**Nouveaux cahiers de la recherche en éducation**

# L'influence du contexte statistique sur le raisonnement proportionnel d'élèves du primaire
# The influence of statistical context on primary students' proportional reasoning
# La influencia del contexto estadístico sobre el razonamiento proporcional de los alumnos de primaria

Khoi Mai Huy, Laurent Theis and Claudine Mary

Volume 16, Number 2, 2013

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1029144ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1029144ar

See table of contents

Publisher(s)

Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke

ISSN

1911-8805 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Mai Huy, K., Theis, L. & Mary, C. (2013). L'influence du contexte statistique sur le raisonnement proportionnel d'élèves du primaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *16*(2), 112–146. https://doi.org/10.7202/1029144ar

Article abstract

The general purpose of this study is to describe and shed light on how a statistical context, characterized on one hand by non-linearity and on the other by a quasi-proportional relationship, influences proportional reasoning among students in the third cycle of primary school. Accordingly, we gave four problems to two teams of three students each. The results provide data on the influence of statistical context on primary students' proportional reasoning, as well as on the wealth of different avenues of reasoning used by the students, particularly in terms of the preponderance of averages and of statistical reasoning when solving problems of statistics and problems that involve quasi-proportional data.

Nouveaux c@hiers de la recherche en éducation
Vol. 16, nº 2, 2013

# L'influence du contexte statistique sur le raisonnement proportionnel d'élèves du primaire

**Khoi Mai Huy**
**Laurent Theis**
**Claudine Mary**
Université de Sherbrooke

## Résumé

L'objectif général de cette recherche[1] est de décrire et de comprendre de quelle manière le contexte statistique, caractérisé d'un côté par une non-linéarité et d'un autre côté par une relation de quasi-proportionnalité, influence le raisonnement proportionnel chez des élèves au 3e cycle du primaire. Pour ce faire, nous avons présenté quatre problèmes à deux équipes de trois élèves. Les résultats de notre recherche procurent des connaissances d'une part sur l'influence du contexte statistique sur le raisonnement proportionnel des élèves du primaire et d'autre part sur la richesse des différents raisonnements chez ces élèves, notamment de la prépondérance de la moyenne et du raisonnement statistique dans la résolution des problèmes statistiques et des problèmes impliquant des données quasi proportionnelles.

**Mots-clés:** didactique des mathématiques, statistique au primaire, raisonnement proportionnel, contexte statistique, résolution de problèmes

[1] Cette recherche a été réalisée dans le cadre des études de maîtrise du premier auteur de cet article.

## The influence of statistical context on primary students' proportional reasoning

### Abstract

The general purpose of this study is to describe and shed light on how a statistical context, characterized on one hand by non-linearity and on the other by a quasi-proportional relationship, influences proportional reasoning among students in the third cycle of primary school. Accordingly, we gave four problems to two teams of three students each. The results provide data on the influence of statistical context on primary students' proportional reasoning, as well as on the wealth of different avenues of reasoning used by the students, particularly in terms of the preponderance of averages and of statistical reasoning when solving problems of statistics and problems that involve quasi-proportional data.

**Keywords:** didactics of mathematics, statistics in primary school, proportional reasoning, statistical context, problem-solving

## La influencia del contexto estadístico sobre el razonamiento proporcional de los alumnos de primaria

### Resumen

El objetivo general de esta investigación es describir y comprender de qué manera el contexto estadístico, caracterizado, por un lado, por una no linealidad y, por otro lado, por una relación de casi proporcionalidad, influencia el razonamiento proporcional en alumnos del 3º ciclo de primaria. Para ello, presentamos cuatro problemas a dos equipos de tres alumnos. Los resultados de nuestra investigación proporcionan conocimientos, por una parte sobre la influencia del contexto estadístico sobre el razonamiento proporcional de los alumnos de primaria, y por otra parte sobre la riqueza de los distintos razonamientos en estos alumnos, en particular de la preponderancia de la media y del razonamiento estadístico en la resolución de problemas estadísticos y de problemas que implican datos casi proporcionales.

**Palabras clave:** didáctica de las matemáticas, estadística en la primaria, razonamiento proporcional, contexto estadístico, resolución de problemas

# 1. Introduction

Le raisonnement proportionnel est certainement important dans la vie quotidienne et dans les activités professionnelles. Dans plusieurs de domaines comme la géographie, la cartographie, la marine ou l'aviation, la compréhension et la maîtrise des situations proportionnelles sont indispensables, par exemple pour la lecture des cartes à différentes échelles, l'utilisation du GPS, etc. En mathématiques, les problèmes de taxes ou encore certaines situations de calcul de pourcentages, par exemple, impliquent un raisonnement proportionnel (Oliveira, 2005, 2008). L'importance de la notion de proportion dans les mathématiques fait en sorte que le raisonnement proportionnel chez les élèves a soulevé depuis longtemps l'intérêt de la recherche en didactique des mathématiques (Lo et Watanabe, 1997). À l'école primaire au Québec, le raisonnement proportionnel n'est pas traité comme concept mathématique explicite dans le Programme de formation de l'école québécoise (Ministère de l'éducation du Québec, 2001). Toutefois, nous le retrouvons, de manière implicite, dans les savoirs essentiels associés aux domaines mathématiques, comme la géométrie ou la mesure, dans le travail sur l'estimation et du mesurage, ou encore dans le travail sur les fractions et les pourcentages (p. 136-138). Par ailleurs, différentes recherches en didactique des mathématiques soulignent que la compréhension de la notion de proportion et le raisonnement proportionnel sont deux éléments importants dans le processus de développement des compétences mathématiques élémentaires chez les élèves (Karplus, Pulos et Stage, 1983; Lamon, 1995; Lo et Watanabe, 1997; Norton, 2005).

Certains auteurs soulignent également l'importance du raisonnement proportionnel pour l'apprentissage de la statistique (Cobb, 1999; Hammerman et Rubin, 2004; Mary et Theis, 2007; Shaughnessy, 2006; Watson et Shaughnessy, 2004). Plus précisément, ces auteurs mettent en relief l'importance du passage d'un raisonnement additif à un raisonnement multiplicatif pour assurer la transition à un raisonnement proportionnel et traiter de situations statistiques. En effet, la comparaison de groupes à effectifs différents se fait à l'aide d'un raisonnement proportionnel, en particulier par le passage au pourcentage.

Toutefois, les données statistiques se caractérisent par leur variabilité (Vermette, 2013). Comment cette variabilité interfère-t-elle dans le raisonnement des élèves? Cette spécificité des données statistiques nous a conduits à nous interroger sur l'influence du contexte statistique sur le raisonnement des élèves là où un raisonnement proportionnel peut être utilisé, en particulier lorsque deux groupes à effectifs différents doivent être comparés.

Dans la famille des problèmes qui peuvent convoquer un raisonnement proportionnel, nous pouvons anticiper que les élèves ont des conduites différentes selon les contextes, le type de relation en jeu, les nombres, etc. (Vergnaud, 1988). À la lumière des résultats d'une recherche antérieure réalisée par Mary et Theis (2007), nous formulons l'hypothèse que dans des problèmes statistiques, notamment dans des problèmes de comparaison de deux populations à effectifs différents, les élèves résistent à utiliser un raisonnement proportionnel compte tenu de la variabilité des données qui sont impliquées. C'est cette idée qui est à l'origine de notre travail. Comment se caractérisent les stratégies des élèves du 3$^{e}$ cycle du primaire dans le cas où ils sont confrontés à ces problèmes (comparaison de groupes à effectifs différents) comparativement à des problèmes de proportionnalité stricte?

## 2. Cadre conceptuel

Cette section comprend deux parties, l'une associée aux procédures de raisonnement proportionnel et l'autre au raisonnement multiplicatif en statistique et aux situations quasi proportionnelles.

### 2.1 Raisonnement proportionnel

Lo et Watanabe (1997) ont défini le raisonnement proportionnel comme une mise en relation importante qui fait intervenir la notion d'égalité entre deux rapports, donc qui implique une proportion. Par exemple, l'affirmation «Dans un dépanneur, une publicité indique que 3 boissons gazeuses d'une certaine marque coûtent 4 dollars, combien de boissons gazeuses de cette même marque peut-on alors acheter avec 8 dollars» décrit un rapport entre une quantité d'argent et la quantité de boissons gazeuses qu'on peut obtenir avec cette quantité d'argent. Cependant, le raisonnement proportionnel est nécessaire pour arriver à comprendre comment la relation multiplicative entre 4 dollars et 8 dollars influence le nombre de boissons gazeuses que l'on peut acheter. Dans le même sens, Norton (2005) a utilisé la notion de «raisonnement proportionnel» pour décrire les concepts et la pensée mathématiques nécessaires pour comprendre les notions de rapport et de proportion impliquant une relation multiplicative. Dans les recherches sur les procédures de résolution des problèmes de proportionnalité par des élèves, on répertorie deux principales classes de procédures de résolution*:* les procédures de type scalaire et les procédures de type fonction. Elles peuvent prendre différents noms selon les auteurs. Au sujet de ces deux types de procédure, René de Cotret (2007) précise*:*

«Ainsi, par exemple, la procédure scalaire, qui consiste à trouver le rapport entre les quantités de même nature et à reporter ce rapport sur les quantités correspondantes, est aussi appelée procédure de type *between* ou analogique. Il s'agit pour nous d'une procédure homogène.» (p. 16-17)

«La procédure fonction, elle, consiste à trouver le coefficient de proportionnalité entre les éléments en jeu et à appliquer ce coefficient à la valeur pour laquelle on cherche le correspondant. Elle porte aussi parfois le nom de procédure *within* ou analytique. Pour nous, il s'agit d'une procédure non homogène ou hétérogène.» (p. 17)

Dans une explication plus détaillée, avec l'exemple de la proportion $X_1/Y_1 = X/Y$, Y étant l'inconnue, elle distingue 4 procédures pour trouver Y:

- Procédures homogènes (ou scalaires)

Il s'agit des procédures caractérisées par la recherche d'une relation entre les X et le report de cette relation sur les Y.

- Procédures hétérogènes (ou fonctions)

Il s'agit des procédures caractérisées par la recherche d'une relation entre $X_1$ et $Y_1$ et le report de cette relation sur un autre couple (X, Y).

- Procédures de retour à l'unité

Elles consistent à trouver le couple $(1, Y_1/X_1)$ puis à trouver Y en multipliant X par $Y_1/X_1$. Elles peuvent être de nature scalaire ou fonction selon l'interprétation de celui qui résout le problème.

- Procédure du produit croisé

Pour toute proportion $X_1/Y_1 = X/Y$ alors $Y = Y_1 * X / X_1$

Par ailleurs, une autre procédure a été répertoriée chez des élèves du primaire, à savoir la procédure de type constructif ou *build-up* (Lo et Watanabe, 1997; Steinthorsdottir et Sriraman, 2009). Il s'agit d'une quantification correcte des relations de rapport. Avec le raisonnement *build-up*, les élèves additionnent de manière répétitive les nombres correspondants en conservant les rapports pour arriver à la réponse. Pour bien illustrer cette stratégie, considérons le problème suivant*:* «Une pension de chats a trouvé que 8 chats mangent 5 boîtes de nourriture par jour. Combien de boîtes de nourriture a-t-on besoin chaque jour pour nourrir 48 chats?». L'élève qui se sert de la stratégie constructive reconnaît le rapport 8:5 (à chaque fois que j'ai 8 chats, je dois avoir 5 boîtes). Il quantifierait cette relation de manière additive pour arriver à la solution en faisant, par exemple, un tableau de rapports:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CHATS | **8** | 16 | 24 | 32 | 40 | **48** |
| BOÎTES | **5** | 10 | 15 | 20 | 25 | **30** |

## 2.2 Raisonnement multiplicatif en statistique et situations quasi proportionnelles

Certaines situations peuvent être interprétées comme des situations de proportionnalité ou bien comme des situations statistiques à relation non strictement proportionnelle compte tenu de la variabilité des données. Pour illustrer ce propos, nous choisissons le problème des chats de Steinthorsdottir et Sriraman (2009). Le problème donné aux élèves d'une classe de la 5e année du primaire était le suivant: 2 boîtes de nourriture peuvent nourrir 6 chats, de combien de boîtes de nourriture a-t-on besoin pour nourrir 36 chats? (*Ibid*.).

Si l'on considère que les chats sont identiques (les chats sont les mêmes et ils mangent toujours la même quantité de nourriture), ce problème peut être posé comme un problème de proportionnalité stricte. C'est l'interprétation qu'en ont faite les auteurs de cette recherche. Les élèves ont trouvé que si 2 boîtes de nourriture peuvent nourrir 6 chats, alors 4 boîtes pourraient nourrir (exactement) 12 chats, et ainsi de suite. Cette solution a été approuvée par l'enseignant dans cette expérimentation.

Cependant, on pourrait considérer ce même problème comme une situation statistique. La prise en considération de variations peut alors influencer le raisonnement des élèves. En effet, le problème est différent si l'on considère que les chats ne sont pas identiques (6 chats mangent une telle quantité de nourriture, mais 6 autres chats ne mangent pas forcément la même quantité, ou l'un des chats pourrait manger plus qu'un autre) ou encore que les chats sont les mêmes, alors que leur appétit peut varier à chaque repas ou à chaque jour. Pour Saldanha et Thompson (2002), la statistique s'intéresse à des situations ou des problèmes «quasi proportionnels». Dans les problèmes statistiques, la relation entre les variables n'est pas proportionnelle, mais tout au plus quasi proportionnelle dans le sens qu'on fait comme si les grandeurs impliquées étaient dans une relation de proportionnalité. La consommation de nourriture de 6 chats n'est pas proportionnelle à celles de 12 (autres) chats en son sens strict, mais on recourt à un raisonnement proportionnel pour résoudre une telle situation statistique comme s'il s'agissait d'une relation proportionnelle.

Par ailleurs, pour Saldanha et Thompson (*Ibid.*), des échantillons multiples pourraient être considérés comme des miniversions de la population. Selon ces auteurs, l'échantillon est une miniversion quasi proportionnelle de la population. Elle n'est pas proportionnelle au sens strict, à cause de la variabilité inhérente au processus d'échantillonnage. Ces chercheurs affirment qu'une étape conceptuelle importante pour les élèves consiste, en inférences statistiques, à considérer un échantillon comme une version quasi proportionnelle à petite échelle d'une population plus grande. Nous étendons cette idée de quasi-proportionnalité de Saldanha et Thompson (*Ibid.*) aux problèmes de comparaison de deux groupes à effectifs différents comme dans celui des chats dans une version aux données individuelles visibles ou comme celui des porteurs de lunettes présenté ci-dessous, problèmes dans lesquels un raisonnement proportionnel permet de traiter une situation qui ne l'est pas au sens strict.

Mary et Theis (2007) ont demandé aux élèves d'une classe de niveaux mathématiques de 4e, 5e et 6e année du primaire si les enfants qui portent des lunettes écoutaient plus la télévision que les autres, sur la base des données statistiques recueillies lors d'une enquête faite dans cette classe de 20 élèves, auprès de 16 élèves porteurs de lunettes et 4 non-porteurs de lunettes. Deux variables statistiques étaient à considérer: le port de lunettes et le nombre d'heures de télévision. Mary et Theis répertorient différentes procédures d'élèves.

Certaines sont reliées directement à un raisonnement proportionnel en établissant les rapports nombre d'heures de télé/nombre de personnes qui portent (ou ne portent pas) de lunettes et en comparant les rapports. Des stratégies plus primitives sont aussi utilisées. Notons tout particulièrement celle consistant à «égaliser les groupes en élargissant le groupe de quatre individus à 16 en respectant les propriétés du groupe d'origine» (*Ibid.*, p. 591). Il s'agissait d'ajouter des individus en leur faisant correspondre un nombre d'heures de télé qui respectait approximativement le nombre d'heures de télé du groupe original. Par exemple, à un groupe d'individus qui regardent 4, 10, 20 et 30 heures de télé, je peux ajouter quatre individus qui regardent 5, 9, 22 et 30 heures de télé. Nous associons aussi cette stratégie au raisonnement proportionnel dans la mesure où elle permet de maintenir approximativement le rapport nombre d'heures de télé/nombre d'individus. Ici, toutefois, la stratégie prend en compte en quelque sorte la variabilité des données puisque les individus sont différenciés et les données sont individualisées, ce que masque le raisonnement proportionnel.

Dans notre recherche, nous avons utilisé le concept de quasi-proportionnalité pour exprimer:

- la quasi-proportionnalité comme relation entre échantillon et population dans une situation statistique à l'instar de Saldanha et Thompson (2002).
- la quasi-proportionnalité comme relation entre variables statistiques lorsqu'un modèle proportionnel est utilisé pour résoudre des problèmes bien que les grandeurs ou les variables ne soient pas strictement proportionnelles. Par exemple, dans des problèmes de comparaison de groupes à effectifs différents, on peut se servir d'un raisonnement proportionnel tout en étant conscient qu'il ne s'agit pas d'une proportionnalité stricte.

## 3. Méthodologie

L'objectif de recherche était de décrire et de comprendre comment se caractérisent les stratégies des élèves dans le cas où ils sont confrontés à ces problèmes de comparaison de groupes à effectifs différents comparativement à des problèmes de proportionnalité stricte. Les élèves de l'expérimentation formaient deux équipes composées chacune de trois élèves âgés de 11 ou 12 ans. Sur le plan des apprentissages en statistique, les élèves avaient été initiés aux pictogrammes et aux diagrammes à bandes au cours des années précédentes. Ils étaient également en mesure d'élaborer des tableaux de compilations des données et de faire le calcul de la moyenne[2].

Les deux équipes ont résolu quatre problèmes de comparaison. Lors de chaque rencontre[3], qui durait entre 40 et 60 minutes, un problème était présenté par le chercheur principal à l'une des deux équipes. Il s'en suivait une phase de travail individuel où chaque élève essayait de trouver une manière de résoudre le problème. Ensuite, pendant une phase de travail d'équipe, les trois élèves mettaient ensemble leurs stratégies et discutaient de leur pertinence et des erreurs éventuelles. À la fin de chaque rencontre, une entrevue-post semi-dirigée d'environ 5 minutes a été réalisé avec chaque élève afin qu'il ou elle puisse nous expliquer plus en détail certains éléments de sa stratégie individuelle ou encore de leurs discussions en équipe (Savoie-Zajc, 2008). Ces périodes ont été animées par le chercheur principal de cette recherche.

Les données des enregistrements vidéo, réalisés pendant la résolution des tâches et pendant les entrevues, étaient transcrites en verbatim. Il s'agissait ensuite de passer à la codification du matériel transcrit (Savoie-Zajc, 2004; Van der Maren, 1996). Nous avons opéré par analyse thématique ouverte, ce qui veut dire que nous avons déterminé *a priori* les thèmes en fonction de la problématique et du cadre conceptuel, mais nous analysions également en fonction de thèmes émergents (Paillé et Mucchielli, 2003). En d'autres termes, nous avons établi certains thèmes avant de passer à la codification. L'un des thèmes correspondait aux stratégies développées par les élèves, et l'autre thème porte sur les spécificités que nous

[2] Ces informations nous ont été fournies par l'enseignante de la classe avant l'expérimentation.
[3] Les rencontres ont eu lieu une ou deux fois par semaine selon les disponibilités de chaque équipe.

pouvons dégager des stratégies dans le contexte statistique des tâches. Le croisement de ces différentes données nous a menés à faire émerger des éléments pertinents qui nous ont permis de répondre à notre objectif de recherche qui porte sur l'influence du contexte statistique sur le raisonnement des élèves du primaire.

Comme annoncé plus haut, nous avons proposé quatre problèmes de comparaison aux élèves.

Le premier problème concernait la comparaison des taxes de produits aux prix différents. Il s'agissait d'une tâche de proportionnalité stricte.

Le deuxième et le troisième problèmes concernaient la comparaison de la consommation de nourriture de deux groupes de chats dont l'effectif est différent l'un de l'autre. Elles avaient la même structure et posaient la même question, à savoir lequel des deux groupes de chats, avec 2 chats dans l'un et avec 5 chats dans l'autre, était le plus gourmand. Dans le deuxième problème, les données individuelles des chats étaient invisibles, ce qui favorisait davantage un raisonnement proportionnel. Dans le troisième problème, les données individuelles des chats étaient visibles, ce qui pourrait favoriser davantage un raisonnement statistique.

Le quatrième et dernier problème était issu d'une enquête faite dans cette classe. Tous les élèves devaient répondre à un certain nombre de questions portant sur leurs caractéristiques personnelles (sexe, couleurs de cheveux, date de naissance, port de lunettes, etc.) et certaines habitudes de vie (nombres d'heures de télévision par semaine, heure du lever, etc.). Les variables du questionnaire ont été choisies afin de pouvoir formuler une question avec la comparaison de deux ensembles de données à effectifs différents. Nous avons posé aux équipes la question suivante: «Dans ta classe, est-ce que ceux qui ont les cheveux blonds sont nés plus tard dans l'année que ceux qui ont les cheveux bruns?».

Toutes les tâches seront analysées plus en profondeur dans la section suivante.

# 4. Description des résultats

Dans cette section, nous présentons les réponses formulées par les deux équipes au problème de la comparaison des taxes, aux deux problèmes de comparaison de nourriture des chats, et finalement au problème des couleurs des cheveux et des mois de naissances.

## 4.1 Tâche de proportionnalité stricte: le problème de la comparaison des taxes

### 4.1.1 Analyse de la tâche

Le problème de proportionnalité que nous avons proposé aux élèves était une situation de taxes.

«Dans un magasin en Jamaïque, un lecteur DVD coûte 50 dollars hors taxes. Les taxes s'élèvent à 7 dollars. Lors d'un voyage à Madagascar, tu vois un lecteur DVD coûtant 125 dollars hors taxes, les taxes s'élèvent à 15 dollars. Dans quel pays les taxes de ton produit sont plus élevées? Justifie ta réponse.»

Il s'agissait d'une tâche de proportionnalité stricte[4], c'est-à-dire que le montant des taxes à payer était proportionnel au prix d'achat. Les taxes en Jamaïque s'élevaient à 14 % du prix de départ hors taxes. Les taxes à Madagascar s'élevaient à 12 % du prix de départ. De plus, les données de la tâche ont été choisies telles que l'un des prix ne soit pas un multiple de l'autre. L'une des stratégies des élèves pouvait consister en la comparaison de deux rapports 7:50 et 15:125. Cette comparaison pourrait se faire par une procédure scalaire ou par une procédure fonction.

Ces prix ne sont pas réels, mais ils sont choisis pour être réalistes: si nous allions dans un magasin, nous pourrions trouver des prix qui correspondraient bien aux données dans la tâche.

[4] En supposant que les élèves sachent que la taxe ne change pas en fonction du prix ou de la nature de la marchandise.

### 4.1.2 Résumé des stratégies d'élèves

**Les réponses formulées par les élèves de l'équipe 1 (André, Gustave et Olindo)**

Cette équipe a eu recours à différentes procédures associées au raisonnement proportionnel, comme les procédures homogènes et hétérogènes (René de Cotret, 2007).

Au début de l'activité, dans une phase de travail individuel, chaque élève de l'équipe développait sa façon de résoudre le problème. Ensuite, dans la phase de travail d'équipe, ils discutaient ensemble de leurs stratégies individuelles.

Olindo: J'ai essayé de trouver le pourcentage de la taxe sur les deux prix…. Les taxes en Jamaïque sont plus chères que j'ai estimé au début. J'ai estimé…ben, j'ai estimé là… avec mon cerveau puis j'ai pensé.

André: J'ai égalisé un peu les deux prix. Le 50 puis 125.50 fois 2 donne 100, puis 25 c'est la moitié de 50, c'est donc point 5. La réponse, ça donne donc 2.5. Puis j'ai fait 7 fois 2.5 égal à 17.50, donc la taxe de Jamaïque est plus élevée que celle de Madagascar.

Gustave: Moi je ne sais pas, mais j'ai fait la même affaire que toi [André]. Ce que j'ai fait c'est que 125 c'est 2 fois et demie de 50, donc on va faire la même chose pour les taxes s'ils sont… si les deux taxes sont égales…On va arriver au même résultat... 7 fois 2.5 puis ça m'a donné 17 virgule 5. Puis les taxes de Madagascar sont 15 dollars donc les taxes en Jamaïque sont plus chères.

Le raisonnement d'André est un raisonnement proportionnel de type homogène scalaire qui se situe dans une logique multiplicative (René de Cotret, 2007). En effet, il calcule le rapport entre les quantités de même nature (prix hors taxes) en décomposant de manière linéaire scalaire 125 (prix hors taxes du DVD à Madagascar) en 100 (= 50 X 2) + 25 (= 50 X 0.5) et trouve que le prix hors taxes à Madagascar est 2.5 fois celui en Jamaïque. Il reporte ensuite ce rapport sur les quantités correspondantes (les taxes). André transpose correctement ce rapport de 2.5 sur les taxes, car il calcule ensuite «7 fois 2.5 égal à 17.50».

En ce qui concerne Gustave, sa stratégie est semblable à celle d'André. Cependant, il exprimait tout de suite le facteur multiplicatif de 2.5 pour trouver les taxes en Jamaïque pour un même prix hors taxes de 125 $. Il s'agit ici aussi d'une procédure scalaire (ou homogène) (René de Cotret, 2007).

Quant à Olindo, il estime le rapport des taxes pour trouver les pourcentages. Sa stratégie n'est pas développée davantage et il n'aboutit pas à une réponse adéquate.

**Les réponses formulées par les élèves de l'équipe 2 (Amanda, Laura et Carole)**

En ce qui concerne l'équipe 2, le problème des taxes a donné lieu à un raisonnement en termes de rapport et de pourcentages avec l'idée de trouver un dénominateur commun.

L'une des élèves de cette équipe, Amanda, a développé une stratégie erronée. Elle n'a fait que comparer les valeurs des taxes, ce qui l'a amené à la réponse que 15 $ est plus élevé que 7 $. En effet, sa réponse complète à cette tâche est: «Les taxes sont plus élevées à Madagascar, car ils sont de 15 $ tandis que les taxes de Jamaïque sont de 7 $». Ainsi, son erreur réside dans la comparaison des valeurs des taxes, sans les mettre en rapport avec les prix correspondants hors taxes. Amanda ne tient pas compte du rapport entre taxes et prix hors taxes (7 par rapport à 50 par exemple). Cette erreur peut provenir d'une mauvaise interprétation de la question, qui était «dans quel pays les taxes de ton produit sont plus élevées». Ainsi, l'élève peut avoir interprété la question comme une demande de comparaison des deux nombres déjà donnés dans l'énoncé.

Pour sa part, Carole a calculé le rapport «prix hors taxes/taxes» en divisant le prix hors taxes de chaque pays par les taxes correspondantes. Elle a calculé donc 50:7 puis 125:5.

> Carole: Pour le 1er, j'ai fait des divisions. J'ai fait 50 divisé par 7, ça m'a donné 9.14. Ici, je me dis, à Madagascar, vu que le chiffre est plus petit.

Tout d'abord, soulignons que 9.14 est une erreur de calcul, puisque 50:7 = 7.14.

Reprenons le raisonnement proportionnel de Carole, mais avec des rapports exacts, on trouve alors un rapport de 7.14 (arrondi) pour 50:7, et de 8.33 (arrondi) pour 125:15. Carole a trouvé implicitement le montant correspondant à 1 $ de taxes. On peut alors conclure qu'à Madagascar le rapport «prix hors taxes/taxes» est plus élevé qu'en Jamaïque. Nous pouvons associer cette procédure au type fonction (hétérogène) ou au type retour à l'unité.

De son côté, Laura a considéré explicitement les taxes par rapport au prix hors taxes, plus précisément en termes de pourcentages. Par une procédure homogène, elle a trouvé 14 % de taxes pour la Jamaïque (d'abord elle a calculé 50 x 2 = 100; puis 7 x 2 = 14).


Figure 1. Calculs de pourcentages de Laura

Laura: J'ai essayé de mettre en pourcentages, pour mettre sur 100. Donc, j'ai fait 50 sur 100, ça fait fois 2, donc ça fait 14 % de taxes en Jamaïque. J'ai fait la même chose à Madagascar. Là il fallait que je divise, mais j'ai trouvé 12 % de taxes à Madagascar. Je pense que c'est en Jamaïque que les taxes sont plus élevées.

Pour Madagascar, elle a utilisé la même procédure en transformant une taxe de 15 $ pour 125 $ en pourcentage, ayant recours à des fractions équivalentes en multipliant et en divisant le numérateur 15 et le dénominateur 125 par le même nombre (elle a calculé 125 x 100:125 = 100 au dénominateur, puis 15 x 100:125 = 12 au numérateur). Elle a donc trouvé 12/100 ce qui correspond à 12 % de taxes.

## 4.2 Tâches hybrides: les deux problèmes de comparaison de nourriture des chats

Dans cette section, nous présentons d'abord l'analyse *a priori* des deux tâches sur la comparaison de la consommation de nourriture de 2 groupes de chats dont l'effectif est différent l'un de l'autre. L'une des 2 tâches, la tâche hybride 1 contient des données non visibles, et l'autre tâche hybride 2 contient des données visibles de la consommation individuelle de nourriture des chats. Par la suite, nous présenterons une analyse des stratégies, en premier lieu des élèves de l'équipe 1, et en deuxième lieu, des élèves de l'équipe 2, dans l'ordre où chaque équipe a réalisé ces tâches.

### 4.2.1 Analyse de la tâche hybride 1 avec des données non visibles

Il s'agissait d'une tâche adaptée du problème des chats de Steinthorsdottir et Sriraman (2009). La question posée aux élèves était: «Si mes 2 chats mangent 180 grammes de nourriture et si les 5 chats de mon voisin mangent 460 grammes de nourriture, qui sont les chats les plus gourmands? Justifie ta réponse.»

La particularité de cette tâche est qu'elle ne donne pas accès aux données individuelles de chaque chat et que, d'une certaine façon, la variation des consommations des chats reste invisible. En choisissant cette tâche hybride 1, nous prévoyions chez les élèves des stratégies de raisonnement proportionnel et des discussions autour de la proportion. *A priori*, nous ne nous attendions pas à ce que les élèves discutent des variations possibles, comme ce serait le cas dans une tâche statistique.

### 4.2.2 Analyse de la tâche hybride 2 avec des données visibles

Cette tâche demande la comparaison de la consommation de nourriture de deux groupes de chats. La formulation avec données individuelles visibles devait favoriser la dimension statistique de cette tâche. En effet, nous avons supposé que la tâche permettrait une discussion autour de la variation des données de la tâche. Les élèves seraient davantage susceptibles d'argumenter en tenant compte de ces variations et de la quasi-proportionnalité pour résoudre la tâche:

«Lisa et Marie sont voisines et elles ont toutes les deux des chats. Lisa possède deux chats, Nono et Nonou. Aujourd'hui, Lisa a noté la consommation de nourriture de ses chats dans un tableau:

| | |
|---|---|
| **Nono** | 85 grammes |
| **Nonou** | 95 grammes |

Marie a cinq chats, Tito, Titi, Toutou, Tata et Tatou. Marie donne la même sorte de nourriture à ses chats que Lisa. Aujourd'hui, elle a noté également dans un tableau la consommation de nourriture de ses chats:

| | |
|---|---|
| **Tito** | 78 grammes |
| **Titi** | 75 grammes |
| **Toutou** | 93 grammes |
| **Tata** | 88 grammes |
| **Tatou** | 96 grammes |

Les deux filles comparent les données de leurs tableaux et se demandent quels chats sont les plus gourmands. Justifie ta réponse.»

Cette tâche contenait ainsi une variabilité visible des données individuelles. Cette tâche, en plus des stratégies et des discussions par rapport à la proportionnalité, permettait un raisonnement qui prenait en considération la distribution des données. La résolution de ce problème par la moyenne était également possible, en raison de la présence des données visibles et variées.

### 4.2.3 Analyse des stratégies de l'équipe 1 (André, Gustave et Olindo)

L'équipe 1 a réalisé d'abord la tâche hybride 2 avec des données visibles, et ensuite la tâche hybride 1 avec des données non visibles.

**Les réponses des élèves à la tâche hybride avec des données visibles**

Comme première stratégie, les trois élèves de cette équipe ont utilisé le calcul de la moyenne. Gustave explicite sa procédure de résolution qui consiste à trouver la quantité totale de nourriture mangée par les chats de chacune des filles, les 2 chats de Lisa et des 5 chats de Marie. Ensuite, cet élève a divisé par le nombre de chats de chaque fille, donc par 2 et par 5, afin de trouver la moyenne de la consommation de nourriture du chat de Lisa d'un côté, et celle du chat de Marie de l'autre côté.

Gustave: C'est une moyenne.
André: Ça plus ça?
Gustave: 85 plus 95 ça fait 180, divisé par 2 ça va faire au moins 90.
Olindo: Ben oui t'es bon!
Gustave: Ça, c'est qui? C'est Lisa…. Là ça fait…ok… (Il regarde sur la feuille avec les données.) Là ça va être compliqué. 78; 75; 93; 88 puis 96.

L'équipe a obtenu les moyennes exactes de la consommation de nourriture par chat de Marie, soit 86 grammes, et de Lisa, soit 90 grammes.

Ensuite, nous avons invité l'équipe à trouver une deuxième manière de résoudre cette tâche. Gustave a proposé celle de regrouper les nombres en paires et d'en calculer la moyenne. Puis il a suggéré de calculer la moyenne de ces paires à la fin:

> Gustave: On peut prendre la moitié de tout ça… (Il montre sur la feuille les nombres 85 et 95), ça va être facile…Parce qu'ensemble ça serait… il y a une différence de 10, donc la moyenne va être à 5. Si tu fais ça plus 5 ça fait 90, ça moins 5 ça fait 90, aussi. Alors, ça va être 90.

Gustave a calculé la moyenne de la consommation en nourriture de chaque paire de 2 chats. Par exemple, la moyenne de la consommation des chats Tito et Titi. La moyenne représente ici un nombre qui incarnerait le milieu des 2 nombres. Il ne s'agit alors pas de calculer la somme puis de diviser par l'effectif, selon la formule mathématique connue pour trouver une moyenne arithmétique, mais de chercher le nombre situé entre les deux nombres avec des écarts égaux à ces deux nombres. De manière générale, la stratégie utilisée consiste à regrouper les chats en paires aux valeurs proches, par exemple dans le cas des chats de Marie 78 avec 75, puis 93 avec 96. Cependant, avec cette stratégie, il leur reste une 5$^{e}$ valeur (88) à prendre en considération qui est problématique et qui les mène à un calcul erroné. En effet, la stratégie est erronée, car elle consiste à calculer la moyenne de moyennes, mais un nombre parmi ceux qui sont utilisés n'est pas une moyenne de deux nombres.

### Les réponses des élèves à la tâche hybride avec des données non visibles

Pour réaliser cette tâche, Gustave a proposé une première procédure de résolution. Il s'agissait de calculer la «moyenne», divisant 180 grammes par 2 pour obtenir 90 grammes et divisant 460 grammes par 5 pour obtenir 92 grammes et de constater que ce sont ces derniers chats qui sont les plus gourmands. André et Olindo ont résolu ce problème par la moyenne également[5].

[5] L'équipe s'entendait pour écrire une réponse ensemble: «On a divisé le nombre de grammes par le nombre de chats pour "compléter" la moyenne.» Cette stratégie pourrait aussi être interprétée comme un retour à l'unité. Par contre, les élèves ont explicitement utilisé le terme «moyenne» pour la qualifier.

En entrevues individuelles à propos des problèmes des chats, nous avons demandé à Gustave et à André si la consommation de nourriture des chats pouvait changer et quelle influence aurait alors ce changement. Nous soulignons ici le fait que ces questions étaient posées pendant l'entrevue de manière explicite et qu'il ne s'agissait donc pas d'une explication spontanée de ces élèves. Gustave a expliqué comment il interprétait le contexte de la tâche des chats:

> Gustave: Pour plusieurs chats. Puis 180 grammes pour 2 chats c'est comme si on mettait 180 grammes dans un plat, puis les deux chats ils mangeaient dedans.

L'idée des bols ou des plats de nourriture était pertinente, car elle permettait d'illustrer la situation mathématique et elle reflétait une situation de la réalité, celle où les chats mangent dans un même contenant. Ce contexte de partage de nourriture «dans un plat» a donné l'occasion à l'élève d'expliquer la pertinence du calcul de la moyenne pour résoudre ce problème.

Nous avons posé également la question de la variabilité possible des données d'une journée à l'autre. En effet, lors des entrevues-post, nous voulions confronter les élèves à la variabilité des données statistiques pour voir quel serait l'impact de cette considération sur leur raisonnement.

> I: Dans la tâche 1 c'est écrit aujourd'hui, tu vois, est-ce que tu penses que les chats sont… qu'est-ce que ça peut changer… aujourd'hui, qu'est-ce que…est-ce qu'on peut dire dans la tâche 1 que les chats à Lisa mangent toujours moins que les chats à Marie ?
>
> Gustave: Non, peut-être que ça change un jour.
>
> I: Pourquoi ?
>
> Gustave: Euh je ne sais pas, mais c'est comme les humains, peut-être on a plus d'appétit un jour que l'autre… Ça dépend si c'est leur premier jour dans leur nouveau foyer… peut-être ils vont moins manger, il y en a peut-être qui vont arriver puis qui se mettent à manger beaucoup, beaucoup parce qu'ils n'ont pas assez mangé à leur faim dans l'animalerie. Et il y en a peut-être qui sont gênés puis ils vont moins manger.

Le contexte choisi de l'appétit était à la fois simple et pertinent, car il est indissociable de la consommation de la nourriture des êtres vivants et permet aussi de tenir compte de la variabilité.

De son côté, en entrevue-post, André nous a également précisé la stratégie qu'il a employée lors du travail d'équipe.

I: Regarde ici, dans la tâche c'est précisé aujourd'hui, les filles mesurent, disons aujourd'hui combien les chats mangent. Penses-tu que ça change ou est-ce que c'est toujours la même chose? Là vous avez la réponse, c'est 90, donc les chats à Lisa mangent plus. Ok, mais penses-tu que c'est toujours la même chose?

André: Euh… qu'ils mangent toujours 90 grammes chaque jour?...Sûrement pas. C'est sûr qu'il y a des jours que.... c'est sûr … moi j'ai des chats chez moi, donc ils ne mangent pas toujours un plat de bouffe chaque jour.

I: Donc qu'est-ce que ça va changer pour la tâche? Pour le problème?

André: Ben, peut-être qu'admettons une journée c'est ceux-là ils vont manger, comme Nono[6], ils vont manger admettons 80 grammes, puis l'autre, ça se peut qu'il mange 50 grammes donc ça réduit... Puis eux, je ne sais pas, le 75 il pourrait augmenter pour manger 80 à la place de 75 donc ça changerait la donne puis ça ferait que les chats de Marie mangeraient plus que…

I: Ah OK.

André : C'est sûr que vu que c'est aujourd'hui c'est eux, mais demain ça pourrait être eux.

I: Donc oui, donc la réponse peut changer quoi...

André: Oui, la réponse peut changer selon les jours.

Remarquons ici que ces réponses des élèves ainsi que leur non-considération des variations dans leurs solutions pourraient être interprétées comme un effet de contrat didactique[7] (Brousseau, 1998) à propos de la prise en compte du contexte. Cet effet

[6] Remarquons que cette équipe a d'abord résolu la tâche hybride 2, dans laquelle les données individuelles étaient présentes et ensuite la tâche hybride 1. Ici André se réfère aux noms des chats de la tâche hybride 2 (voir plus tard).

[7] Brousseau (1998) définit le contrat didactique comme étant «l'ensemble des comportements (spécifiques

s'expliquerait dans le sens que, dans les autres tâches qu'on leur propose à l'école, on ne leur demande pas de tenir compte du contexte de cette manière, c'est-à-dire de réfléchir et de discuter sur la variabilité possible des données d'une situation qui n'est pas statistique *a priori*. Ce n'était qu'à notre questionnement pendant les entrevues-post concernant la variabilité de la consommation individuelle de nourriture des chats que les élèves de cette équipe discutaient à propos de cette variabilité.

### 4.2.4 Analyse des stratégies de l'équipe 2 (Amanda, Laura et Carole)

À l'inverse de l'équipe 1, l'équipe 2 devait d'abord réaliser la tâche hybride 1 avec des données non visibles, et ensuite la tâche hybride 2 avec des données visibles. Nous voulions voir si cet inversement provoquerait des changements au niveau du raisonnement de cette équipe par rapport à l'autre équipe.

**Les réponses des élèves à la tâche hybride avec des données non visibles**

Les trois élèves ont adopté une première procédure identique voulant trouver combien «un chat mange» (expression de Carole). Les trois élèves ont calculé la consommation de nourriture par chat pour chaque groupe de chats, ont comparé les deux résultats obtenus et ont conclu que le voisin, dont les 5 chats mangent 92 grammes par chat, aurait les chats les plus gourmands. Nous pouvons caractériser cette procédure comme un retour à l'unité pour comparer le groupe de 2 chats au groupe de 5 chats, combien «un chat mange» dans chaque groupe. Amanda et Carole n'ont pas trouvé d'autre façon de résoudre.

De son côté, Laura, l'élève qui a proposé le plus de procédures de résolution possible dans son équipe, a présenté également une deuxième manière visant à mettre sous forme de fractions le rapport entre le nombre de chats et la consommation de nourriture puis à produire des «fractions équivalentes» pour les comparer.

> Laura: Je mettais 5 chats, 2 chats, puis la plus élevée était les 5 chats évidemment, mais j'ai fait pour que 2 se rendent à 5. Il fallait faire une multiplication, mais je ne sais pas, je suis en train de la trouver. Puis je

[des connaissances enseignées]) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître.» Cependant, nous n'analysons pas nos données en fonction du contrat didactique, car notre recherche ne porte pas sur ces relations.

me suis dit si je fais fois 2.5; et dans l'autre sens, j'ai fait 180 fois 2.5 pour avoir des fractions équivalentes.

L'idée de «fractions équivalentes» dans le raisonnement de Laura est intéressante et pertinente, car elle montre que Laura avait l'intention de conserver le même rapport entre le nombre de chats (2 pour 5 ou 5 pour 2) et de le reporter, en multipliant le dénominateur et le numérateur par le même nombre 2.5 pour obtenir la consommation équivalente de 5 chats. Il s'agit d'une procédure homogène ou scalaire (René de Cotret, 2007).

Par ailleurs, ce qui était unique parmi les deux équipes, c'était que bien que la tâche soit présentée de la même façon qu'une tâche de comparaison impliquant une proportionnalité stricte, et que Laura n'avait pas résolu la tâche hybride 2 avant, elle a égalisé le nombre de chats, «même si ça ne se multiplie pas». C'est ce que nous voyons dans l'extrait suivant:

Laura: Parce que j'ai essayé de prendre 2 chats, puis, même si ça ne se multiplie pas, mais à égaliser pour voir lesquels mangent le plus de nourriture.

Le propos «même si ça ne se multiplie pas, mais à égaliser pour voir lesquels mangent le plus de nourriture» montre, pensons-nous, l'influence du caractère quasi proportionnel de la situation. Elle a multiplié pour pouvoir comparer, même si les chats ne se multiplient pas.

I: Là tu as dit, même si ça ne se multiplie pas…ça veut dire quoi?

Laura: Oui, c'est que dans la vraie vie, tu ne peux pas multiplier les chats, mais c'est comme …ce que je faisais c'est 180 grammes par chat, … si c'était 5 chats au lieu de 2, on pourrait calculer plus facilement. C'est comme si j'essaie de mettre sous le même dénominateur commun pour les nombres de chats.

Laura a fait explicitement référence à la vraie vie pour dire que les chats ne se multiplieraient pas. Le traitement de la tâche comme étant strictement proportionnelle pourrait être interprété comme un effet de contrat didactique (Brousseau, 1998), car pour pouvoir répondre de manière explicite et adéquate à la question du problème, l'élève a multiplié la consommation de nourriture des chats, et par conséquent également le nombre de chats, alors qu'elle est consciente que dans la vraie vie, on ne peut pas «multiplier les chats». À cet effet, elle ne remet pas en cause la relation entre la quantité de nourriture et le nombre de chats (variabilité).

**Les réponses des élèves à la tâche hybride avec des données visibles**

Comme première stratégie, toute l'équipe opte pour la stratégie de calculer la moyenne de la consommation par chat pour les comparer. Elle a calculé la somme de la consommation des chats de chaque groupe, ensuite elles ont divisé chacune des 2 sommes trouvées par le nombre de chats respectif.

Pour sa part, Laura a eu recours à un raisonnement proportionnel passant par les fractions équivalentes. Ainsi, elle a proposé d'égaliser les 2 groupes de chats à 10 chats par des fractions équivalentes:

> Laura: Donc par exemple ça pourrait donner (elle regarde sur la feuille)… 180 grammes pour les 2 chats, de Lisa, donc je pense qu'on pourrait faire la même chose avec ceux de Marie. Ça a donné 430 grammes, donc 430 (elle calcule sur sa feuille en même temps) pour trouver le plus rapide des dénominateurs,... On fait fois 5 donc ça donne 10, donc chacun sur une fraction, après ça il faut qu'on fasse 180 fois 5 puis 430 fois 2… 900…donc, on a 900 pour les chats de Lisa. Puis ça donne 860 pour les chats de Marie. Donc je pense que ça marche quand même parce que ça nous donne une réponse[8].

Par ailleurs, il est important de souligner qu'aucune des élèves de cette équipe, ni de l'autre équipe non plus d'ailleurs, n'a soulevé la question du caractère quasi proportionnel du contexte de cette tâche. Alors que nous nous attendions *a priori* à une discussion de l'équipe autour du caractère quasi proportionnel quand Laura voulait rendre égaux les effectifs des 2 groupes de chats, cette discussion n'a pas eu lieu. Comme pour la tâche hybride 1, Laura a proposé ici d'égaliser les effectifs des 2 groupes de chats par des fractions équivalentes pour comparer leur consommation de nourriture. Cependant, pour cette tâche, Laura n'a pas considéré que rendre égaux les effectifs à 10 chats des 2 groupes serait problématique. Ce qui est cohérent avec les propos de Laura lors de la résolution de cette tâche avec des données visibles: «Donc je pense que ça marche quand même parce que ça nous donne une réponse.»

---

8 Soulignons ici l'effet de contrat didactique (Brousseau, 1998), car l'élève était consciente de répondre de manière adéquate à la demande de la tâche.

## 4.3 Tâche statistique avec les couleurs des cheveux

### 4.3.1 Analyse de la tâche

Après la compilation et l'évaluation des réponses obtenues grâce à une enquête auprès des élèves de la classe, nous avons retenu une question spécifique qui porte sur la comparaison de deux groupes d'élèves aux couleurs de cheveux différentes au regard de leur mois de naissance. En effet, les deux groupes inclus dans la question ont un effectifs différents, mais l'un est le multiple de l'autre (15 et 5) ce qui facilite un raisonnement proportionnel:

«Le sondage fait auprès de tous les 32 élèves de ta classe a donné qu'il y a 5 élèves avec des cheveux blonds et 15 élèves avec des cheveux bruns. Une des questions qui se posent est la suivante:

Dans ta classe, est-ce que ceux qui ont les cheveux blonds sont nés plus tard dans l'année que ceux qui ont les cheveux bruns?

Tu peux essayer toutes les stratégies. Tu peux utiliser des dessins, des tableaux, des graphiques, des calculs de toute sorte.

Explique ensuite ta réponse.»

| Couleur de cheveux | Mois de naissance |
|---|---|
| Blond 1 | Octobre |
| Blond 2 | Août |
| Blond 3 | Janvier |
| Blond 4 | Juin |
| Blond 5 | Août |

| Couleur de cheveux | Mois de naissance |
|---|---|
| Brun 1 | Novembre |
| Brun 2 | Octobre |
| Brun 3 | Janvier |
| Brun4 | Décembre |
| Brun5 | Novembre |
| Brun6 | Décembre |
| Brun7 | Octobre |
| Brun8 | Avril |
| Brun9 | Juillet |
| Brun 10 | Août |
| Brun11 | Avril |
| Brun12 | Mai |
| Brun13 | Septembre |
| Brun14 | Mars |
| Brun15 | Décembre |

Les données qualitatives ont été choisies pour éviter que les élèves aient simplement recours au calcul de la moyenne. Précisons ici la similitude entre cette tâche statistique et la tâche hybride 2. En effet, les deux tâches concernent la comparaison de deux groupes à effectifs différents. Les différences de la tâche statistique avec la tâche hybride sont, d'une part, de l'ordre de la nature des données, dans le sens où ces données statistiques sont réelles et ont été collectées auprès des élèves mêmes. D'autre part, ces données sont quantifiables, mais non quantifiées à l'avance. Les élèves doivent choisir une façon pour quantifier ces données, s'ils désirent le faire. Ou alors les élèves peuvent choisir la possibilité de faire une analyse de la distribution des données pour répondre à la question, qui éviterait de devoir quantifier.

### 4.3.2 Analyse des stratégies d'élèves

**Les réponses formulées par les élèves de l'équipe 1 (André, Gustave et Olindo)**

La stratégie des trois élèves consiste à quantifier les mois selon leur ordre et à calculer la moyenne des valeurs attribuées aux mois de naissance, janvier étant associé au nombre 1; février à 2; mars à 3; …; et décembre à 12.

Gustave a donné une interprétation de la moyenne 6.6 obtenue. Selon lui, 6.6 signifie que ceux qui ont les cheveux blonds seraient nés «à mi-juin à peu près», car 6 représentait le mois de juin et 6.6 étant proche de 6.5, représenterait la mi-juin. Gustave a interprété également la moyenne de 7.93 obtenue pour les bruns. Comme cette valeur était très proche de 8, cela signifiait donc pour lui que «les bruns sont nés à la fin juillet puis les blonds sont nés à la mi-juin, à la moitié de juin, à peu près.»

Par ailleurs, nous leur avons demandé de trouver une deuxième stratégie pour cette tâche. L'équipe 1 a résolu la tâche statistique en se concentrant sur les 2 groupes à effectifs différents (5 contre 15) par une multiplication par 3 du nombre de personnes chez les blonds pour obtenir des fractions équivalentes au dénominateur commun de 15. Il s'agit de la même stratégie multiplicative que Laura dans la tâche hybride 2.

Gustave: Mais comme il y avait juste 5 personnes, dans l'autre il y avait 15. Donc, on a fait fois 3 pour mettre équivalents, ça a donné 3 quinzièmes, donc ceux qui étaient nés plus tard c'était les bruns donc automatiquement les blonds sont nés plus tôt.

I: Est-ce qu'on peut mettre à égal comme ça les élèves ? Parce que tu as dit qu'ici c'est sur 15, ici c'est sur 5. Tu multiplies par 3 pour comparer, est-ce qu'on peut faire ça?

Gustave: Ben avec des nombres oui.

I: OK…

Gustave: C'est comme s'il y avait 3 fois l'élève 1, donc 3 fois le blond 1, 3 fois le blond 2; 3 fois le blond 3; 3 fois le blond 4; et 3 fois le blond 5.

I: OK.

Nous pouvons constater ici un raisonnement multiplicatif chez Gustave. Pour lui, égaliser de manière multiplicative les groupes à effectifs différents est possible, car il s'agit de nombres. Lorsque nous lui avons demandé de revenir, il a répondu: «C'est comme s'il y avait 3 fois l'élève 1, donc 3 fois le blond 1; 3 fois le blond 2; 3 fois le blond 3; 3 fois le blond 4; et 3 fois le blond 5.» Même s'il est question d'une relation de quasi-proportionnalité, l'élève explique à l'aide d'un raisonnement proportionnel, car il égalise en triplant chaque personne qui a des cheveux blonds. En entrevue individuelle, il explique alors qu'«on a fait comme si on clonait ces personnes-là 3 fois» ou encore qu'«on faisait comme 3 fois le même tableau». Ces hypothèses lui permettaient, pour cette relation de quasi-proportionnalité, de réaliser la tâche avec un raisonnement multiplicatif.

I: Est-ce qu'on peut cloner comme ça pour calculer? Ça donne du sens?

Gustave: Pour calculer ça a du sens parce qu'il faut égaliser les deux nombres, parce qu'il y en a un qui ont moins puis un qui ont plus … Ce n'est pas les mêmes, mais il faut les mettre à pied égal.

L'élève s'est servi du raisonnement proportionnel et multiplie chaque individu chez les blonds par 3 pour rendre leur effectif égal avec l'effectif des bruns, et il a émis l'hypothèse qu'«on a fait comme si on clonait ces personnes-là 3 fois». Cependant, nous nuançons ces propos en soulignant que l'élève a raisonné de cette manière seulement à la suite de notre intervention.

**Les réponses formulées par les élèves de l'équipe 2 (Amanda, Laura et Carole)**

Comme l'équipe 1, l'équipe 2 a développé la stratégie de quantification des mois. Ainsi, la stratégie de Laura consiste à quantifier les mois (janvier équivaut à 1; février équivaut à 2; mars équivaut à 3; etc.) pour pouvoir calculer la somme des nombres obtenus chez les bruns et chez les blonds et à diviser par l'effectif de chaque groupe pour obtenir la moyenne.

En travail d'équipe, l'équipe 2 a calculé que la somme obtenue pour les mois des blonds est de 33. Cette somme a été divisée par 5, autrement dit par le nombre de blonds, pour obtenir la «moyenne», pour citer Laura. L'équipe 2 a obtenu pour les blonds 6.6 comme moyenne et l'a arrondi à 7. Le fait d'arrondir était intéressant, car c'était un choix en fonction du contexte réel ou du fait que dans la vie réelle le mois «6.6» n'existe pas et qu'on est né soit en juin soit en juillet. En d'autres termes, parce qu'il n'y a pas de mois 6.6, et parce que 6.6 est plus proche de 7 (juillet) que de 6 (juin).

Laura: Mais il faut qu'on arrondisse à 7, parce qu'il s'agit d'un mois.

Amanda: Ah oui!

Carole: Donc c'est le mois de…juillet… puis on fait la même chose pour les cheveux bruns.

Pour la comparaison des deux moyennes obtenues, il est intéressant de remarquer que l'équipe n'a pas comparé directement ces 2 nombres, à savoir 6.6 pour les blonds et 7.9 pour les bruns, mais les a reconvertis, en mois, en les arrondissant et en les associant respectivement à nouveau au mois de juillet et au mois d'août. Soulignons ainsi que cette équipe fait un retour au contexte des mois de l'année pour mieux interpréter ses résultats afin de répondre à la question.

Laura a raisonné également en mettant en relation le nombre des blonds et le nombre des bruns: «Car un seul d'entre eux est né en janvier», ou «chez les bruns, il y a beaucoup de monde qui sont nés au début de l'année… en mars…en avril…»; «alors que là, la plupart [des blonds] sont nés à la fin de l'année sauf un seul est né en janvier...». Nous observons que Laura a exprimé la relation entre des comparaisons d'ordre quantitatif (un seul d'entre eux) et des comparaisons d'ordre qualitatif (la plupart; surtout; beaucoup de monde). Elle a montré donc un certain raisonnement plus nuancé qui serait de l'ordre de l'analyse de la distribution des données. Shaughnessy (2008) parle dans ce cas d'un raisonnement distributionnel: Les élèves manifestant un tel raisonnement combinent à la fois les valeurs moyennes et les valeurs extrêmes dans leur raisonnement. Ils comparent les rapports d'un échantillon à l'autre ou d'un échantillon à celles de la population et ils considèrent explicitement la variation de la valeur attendue.

Par ailleurs, lorsque Laura a voulu comparer, comme deuxième stratégie, pour chaque mois, le nombre de blonds par rapport au nombre de bruns, nous avons fait remarquer alors que les élèves aux cheveux bruns sont 15 et les élèves aux cheveux blonds ne sont que 5. Ainsi, Laura a reconnu qu'on pourrait peut-être égaliser le nombre d'individus chez les blonds avec le nombre d'individus chez les bruns et a essayé de trouver une stratégie pour réaliser la tâche en tenant compte du rapport.

> Laura: Il faudrait que je fasse… fois 2 chaque… fois 3… Trois, trois, trois, trois, trois. Il faut que je fasse fois 3 les mois sinon on changerait les statistiques. Parce que s'il y avait 15 élèves de chaque bord, on pourrait comparer…

Laura a d'abord proposé elle-même de multiplier le nombre des blonds pour égaliser.

> I: On pourrait multiplier, fois 3?
>
> Laura: Oui, mais parce qu'il y a pas 3 élèves chez les blonds en octobre.
>
> I: Ok…mais si tu multiplies par 3, après tu auras combien…?
>
> Laura: En fait, on ne pourrait pas… des fois je fais ça mais parce que là ça ne marche vraiment pas parce que c'est comme si on augmentait le nombre des élèves en octobre, mais il n'y en a pas plus.

La multiplication semble être un obstacle pour Laura. De plus, Laura doute fortement de la pertinence de cette stratégie. Elle a été bloquée en quelque sorte à l'idée de changer le nombre de l'effectif des blonds. C'était comme si l'ajout de «vraies» personnes lui posait une difficulté supplémentaire.

I: Mais tu ne changes pas… de toute façon, tu dois augmenter…mais si tu multiplies, genre octobre, tu ne changes pas de mois…

Laura: Non, non, je ne change pas de mois, je sais, mais il va y avoir plus de gens dans un mois, alors que ce n'est pas le cas dans la vraie vie. Peut-être je vais avoir plus de points chez les blonds, mais ce sont des personnes totalement fictives…Je sais, mais je ne vois pas d'autres manières que la moyenne.

Pour cette relation de quasi-proportionnalité, avec la nature de ce qui est mis en relation (cheveux et mois de naissance), Laura n'a pas accepté l'utilisation d'un raisonnement proportionnel. La multiplication permettrait pourtant de conserver les rapports des mois de naissance des individus dans le groupe des blonds une fois égalisés à 15. Laura doute, car elle pense qu'elle obtiendrait ainsi plus de points chez les blonds, ces personnes étant «totalement fictives». Inventer des personnes fictives pour égaliser l'effectif de ceux qui ont des cheveux blonds à ceux qui ont des cheveux bruns a paru problématique dans cette situation.

En résumé, le problème statistique a semblé plus complexe que le problème des chats à certains élèves et après notre intervention, la considération de la relation de quasi-proportionnalité à l'aide d'un raisonnement proportionnel est apparue moins pertinente pour une élève, car l'ajout des individus ne semble pas justifiable même s'il ne s'agit que d'une hypothèse. Ajouter des élèves fictifs, autres que ceux du problème, semble présenter un obstacle à l'élève qui considère le contexte statistique.

## 5. Discussion

Cette section abordera trois éléments, à savoir le recours aux différentes procédures de raisonnement proportionnel, la prépondérance de la moyenne et l'influence du contexte statistique sur le raisonnement proportionnel.

### 5.1 Recours aux différentes procédures de raisonnement proportionnel

Dans le problème des taxes, l'équipe 1 a eu recours à des procédures homogènes et hétérogènes (René de Cotret, 2007) pour résoudre la tâche de proportionnalité et l'équipe 2 à un raisonnement en termes de rapport avec l'idée de trouver un dénominateur commun. Les élèves ont considéré souvent le rapport de 50:125 et ont eu recours à une procédure homogène avec le rapport de 2.5 et l'ont reporté multiplicativement sur les montants de taxes pour comparer. En fait, les élèves ont eu recours aux procédures répertoriées par René de Cotret (2007). Les rapports sont toutefois exprimés plus ou moins formellement.

Cependant, nous ne pouvons pas parler d'une prépondérance claire de cette procédure. Il nous semble que notre choix d'éviter dans cette tâche des nombres étant multiples l'un de l'autre a fait en sorte que les équipes ont effectivement utilisé des procédures variées de résolution de problème.

De plus, il est intéressant de souligner que les résultats ont montré que la majorité des élèves ont raisonné correctement, sauf un élève qui n'a fait que comparer les taxes lors de la résolution la tâche de proportionnalité stricte. Cette tendance laisse donc croire que les élèves du 3e cycle du primaire, du moins ceux qui ont participé à notre recherche, seraient en mesure de raisonner de manière multiplicative et adéquate, lors de la résolution de ce type de tâches de proportionnalité stricte.

### 5.2 Prépondérance de la moyenne

Les résultats ont montré que la moyenne est prépondérante dans les tâches de type statistique. Sauf pour le problème des taxes, où il s'agit d'une proportionnalité stricte et où la moyenne n'est pas un moyen adéquat pour résoudre le problème, les autres problèmes, à savoir ceux des chats et celui de la couleur de cheveux, ont été résolus le plus souvent par un calcul de la moyenne. Notamment, nous avons pu constater que, pour réaliser la tâche des chats avec des données non visibles, l'équipe 1 a eu recours à la moyenne, l'équipe 2 au retour à l'unité, et que la moyenne a été choisie par les 2 équipes comme première stratégie pour réaliser la tâche des chats avec des données visibles et pour résoudre le problème de la couleur de cheveux. Il nous semble que les données visibles de la tâche statistique et de la tâche hybride 2 ont fait en sorte que les élèves ont opté pour la moyenne, car ils devaient résoudre des problèmes avec un ensemble de données variées. La prépondérance du calcul de la moyenne chez les élèves semble appuyer les résultats des recherches de Jones, Langrall, Thornton, Mooney, Wares, Jones *et al.* (2001) et de Shaughnessy et Pfannkuch (2002), selon lesquels les élèves ont une tendance forte à calculer la moyenne des données quand ils doivent résoudre un problème statistique avec un tableau de données qui montrent une certaine variation.

## 5.3 Influence du contexte statistique sur le raisonnement proportionnel

Dans cette section, nous mettons en relief l’objet essentiel de notre recherche: l’influence du contexte statistique sur le raisonnement proportionnel des élèves. Cette influence est liée à la façon de comparer deux groupes d’individus à effectifs inégaux. En effet, outre le calcul de la moyenne, nos résultats d’analyse ont montré que les équipes ont eu également recours à une procédure d’égalisation des effectifs inégaux pour les comparer.

En général, la plupart des élèves des deux équipes n’ont pas discuté de la variabilité des données lors de la résolution des problèmes statistiques, que ce soit pour la tâche hybride avec des données visibles ou encore pour la tâche statistique. Il est intéressant de mettre en évidence que ce sont des élèves forts[9], à savoir Gustave de l’équipe 1 et Laura de l’équipe 2, qui ont discuté du caractère quasi proportionnel, alors que les autres utilisaient plutôt les outils dont ils disposaient sans questionner le caractère quasi proportionnel de la relation des données[10]. Ce caractère spécifique de la situation statistique a semblé être un obstacle pour Laura. Nous y revenons plus loin.

De son côté, Gustave, suite à notre insistance sur la question des effectifs différents, a considéré explicitement le caractère quasi proportionnel lors de l’entrevue individuelle. Égaliser les effectifs, du groupe de 5 individus au groupe de 15 individus, n’a posé aucun problème, car pour lui il s’agissait de «cloner» les gens par une multiplication par 3 de chaque individu. Le concept de «clonage» évoqué par Gustave illustre bien la signification de la multiplication selon Gustave. On faisait comme si on pouvait ainsi les multiplier et garder en même temps les caractéristiques (mois de naissance et couleur de cheveux) de chaque

---

9 Ces deux élèves sont identifiés comme élèves forts en mathématiques par l’enseignante de la classe dans laquelle l’expérimentation a eu lieu.

10 Remarquons que Gustave et Laura ont considéré explicitement la quasi-proportionnalité à la suite d’une question ou d’une intervention de notre part.

individu. De plus, cloner permet aussi de maintenir un traitement strictement proportionnel. Ainsi, rendre égaux les effectifs ne représentait pas d'obstacle pour cet élève.

De son côté, l'élève de l'équipe 2, Laura, a discuté de la non-linéarité de la situation à la fois lorsqu'elle résolvait la tâche hybride avec des données non visibles et la tâche statistique. Pour la tâche hybride, Laura a émis explicitement l'hypothèse que les chats ajoutés consommeraient la même quantité de nourriture que les autres chats. Cette hypothèse lui a permis ainsi de multiplier les deux chats par 2.5 pour égaliser à 5 chats afin de comparer alors les consommations de nourriture de deux groupes à effectifs égaux. Nous pouvons ainsi dire que le caractère quasi proportionnel n'a pas semblé poser d'obstacle au raisonnement proportionnel de l'élève dans le cas de la tâche hybride à données non visibles.

De plus, nous soulignons que la discussion du caractère quasi proportionnel des tâches hybrides n'a eu lieu qu'une seule fois, à savoir chez Laura. Or, ce qui était surprenant et marquant, c'est que la considération du caractère quasi proportionnel s'est manifestée de manière inattendue, lors de la résolution de la tâche hybride avec des données non visibles[11]. En effet, comme déjà mentionné lors de la présentation des tâches hybrides, nous nous attendions à ce qu'une discussion de la variabilité des données ait lieu lors de la résolution de la tâche hybride avec des données visibles et non dans une situation où les données sont non visibles.

Pour ce qui est de la tâche statistique, la multiplication de l'effectif des blonds a fait obstacle à la résolution de Laura. Bien que Laura ait proposé elle-même l'idée de multiplier le nombre d'individus chez les blonds, elle a été bloquée dans sa résolution. La résistance au raisonnement proportionnel vient du fait que Laura pensait qu'en multipliant les individus par 3, les caractéristiques des blonds que l'on ajouterait ne seraient plus les mêmes, et que la distribution des blonds serait disproportionnée par rapport aux données d'origine. La conséquence de ce blocage a été l'abandon de la possibilité de rendre égaux les effectifs. L'obstacle apparaît principalement dans la tâche statistique et semble poser moins de problèmes dans la tâche hybride. Par ailleurs, la variation des données qui concernaient la consommation de nourriture des chats ne semblait pas importante dans la tâche hybride

[11] Rappelons ici que l'équipe 2 a résolu d'abord la tâche hybride 1 avec les données non visibles, et ensuite la tâche hybride 2 avec les données visibles.

avec données visibles, alors qu'elle semblait être source de discussion chez les élèves dans la tâche statistique, lorsqu'ils considèraient la possibilité d'ajouter d'autres personnes afin d'égaliser les effectifs pour comparer.

Nous exposons quelques hypothèses d'explication concernant les procédures discutées précédemment. Dans la tâche hybride, il s'agit de données quantitatives réalistes représentant la consommation de nourriture chez des chats, alors que dans la tâche statistique, les données sont d'ordres qualitatif et réel, impliquant les élèves, car elles représentent les mois de naissance des élèves de la classe. Ainsi, il était difficile pour Laura d'ajouter d'autres individus imaginaires puisqu'elle était consciente que d'une part, ils ne seraient pas des élèves (réels) de la classe et que, d'autre part, leur mois de naissance ne pouvait pas varier, comme ce serait le cas pour la consommation de nourriture. En d'autres termes, on s'imagine mal de multiplier des mois de naissance, alors que multiplier des quantités de nourriture serait plausible. En effet, la date de naissance d'une personne est fixée à sa naissance, n'est pas variable et n'est pas une valeur de représentation; ce qui veut dire qu'il n'est pas évident pour ces élèves d'inventer un autre élève et un autre mois de naissance pour l'ajouter à un groupe, par exemple à celui des élèves aux cheveux blonds. Ainsi, le contexte et la nature des données joueraient un rôle important dans la résolution tout au moins chez Laura.

## 6. Conclusion

En conclusion, soulignons que plusieurs retombées pour le domaine de la didactique de la statistique au primaire ou en ce qui concerne le raisonnement proportionnel ont résulté de notre recherche. En effet, celle-ci procure des connaissances d'une part, sur l'influence du contexte statistique sur le raisonnement proportionnel des élèves du primaire et, d'autre part, sur la richesse des différents raisonnements chez ces élèves. Dans le contexte statistique, nous incluons la nature des données qui sont des individus aux caractéristiques spécifiques. L'utilisation des outils de proportionnalité pour traiter de comparaison dans le cas de données statistiques ne va pas de soi. Un ancrage trop grand dans le contexte peut faire obstacle, comme nous l'avons vu chez Laura.

Par ailleurs, les problèmes jugés de proportionnalité n'étaient pas tous égaux. En effet, les données que contient ce genre de problèmes présentent des caractéristiques qu'il ne faut pas sous-estimer. Entre autres, la relation de proportionnalité stricte, la relation quasi proportionnelle et la présence des données visibles/invisibles invitent à poursuivre une réflexion sur le choix des variables didactiques, notamment en ce qui concerne les rapports entre les nombres dans les problèmes (par exemple nombres multiples ou non multiples d'un groupe par rapport à un autre), ou encore l'ordre de présentation des problèmes aux élèves.

Finalement, en ce qui concerne la variabilité des données, elle justifie le rejet du raisonnement proportionnel lorsqu'on cherche à étendre la caractéristique d'un échantillon à une population plus grande. Certains élèves pourraient avoir une appréhension intuitive de ce concept. Il apparaît important de discuter avec eux des outils de résolution utilisés et des contraintes qui s'y rattachent. Si un groupe d'élèves est plus habile qu'un autre dans son raisonnement proportionnel, il convient de discuter avec ces élèves des limites du fait d'étendre la caractéristique d'un échantillon à une population. Il serait également pertinent de discuter du fait de multiplier l'effectif d'un groupe par un nombre pour égaliser l'effectif d'un autre groupe plus grand (effectif suffisant dans les deux groupes), quitte à conclure à l'existence de méthodes sophistiquées pour évaluer la pertinence du résultat, méthodes que les élèves ne sont pas en mesure de comprendre au niveau du primaire.

## Référence

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée sauvage.

Cobb, P. (1999). Individual and Collective Mathematical Development: The Case of Statistical Data Analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(1), 5-43.

Hammerman, J.K.et Rubin, A. (2004). Strategies for managing statistical complexity with new software tools. *Statistics Education research journal, 3*(2), 17-41.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Thornton, C.A., Mooney, E., Wares, A., Jones, M. R., Perry, B., Putt, I., et Nisbet, S. (2001). Using Students' Statistical Thinking to Inform Instruction. *Journal of Mathematical Behavior, 20,* 109-144.

Karplus, R., Pulos, S. et Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. *In* R. Lesh et M. Landau (dir.), Acquisition of mathematics concepts and processes. Orlando, FL: Academic Press.

Lamon, S. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. *In* J.T. Sowder et B.P. Schappelle (dir.). *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades* (p. 167-198). Albury, NY: State University of NY Press.

Lo, J.J. et Watanabe, T. (1997). Developing Ratio and Proportion Schemes: A Story of a Fifth Grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 216-236.

Mary, C. et Theis, L. (2007). Les élèves à risque dans des situations problèmes statistiques: stratégies de résolution et obstacles cognitifs. *Revue des sciences de l'éducation*, *33*(3), 579-599.

Ministère de l'éducation du Québec (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire et enseignement primaire.* Québec, QC: Gouvernement du Québec.

Norton, S.J. (2005). The construction of proportional reasoning. *In* H. L. Chick et J.L. Vincent (dir.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, (p. 17-24). Melbourne: PME.

Oliveira, I. (2005). Développement du raisonnement proportionnel: potentiel des élèves avant tout enseignement de la proportionnalité. *Acte du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec 2005,* 85- 99.

Oliveira, I. (2008). *Exploration de pratiques d'enseignement de la proportionnalité au secondaire en lien avec l'activité mathématique induite chez les élèves dans des problèmes de proportion*. Thèse de doctorat en éducation, Université du Québec à Montréal, Québec.

Paillé, P. et Mucchielli, A. (2003). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales.* Paris: Armand Colin.

René de Cotret, S. (2007). *L'élève et le modèle proportionnel, une histoire de confitures*. Montréal: Éditions Bande Didactique, coll. «mathèse».

Saldanha, L. et Thompson, D. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 257-270.

Savoie-Zajc, L. (2004). La recherche qualitative-interprétative en éducation. *In* T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (éd.), *La recherche en éducation: étapes et approches* (p. 123-150). Sherbrooke: Éditions du CRP.

Savoie-Zajc, L. (2008). L'entrevue semi-dirigée. *In* B. Gauthier (dir.), *Recherche sociale. De la problématique à la collecte de données (*5e éd.*)* (p. 337-360). Québec: Presses de l'Université du Québec.

Shaughnessy, J.M. (2006). Research on students' understanding of some big concepts in statistics. *In Thinking and Reasoning with Data and Chance: 68th NCTM Yearbook* (p. 77-98). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Shaughnessy, J.M. (2008). What do we know about students' thinking and reasoning about variability in data ? *Student Learning Research Brief.* Document téléaccessible à l'adresse <http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_and_Advocacy/Research/Clips_and_Briefs/Research_brief_11_-_Variability.pdf>

Shaughnessy, J.M. et Pfannkuch, M. (2002). How faithful is Old Faithful? Statistical thinking: A story of variation and prediction. *The Mathematics Teacher, 95*(4), 252-259.

Steinthorsdottir, O.B. et Sriraman, B. (2009). Icelandic 5th-Grade girls' developmental trajectories in proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 21*(1), 6-30.

Van der Maren, J.-M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation (*2e éd.*)*. Paris-Bruxelles: De Boeck Université.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. *In* J. Hiebert et M. Behr (dir.), *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vermette, S. (2013). *Le concept de variabilité chez des enseignants de mathématiques au secondaire*. Thèse de doctorat en éducation, Université de Sherbrooke, Québec.

Watson, J.M. et Shaughnessy, J.M. (2004). Proportional reasoning: Lessons from research in data and chance. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*, 104-109.