations, susceptibles de s'enchaîner non seulement selon un ordre qui respecte

34. « Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's *Klavierstück III* », *in* Lewin, [1993]2007, p. 16-67.

35. Lewin, [1993]2007, p. 41.

36. Voir Acotto et Andreatta, 2012.

37. Houdé, 1993.

38. Houdé et Miéville, 1993, p. 116.

le déroulement chronologique de la pièce mais aussi selon une « logique opératoire » créée par l'analyste[39].

À travers cette dualité, comme l'affirme Granger, « la saisie perceptive d'un phénomène se dédouble en acte de position d'objet et en un système d'opérations[40] ». On touche ici à l'articulation entre *rétention* et *protention* qui est constituante de la phénoménologie husserlienne, ce qui justifie l'appellation que nous avons proposée de cette approche en tant que démarche « phénoméno-structurale[41] » en analyse musicale. La *Set Theory*, dans sa version transformationnelle, représente ainsi une démarche grâce à laquelle on pourrait arriver à concilier certaines instances du structuralisme, avec d'autres orientations philosophiques, en particulier issues de la phénoménologie husserlienne. En effet, de même que « la phénoménologie husserlienne des mathématiques est structurale en ce qu'elle se fixe sur les invariances […] dont elle fait le cœur de l'objectité mathématique en tant qu'objectité formelle[42] », l'analyse transformationnelle est phénoménologique tout en étant structurale, le groupe de transformations qui opère sur l'espace musical étant confronté systématiquement au processus perceptif propre à la subjectivité de l'analyste. À partir de réflexions de philosophes et de mathématiciens sur la portée phénoménologique de l'activité mathématique contemporaine[43], le « mathémusicien » pourrait ainsi arriver à proposer un cadre conceptuel dont les enjeux épistémologiques dépassent largement, nous semble-t-il, l'activité musicologique.

39. On retrouve ainsi la dualité entre l'« objectal » (c'est-à-dire la composante ensembliste) et l'« opératoire », pour reprendre une polarité qui est au cœur de la pensée de l'épistémologue Gilles-Gaston Granger (1994).

40. Granger, 1994, p. 57.

41. Voir, en particulier, Andreatta, 2012, 2014.

42. Voir Benoist, 2007.

43. Voir, en particulier, Patras 2001, 2005, et Petitot, 1994.

BIBLIOGRAPHIE

Acotto, Edoardo et Andreatta, Moreno (2012), « Between Mind and Mathematics: Different Kinds of Computational Representations of Music », *Mathematics and Social Sciences*, nº 199, p. 9-26.

Adler, Guido (1885), « Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft », *Vierteljahresschrift für Musikwissenschaft*, vol. 1, p. 5-20.

Agon, Carlos (1998), *OpenMusic : un langage visuel pour la composition musicale assistée par ordinateur*, thèse de doctorat, Université Paris 6.

Agon, Carlos *et al.* (1999), « Computer Assisted Composition at Ircam: PatchWork & OpenMusic », *Computer Music Journal*, vol. 23, nº 5 (décembre), p. 59-72.

Agon, Carlos *et al.* (2011), *Mathematics and Computation in Music*, Third International Conference, MCM 2011, Paris, France (15-17 juin 2011), Lecture Notes in Computer Science, vol. 6726, Berlin, Springer.

Andreatta, Moreno (2003), *Méthodes algébriques en musique et musicologie du XXe siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels*, thèse de doctorat, EHESS/Ircam.

Andreatta, Moreno (2005), « Quelques aspects théoriques d'une approche algébrique en musique », *L'Ouvert*, nº 112, p. 1-18.

Andreatta, Moreno (2009), « Calcul algébrique et calcul catégoriel en musique : aspects théoriques et informatiques », *in* Laurent Pottier (dir.), *Le calcul de la musique : composition, modèles & outils*, Saint-Étienne, Publications de l'Université de Saint-Étienne, p. 429-477.

Andreatta, Moreno (2010), « *Mathematica est exercitium musicae* : la recherche "mathémusicale" et ses interactions avec les autres disciplines », habilitation à diriger des recherches en mathématiques, Institut de Recherche Mathématique Avancée (irma), Université de Strasbourg (22 octobre 2010), <http://repmus.ircam.fr/moreno/production> (consulté le 14 avril 2014).

Andreatta, Moreno (2012), « Mathématiques, musique et philosophie dans la tradition américaine : la filiation Babbitt/Lewin », *in* Moreno Andreatta, François Nicolas et Charles Alunni (dir.), *À la lumière des mathématiques et à l'ombre de la philosophie : dix ans de séminaire mamuphi*, Sampzon, Delatour France ; Paris, Ircam-Centre Pompidou, p. 51-74.

Andreatta, Moreno (2013), « Musique algorithmique », *in* Nicolas Donin et Laurent Feneyrou (dir.), *Théorie de la composition musicale au* xx*e siècle*, Lyon, Symétrie, p. 1239-1267.

Andreatta, Moreno (2014), « Autour de la *Set Theory* et de l'analyse de la musique atonale : démarche structurale et approche phénoménologique à partir des écrits de Célestin Deliège », *in* Valérie Dufour *et al.*, *Modernité musicale et musicologie critique*, collection de l'Académie, Bruxelles (à paraître).

Andreatta, Moreno et Chemillier, Marc (2007), « Modèles mathématiques pour l'informatique musicale (mmim) : outils théoriques et stratégies pédagogiques », *Actes des Journées d'Informatique Musicale*, Lyon, p. 113-123.

Assayag, Gérard, Feichtinger, Hans Georg et Rodrigues, José Francisco (dir.) (2002), *Mathematics and Music: A Diderot Mathematical Forum*, European Mathematical Society, Berlin, Springer.

Benoist, Jocelyn (2007), « Mettre les structures en mouvement : la phénoménologie et la dynamique de l'intuition conceptuelle. Sur la pertinence phénoménologique de la théorie des catégories », *in* Luciano Boi, Peter Kerszberg et Frédéric Patras (dir.), *Rediscovering Phenomenology: Phenomenological Essays on Mathematical Beings, Physical Reality, Perception and Consciousness*, Dordrecht, Springer, p. 339-355.

Bigo, Louis *et al.* (2013), « Computation and Visualization of Musical Structures in Chord-Based Simplicial Complexes », *Mathematics and Computation in Music*, Fourth International Conference, MCM 2013, McGill University, Montréal (12-14 juin 2013), Lecture Notes in Computer Science, vol. 7937, Berlin, Springer, p. 38-51.

Bourbaki, Nicolas (1948), « L'architecture des mathématiques », *in* François Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris, Cahiers du Sud, p. 35-47.

Corry, Leo (1996), *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Basel ; Boston, Birkhäuser Verlag.

Costère, Edmond (1954), *Lois et styles des harmonies musicales : genèse et caractères de la totalité des échelles, des gammes, des accords et des rythmes*, Paris, Presses universitaires de France.

Costère, Edmond (1962), *Mort ou transfigurations de l'harmonie*, Paris, Presses universitaires de France.

Estrada, Julio (2011), « La teoría *d1*, MúSIIC-Win y algunas aplicaciones al análisis musical : *Seis piezas para piano*, de Arnold Schoenberg », *in* Emilio Lluis-Puebla et Octavio A. Agustín-Aquino (dir.), *Memoirs of the Fourth International Seminar on Mathematical Music Theory*, vol. 4, p. 113-145.

Forte, Allen (1973), *The Structure of Atonal Music*, New Haven, Yale University Press.

Granger, Gilles-Gaston (1994), *Formes, opérations, objets*, Paris, Librairie Philosophique J. Vrin.

Greer, Taylor Aitken (1998), A *Question of Balance: Charles Seeger's Philosophy of Music*, Berkeley, University of California Press.

Hanslick, Eduard (1854), *Vom Musikalisch-Schönen*, Leipzig, Weigel.

Helmholtz, Hermann von (1863), *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, Braunschweig, Vieweg und Sohn.

Hilbert, David (1903), *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, B.G. Teubner.

Houdé, Olivier (1993), « La référence logico-mathématique en psychologie : entre méthode universelle et rationalité arrogante », *in* Olivier Houdé et Denis Miéville (dir.), *Pensée logico-mathématique, nouveaux objets interdisciplinaires*, Paris, Presses universitaires de France, p. 47-119.

Klein, Felix ([1872]1893), « Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen », *Mathematische Annalen*, vol. 43, nº 1, p. 63-100. Traduction française par Henri Eugène Padé : *Le programme d'Erlangen : considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Paris, Bordas [Gauthier-Villar], 1974.

Krömer, Ralf (2007), *Tool and Object: A History and Philosophy of Category Theory*, Basel, Birkhäuser.

Kuhn, Thomas S. (1962), *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago, University of Chicago Press.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1734), *Epistolae ad diversos*, vol. 1 (Christian Kortholt, dir.), Lipsiae [Leipzig], Breitkopf.

Lewin, David ([1987]2007), *Generalized Musical Intervals and Transformations*, Oxford ; New York, Oxford University Press.

Lewin, David ([1993]2007), « Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's *Klavierstück III* », *in* David Lewin, *Musical Form and Transformation: Four Analytic Essays*, Oxford ; New York, Oxford University Press, p. 16-67.

Mandereau, John *et al.* (2011), « Discrete Phase Retrieval in Musical Structures », *Journal of Mathematics and Music*, vol. 5, nº 2, p. 99-116.

Marquis, Jean-Pierre (2009), *From a Geometrical Point of View: A Study of the History and Philosophy of Category Theory*, Dordrecht, Springer.

Morris, Robert (1987), *Composition with Pitch-Classes: A Theory of Compositional Design*, New Haven, Yale University Press.

Motte-Haber, Helga de la (1982), *Systematische Musikwissenschaft* (*Neues Handbuch der Musikwissenschaft*, Band 10), Wiesbaden, Athenaion.

Patras, Frédéric (2001), *La pensée mathématique contemporaine*, Paris, Presses universitaires de France.

Patras, Frédéric (2005), « Phénoménologie et théorie des catégories », *in* Luciano Boi (dir.), *Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition: New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and Humanities*, Singapore, World Scientific.

Petitot, Jean (1994), « Phénoménologie computationnelle et objectivité morphologique », *in* Joëlle Proust et Élisabeth Schwartz (dir.), *La connaissance philosophique : essais sur l'œuvre de Gilles-Gaston Granger*, Paris, Presses universitaires de France, p. 213-248.

Rahn, John (1980), *Basic Atonal Theory*, New York, Longman.

Riotte, André et Mesnage, Marcel (2006), *Formalismes et modèles musicaux : un recueil de textes, 1963-1998*, 2 vol., Sampzon, Delatour France ; Paris, Ircam-Centre Pompidou.

Ruwet, Nicolas (1966), « Méthodes d'analyse en musicologie », *Revue belge de musicologie*, vol. xx, p. 65-90.

Seeger, Charles (1977), *Studies in Musicology, 1935-1975*, Berkeley, University of California Press.

Stumpf, Carl (1883), *Tonpsychologie*, vol. 1, Leipzig, Hirzel.

Vieru, Anatol (1980), *Cartea modurilor, 1* (*Le livre des modes, 1*), Bucarest, Ed. Muzicala.

Zalewski, Maciej (1972), *Harmonia teoretyczna*, Warszawa, PWSM.