Revue des sciences de l'éducation

La formation des enseignants à l’analyse conceptuelle en didactique de la mathématique

Nicolas Herscovics and Jacques C. Bergeron

Volume 8, Number 2, 1982

URI: https://id.erudit.org/iderudit/900373ar
DOI: https://doi.org/10.7202/900373ar

See table of contents

Publisher(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (print)
1705-0065 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Herscovics, N. & Bergeron, J. C. (1982). La formation des enseignants à l’analyse conceptuelle en didactique de la mathématique. *Revue des sciences de l'éducation*, *8*(2), 293–311. https://doi.org/10.7202/900373ar

Article abstract

Within an approach integrating mathematics, psychology, epistomology, and pedagogy, teachers were asked to identify the different types of comprehension involved in the concepts they teach. After fifteen weeks we noted an increase in their mathematical knowledge, a better perception of their own competence, and most importantly, decentring from the written answer led them to attend rather to the child's thinking processes.

Revue des sciences de l'éducation, vol. VIII, no 2, 1982

La formation des enseignants à l'analyse conceptuelle en didactique de la mathématique

Nicolas Herscovics et Jacques C. Bergeron*

Résumé — Dans une approche intégrant les aspects mathématique, psychologique, épistémologique et pédagogique, des enseignants ont dû identifier différents modes de compréhension des notions qu'ils enseignent. Au bout de quinze semaines nous avons constaté chez eux une amélioration de leurs connaissances mathématiques, une meilleure perception de leur compétence et, ce qui est le plus important, une décentration de la réponse écrite les amenant à s'attacher aux processus de pensée de l'enfant.

Abstract — Within an approach integrating mathematics, psychology, epistomology, and pedagogy, teachers were asked to identify the different types of comprehension involved in the concepts they teach. After fifteen weeks we noted an increase in their mathematical knowledge, a better perception of their own competence, and most importantly, decentring from the written answer led them to attend rather to the child's thinking processes.

Resumen — en un enfoque que integra los aspectos matemáticos, psicológicos, epistemológicos y pedagógicos los docentes debieron identificar los diferentes modos de comprensión de las nociones que ellos enseñan. Al cabo de quince semanas constatamos en ellos un mejoramiento de sus conocimientos matemáticos, una mejor percepción de su competencia y lo que es más importante un descentramiento de la respuesta escrita que los condujo a fijarse más en los procesos de pensamiento del nino.

Zusammenfassung— In einem Approach, der den mathematischen, psychologischen, epistemologischen und den pädagogischen Aspekt vereint, mussten die Lehrkräfte verschiedene Verständnisweisen der von ihnen unterrichteten Begriffe bestimmen. Nach fünfzehn (15) Wochen konnten wir bei ihnen eine Verbesserung ihrer mathematischen Kenntnisse, eine bessere Wahrnehmung ihrer eigenen Kompetenz und — was das Wichtigste ist — ein Loskommen von der schriftlichen Antwort feststellen, das sie dazu führte, sich auf die Denkprozesse des Kindes einzustellen.

Introduction

Il y a deux ans nous posions les premiers jalons d'un projet de recherche sur la formation et le perfectionnement des enseignants en didactique de la mathématique (Bergeron & Herscovics, 1980)[1]. Notre objectif principal était de leur faire acquérir des méthodes et des concepts qui leur permettraient d'innover et de restructurer leurs perspectives. Afin d'améliorer la valeur éducative de l'enseignement et de permettre la croissance optimale des élèves, il fallait traduire cet objectif en fonction des exigences de notre discipline.

---

* Herscovics, Nicolas : professeur, Université Concordia
Bergeron, Jacques C. : professeur, Université de Montréal

À cet effet, nous avions isolé certains problèmes spécifiques à l'enseignement de la mathématique. Par exemple, sa nature particulièrement formelle engendre chez bien des maîtres une tendance à se centrer sur le jargon, sur la notation et sur la manipulation de symboles. Une telle approche court toujours le risque de confondre, d'une part, les notions mathématiques avec leurs symbolisations et, d'autre part, la manipulation de symboles avec la compréhension des transformations en jeu. Il s'agissait donc de trouver des moyens permettant aux enseignants de se détacher de la réponse écrite de l'élève pour se pencher davantage sur ses processus de pensée.

Nous avions donc proposé un entraînement à l'entrevue clinique, laquelle se prête particulièrement bien à l'étude des processus cognitifs. Mais pour que cette technique devienne un outil efficace en didactique de la mathématique, il fallait au préalable lui créer un cadre référentiel permettant à l'enseignant de préparer de bonnes questions et aussi d'évaluer ses observations. C'est justement ce rôle de cadre référentiel que peuvent jouer les modèles de la compréhension de la mathématique en permettant l'analyse conceptuelle des notions à enseigner. Évidemment, le maître ne peut se contenter de questionner et d'observer. Il se doit aussi d'intervenir et de guider l'enfant dans la construction de ses schèmes conceptuels. À cet effet il doit pouvoir analyser ses interventions pédagogiques et situer leur portée. Là encore il fallait élaborer un cadre référentiel, c'est-à-dire un modèle d'enseignement-apprentissage. Enfin, l'intégration de la technique de l'entrevue clinique, du modèle de la compréhension et du modèle d'enseignement-apprentissage, devait permettre à l'enseignant de conduire lui-même des expérimentations didactiques. Voici en résumé le programme de recherche que, d'une façon optimiste, nous avions conçu pour trois ans. De fait, la première composante, la formation des enseignants à l'analyse conceptuelle, nous aura pris deux ans de travail.

La présente communication rapporte l'expérience de la première année. Dans un premier temps nous décrivons brièvement le modèle initial que nous avons conçu ainsi que les travaux qui lui ont servi de base. Ensuite, nous faisons part d'une expérimentation impliquant un groupe d'enseignants du primaire. Cette expérimentation avait comme objectifs d'une part l'élaboration d'une méthode appropriée d'enseignement du modèle de la compréhension, et d'autre part l'application de ce modèle à l'analyse de concepts et d'algorithmes du programme de mathématique. Les résultats que nous avons obtenus ont dépassé de loin nos attentes. En effet, non seulement avons-nous pu constater que les enseignants avaient assimilé le modèle, mais nous avons aussi recueilli des évidences indiquant qu'ils avaient amélioré leurs connaissances mathématiques. Bien plus, alors que la formation à l'analyse conceptuelle ne devait servir que de cadre référentiel à un éventuel entraînement à l'entrevue clinique, nous avons constaté que l'utilisation du modèle avait amené les enseignants à se décentrer de la réponse pour s'attacher aux processus de pensée des élèves.

II — Les premiers modèles de la compréhension

Le problème central de l'apprentissage de la mathématique est la compréhension, Car, sans compréhension, la mathématique se réduit à un fardeau écrasant de règles, de symboles, de manipulations dénués de sens. Hélas, nous nous heurtons constamment à la même difficulté qui est de définir « la compréhension de la mathématique ». De fait, la diversité des activités mathématiques, même au niveau primaire, nous en empêche. En effet, qu'il s'agisse de la formation de concepts, d'applications, de résolution de problèmes, ou de la preuve de théorèmes, ce sont là autant d'activités diverses, chacune nécessitant une interprétation appropriée de la compréhension.

On pourrait donc croire que la recherche d'un modèle de la compréhension devient futile, que c'est peine perdue. Mais alors, quelle serait l'alternative? Nous n'aurions d'autres moyens que d'inférer de la compréhension à partir des habiletés de l'élève, ce qui ne ferait qu'encourager une approche algorithmique et behavioriste de l'enseignement. Voilà pourquoi plusieurs chercheurs élaborent des modèles de la compréhension qui, sans essayer de la définir, tentent d'identifier des critères permettant de la décrire. Évidemment, un choix judicieux de ces critères devrait permettre l'analyse cognitive des diverses notions enseignées et ainsi rendre explicite ce qu'on entend par « la compréhension » dans un sens plus large que « donner la bonne réponse ».

Bruner (1960) décrit deux modes de pensée complémentaires, soit la *pensée intuitive* (perception globale et implicite d'un problème, inconscience des processus utilisés pour l'obtention d'une bonne réponse), et la *pensée analytique* (étapes explicites, pleine conscience des opérations et des informations pertinentes). Skemp (1976), lui, distingue entre la *compréhension instrumentale* (l'application de règles sans raison) et la *compréhension relationnelle* (savoir quoi faire et pourquoi). Se basant sur les classifications de Bruner et de Skemp, Byers et Herscovics (1977) les réunissent en un seul modèle qui, de plus, distingue entre le contenu (les idées mathématiques) et leur forme mathématique (leurs représentations). Ils décrivent quatre modes de compréhension:

> *La compréhension instrumentale* se manifeste par la capacité à appliquer à la solution d'un problème une règle appropriée, apprise par cœur, sans savoir pourquoi la règle fonctionne;
>
> *La compréhension relationnelle* se manifeste par la capacité à déduire des règles ou des processus spécifiques à partir de relations mathématiques plus générales;
>
> *La compréhension intuitive* se manifeste par la capacité à résoudre un problème sans analyse préalable de celui-ci;
>
> *La compréhension formelle* se manifeste selon le cas,
> — par la capacité à relier les symboles et la notation mathématiques aux idées mathématiques pertinentes;
> — par la capacité à combiner ces idées dans un enchaînement de raisonnements logiques.

Comme on peut l'apercevoir, ces descriptions se limitent essentiellement aux règles et à la résolution de problèmes. Cependant, dans le contexte scolaire, les règles et la résolution de problèmes s'inscrivent dans des champs d'activités tels l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, et s'exercent sur des schèmes conceptuels bien précis. Par exemple, les divers algorithmes arithmétiques sont tous basés sur le schème de la notation positionnelle; la résolution de problèmes non triviaux impliquant une inconnue serait impossible sans la conceptualisation préalable de la notion d'équation algébrique. Ces exemples montrent bien qu'à la base de toutes ces activités se retrouvent des schèmes conceptuels dont la construction par l'élève devrait constituer la principale préoccupation de l'enseignant. Pour diriger une telle construction, il lui faut donc un modèle de la compréhension qui puisse être appliqué à la formation de concepts. Voilà pourquoi nous avons tenté dans un premier temps de greffer sur les modèles précédents des critères additionnels permettant de la décrire. Il en est résulté un modèle que nous avons appelé le modèle hybride de la compréhension.

Ainsi, pour décrire la compréhension intuitive, nous avons ajouté à la perception globale de Bruner des critères tels que la perception et l'estimation visuelle (comme la comparaison de quantités) et l'action primitive sans quantification (par exemple, réunir ou ajouter).

De la même façon, dans le cas des modes instrumental et relationnel, nous avons dû adapter les définitions de Skemp à la formation de concepts. Dans un tel contexte, l'emploi de règles et de procédures n'apparaît plus comme un but en soi, mais sert à l'élaboration de nouvelles notions mathématiques. À cet effet nous avons prêté au mode instrumental le double sens de mémorisation et de procédure initiale menant à une première construction du concept (ainsi dans le cas de l'addition, réunir et compter à partir de un). Quant au mode relationnel, lui aussi s'est vu attribuer un double sens : celui de justification, présent chez Skemp, et celui de liens et relations, menant à l'invariance et à la réversibilité (par exemple, pour l'addition : réunir et compter à partir du premier terme peut indiquer une certaine conservation du nombre; entrevoir la soustraction comme opération inverse de l'addition est un exemple de réversibilité).

Finalement, pour le mode de compréhension formelle, la première partie de la description donnée par Byers et Herscovics a été employée sans toutefois spécifier ce qu'on entendait par idées mathématiques pertinentes, celles-ci nous paraissant évidentes. La deuxième partie à été utilisée dans le sens de justification logique plutôt que dans le sens de preuve formelle.

Le tableau suivant résume les quatre modèles.

Comme on peut le constater, le modèle hybride est assez complexe. Non seulement est-il une synthèse des trois modèles précédents mais, de plus, la description d'un même mode de compréhension peut faire appel à plusieurs nouveaux critères. Aussi nous sommes-nous demandé dans un premier temps si nous-mêmes pouvions employer le modèle hybride pour décrire différents modes de compréhension des notions enseignées au primaire et, dans un deuxième temps, si les enseignants pouvaient l'assimiler et l'utiliser. L'analyse conceptuelle s'étant révélée assez difficile, seule une expérimentation impliquant des enseignants pouvait répondre à la deuxième question.

Bruner (1960)	Skemp (1976)
Pensée intuitve: perception globale et implicite d'un problème; inconscience des processus utilisés pour l'obtention d'une bonne réponse *Pensée analytique*: étapes explicites, pleine conscience des opérations et des informations pertinentes	*Compréhension instrumentale*: l'application de règles sans raison *Compréhension relationnelle*: savoir quoi faire et pourquoi

Modèle du tétraèdre (Byers et Herscovics, 1977)			
Compréhension intuitive se manifeste par la capacité à résoudre un problème sans analyse préalable de celui-ci	**Compréhension instrumentale** se manifeste par la capacité à appliquer à la solution d'un problème une règle appropriée apprise par cœur sans savoir pourquoi la règle fonctionne	**Compréhension relationnelle** se manifeste par la capacité à déduire des règles ou des processus spécifiques à partir de relations mathématiques plus générales	**Compréhension formelle** se manifeste selon le cas, — par la capacité à relier symboles et notation mathématiques pertinentes — par la capacité à combiner ces idées dans un enchaînement de raisonnements logiques
Critères ajoutés au modèle du tétraèdre			
— perception globale — perception et estimation visuelle (e.g. comparaison de quantités) — actions primitives sans quantification	— mémorisation — procédure initiale menant à une première construction d'un concept	— justification — liens et relations entre concepts	— justification logique
Modèle hybride (Bergeron et Herscovics, 1981)			

III — L'expérimentation

L'expérience de la première année (Bergeron et al, 1981; Herscovics et al, 1981) comportait deux objectifs: 1) élaborer une méthode appropriée d'enseignement des modèles de la compréhension; 2) appliquer ces modèles à l'analyse de concepts et d'algorithmes du programme de mathématique du primaire.

Choix des sujets

Nous avons choisi comme sujets de notre première expérimentation un groupe de maîtres en exercice car, grâce à leur expérience dans l'enseignement et à leur contact quotidien avec des enfants, ils pouvaient essayer d'identifier immédiatement dans leur classe les différents modes de compréhension des notions étudiées. La recherche s'est déroulée dans le cadre d'un cours régulier d'un programme de perfectionnement pour les enseignants du primaire (Certificat de Mathématiques et Sciences, Faculté d'Éducation Permanente, Université de Montréal). Vingt-huit professeurs des six niveaux du primaire y ont participé à raison d'une rencontre hebdomadaire de trois heures pendant quinze semaines.

La moitié d'entre eux œuvraient au premier cycle du primaire (1,2,3) et les autres, au second cycle (4,5,6). Ils possédaient en moyenne 14 ans de scolarité et avaient suivi il y a bien longtemps des cours traditionnels d'algèbre et de géométrie euclidienne comme l'indique leur moyenne d'expérience d'enseignement (13 ans).

Méthode d'enseignement et organisation du cours

La première partie du cours a porté sur l'aspect théorique des modèles, la deuxième, sur l'application de la théorie, et le dernier mois a été consacré à l'élaboration, puis à la réalisation de projets d'équipes.

Durant les trois premières semaines nous avons étudié les modèles de Bruner (1960), de Skemp (1976), de Byers et Herscovics (1977), ainsi que quelques éléments de la théorie piagétienne du développement, soit les notions de stades, de conservation et de réversibilité. Tout au long du cours le modèle de Byers et Herscovics a été élargi par l'apport de nouveaux critères, ce qui a engendré un nouveau modèle qui a posteriori a été baptisé le modèle hybride (Bergeron et Herscovics, 1981). Les enseignants durent ensuite analyser, à l'aide de ce dernier modèle, les notions de nombre, de chiffre, d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, la numération positionnelle décimale, et enfin les algorithmes d'addition et de soustraction.

Étant donné que nous avions nous-mêmes, individuellement, éprouvé beaucoup de difficultés à effectuer l'analyse de ces notions, ce qui pouvait à l'occasion nécessiter plusieurs jours de réflexion, on ne pouvait espérer que les enseignants y parviennent seuls dans le cadre d'une rencontre de trois heures. De plus, conformément à notre philosophie constructiviste de l'apprentissage, il ne s'agissait pas pour nous de simplement transmettre nos conclusions, mais bien d'élaborer une méthode d'enseignement qui permette aux maîtres de s'impliquer eux-mêmes.

La méthode que nous avons conçue mobilise les capacités d'analyse du groupe entier. Dans un premier temps, c'est par une discussion amorcée par la question « Que veut dire comprendre tel concept ? » que nous suscitons du groupe entier une multitude de réponses. Dans un deuxième temps, les individus, regroupés en petites équipes de quatre ou cinq, classent les interprétations recueillies selon les quatre modes de compréhension (intuitif, instrumental, relationnel et formel). Enfin, revenue en plénière, chaque équipe fait un rapport de sa classification.

IV — Assimilation du modèle

Différents moyens ont été mis en œuvre pour juger du degré d'assimilation du modèle de la compréhension par les enseignants. Premièrement, les rapports d'équipes faisant suite à l'analyse de chaque notion traitée ont permis de suivre l'évolution du groupe expérimental. Deuxièmement, leurs analyses des notions d'addition et de zéro ont été comparées à celles d'un groupe témoin. Enfin, deux tests de transfert ont été administrés.

Afin d'évaluer les travaux des enseignants, nous avons au préalable identifié, pour chaque notion, des critères caractérisant les divers modes de compréhension en tenant compte des différentes recherches faites sur les débuts de l'arithmétique (Carpenter et Moser, 1979; Fuson, 1979; Nesher, 1979). À titre d'exemple le tableau suivant présente les critères utilisés dans le cas de l'addition et du nombre zéro.

	Intuitive	Instrumentale	Relationnelle	Formelle
Addition	— Ajouter — Réunir	— compter à partir de 1 — mémoriser les tables d'addition	— compter à partir de l'un des termes — relier l'addition à la soustraction (5 + ? = 9)	— pouvoir substituer à la représentation symbolique de l'addition des représentations par l'image ou par l'action (et réciproquement)
Le nombre zéro	— « si j'enlève tout il ne reste *rien* »	zéro devient un nombre dans le contexte arithmétique 3 − 3 = 0	l'addition et la soustraction d'un même nombre s'annulent 6 + 3 − 3 = 6 + 0	0 est l'élément neutre de l'addition n + 0 = n (pour tout n)

Nous rappelons que la compréhension intuitive est prise ici dans le sens d'action non quantifiée, et la compréhension instrumentale dans le double sens de mémorisation et de construction initiale.

Rapports d'équipes

Tel que décrit précédemment, c'est à l'occasion de la discussion plénière sur un concept donné que les enseignants étaient amenés à proposer différents critères de compréhension, travail facilité par leur expérience pratique. Bien entendu, dans cet échange les idées inacceptables se voyaient réfutées par d'autres enseignants. Comme les critères acceptables avaient été suggérés pêle-mêle, la tâche de les classer suivant les quatre modes décrits par le modèle s'imposait. Cette classification s'est faite en petites équipes, lesquelles devaient en faire un rapport verbal. Pour cinq de ces notions ces rapports ont été enregistrés sur bande magnétique, transcrits, puis évalués. La classe était divisée en 6 équipes, chacune pouvant identifier jusqu'à 4 modes, ce qui donnait 6 × 4 = 24 identifications possibles. Le tableau suivant indique, pour chacune de ces cinq notions, le nombre d'équipes ayant identifié 0, 1, 2, 3, ou 4 modes différents. Pour chaque notion le nombre total de modes identifiés par les six équipes est indiqué et son rapport à 24 se traduit en un pourcentage qui exprime le taux de réussite.

Notions	Nombre de modes					Total	Réussite
	0	1	2	3	4		%
Nombre	1	1	0	2	2	15	62
Addition	0	0	1	2	3	20	83
Zéro	0	0	0	3	3	21	87
Numération positionnelle	0	0	0	1	5	23	95
Algorithme de l'addition	0	0	1	2	3	20	83

Nous pouvons constater qu'à partir de l'addition un taux de réussite assez élevé a été obtenu et maintenu. Dans l'évaluation de ces rapports d'équipes ce que nous avons retenu, c'est que les enseignants pouvaient identifier différents modes de compréhension, que leur classification coïncide ou non avec la nôtre. En effet, ce qui importe est qu'ils soient sensibilisés aux différents processus de pensée utilisés par les enfants et non pas uniquement centrés sur la terminologie employée pour les désigner. Par exemple, une équipe identifiant « compter à partir de 1 » comme compréhension intuitive et « relier les symboles aux représentations concrètes » comme compréhension relationnelle (alors que le modèle hybride les qualifie respectivement d'instrumental et de formel) s'est vu attribuer une cote de deux modes d'identifiés, et cela, même si pour chacun de ces modes un seul critère a été employé. Ces résultats contrastent avec ceux obtenus par un groupe témoin.

Groupe témoin

Pour juger de l'effet de l'entraînement à l'utilisation du modèle de la compréhension, nous avons utilisé comme base de comparaison un groupe contrôle de 19 enseignants œuvrant aux mêmes niveaux du primaire, et possédant une expérience d'enseignement comparable. Ceux-ci étaient inscrits au même programme de perfectionnement et y poursuivaient leur deuxième cours de mathématique.

Deux questions leur furent posées :

1) Y a-t-il plusieurs façons de comprendre l'addition de deux nombres naturels dont la somme ne dépasse pas 9 ?

2) Y a-t-il plusieurs façons de comprendre le nombre zéro ?

Si oui, pour chaque façon, donnez un exemple.

Si non, expliquez ce que veut dire comprendre cette notion.

L'évaluation des réponses s'est faite de la même façon que pour les rapports d'équipes. Pour l'addition, la plupart des enseignants ont interprété « compréhension » en terme de modes de représentation (concret, semi-concret, abstrait) qu'ils avaient étudiés en classe. Ceci explique pourquoi ils se sont centrés sur différentes représentations plutôt que sur différents moyens d'additionner. Le tableau ci-dessous indique le nombre d'enseignants ayant identifié 0, 1, 2, 3 et 4 modes différents pour l'addition et pour le nombre zéro.

Nombre de modes	0	1	2	3	4	Total (sur 76)	%
Addition	0	6	8	5	0	37	49
Zéro	3	8	6	2	0	26	34

Les pourcentages ont été calculés par rapport à 76 qui est le nombre total de modes identifiables, soit 4 modes pour chacun des 19 enseignants. Ces résultats ne peuvent être considérés comme la somme de réflexions complètement individuelles puisque ce questionnaire a été administré dans le cadre d'une classe d'enseignants et qu'ils se sont concertés par petits groupes de trois. Cette table indique que la perception de la compréhension par les enseignants n'est pas uniforme mais varie suivant le concept analysé (49% pour l'addition, 34% pour le nombre zéro).

Une comparaison des résultats entre le groupe expérimental et le groupe contrôle indique des différences remarquables : 83% contre 49% pour l'addition, et 87% contre 34% pour le nombre zéro. Cependant ces différences ne peuvent être attribuées uniquement à l'assimilation du modèle de la compréhension. En effet, deux autres variables doivent être prises en considération. D'une part, le groupe expérimental bénéficiait d'une discussion plénière alors que le groupe contrôle était limité à des concertations en équipes de trois enseignants. D'autre part, la discussion plénière durait une heure pour chaque concept, alors que la concertation se limitait à quinze minutes. La limite de temps accordé au groupe contrôle a été imposée par le fait qu'on ne pouvait nous consacrer plus de trente minutes à l'intérieur du cours. Ces contraintes n'avaient que peu d'importance vu qu'il s'agissait pour nous d'aller voir comment des maîtres non initiés au modèle percevaient individuellement la compréhension de notions mathématiques qu'ils enseignaient. Et vu que, par son inscription au Certificat de Math-Sciences, le groupe témoin démontrait un intérêt certain pour la didactique de la mathématique, on peut s'attendre à une perception encore moins évoluée de la compréhension chez les enseignants en général.

Tests de transfert

Le haut niveau de succès obtenu dans les analyses rapportées par les équipes reflète l'efficacité de la méthode d'enseignement utilisée. Notre direction de la discussion plénière facilitait la mise en évidence de divers modes de compréhension pour les notions traitées. Cependant, ces résultats ne nous permettaient nullement d'inférer des capacités d'analyse conceptuelle des mêmes enseignants laissés à eux-mêmes et, de fait, ce n'est qu'en de telles circonstances que l'on peut juger de la véritable assimilation du modèle. À cette fin nous avons administré deux tests de transfert. Le premier, de l'addition à la soustraction, a été passé individuellement tandis que le second, de la multiplication à la division, l'a été en équipe (la soustraction et la division n'ayant pas été traitées en plénière). À cause des difficultés que nous avions éprouvées nous-mêmes à analyser les notions mathématiques du primaire à l'aide du modèle, nous avons préféré pour ces tests faire appel à des opérations très voisines l'une de l'autre. Le tableau suivant indique les critères que nous avons employés pour identifier les divers modes de compréhension de la soustraction.

	Intuitive*	**Instrumentale****	**Relationnelle**	**Formelle**
Soustraction	— Enlever	— compter le reste à partir de 1 — mémoriser les tables de soustraction	— trouver le reste en comptant à rebours — soustraction par addition (9 - ? = 5)	— pouvoir substituer à la représentation symbolique de la soustraction des représentations par l'image ou par l'action (et réciproquement)

* dans le sens d'action non quantifiée; ** dans le sens de construction.

Voici les résultats obtenus au premier test de transfert:

Nombre de modes	0	1	2	3	4	Total (sur 112)	%	Identifications concordantes
Addition	1	4	6	9	8	75	67*	66
Soustraction	1	2	6	17	2	73	65*	

* Ces pourcentages sont calculés sur 112 qui est le nombre total de possibilités, 28 enseignants devant identifier chacun quatre modes.

Il est à noter qu'une simple comparaison du taux de réussite pour la soustraction (65 %) au taux de réussite pour l'addition (67 %) donnerait 97 % (65/67). Mais ce taux surestimerait le transfert car il n'y a pas toujours concordance entre les modes identifiés pour l'addition et la soustraction. Par exemple, une identification restreinte aux modes intuitif et relationnel pour l'addition d'une part, et aux modes instrumental et formel pour la soustraction d'autre part, donnerait une concordance nulle. Tel que mentionné auparavant, ce n'est pas l'identification des modes mais bien l'identification des critères qui a été retenue. Nous avons donc défini un indice de transfert comme étant

$$\frac{\text{nombre d'identifications concordantes}}{\text{réussite globale pour la première notion}}$$

Ainsi, dans le cas du transfert de l'addition à la soustraction, nous avons obtenu un rapport de 66 identifications concordantes entre les deux opérations sur 75 identifications pour l'addition, ce qui donne un indice de 66/75, soit 88%. Cet indice de transfert est comparable au 92% (88/95) obtenu au deuxième test de transfert de la multiplication à la division, dont les résultats apparaissent dans le tableau suivant :

Nombre de modes	0	1	2	3	4	Total (sur 108)*	%	Identif. concord.
Multiplication	0	0	1	11	15	95	88	88
Division	0	0	1	7	19	99	92	

* Un des sujets s'étant désisté, le nombre d'identifications possibles est maintenant de 27 x 4.

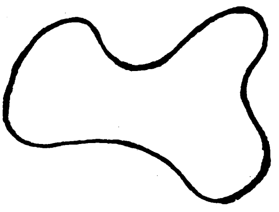
La réussite remarquable du groupe expérimental aux tests de transfert reflète le degré d'assimilation du modèle dans le sens que les enseignants peuvent l'utiliser par eux-mêmes pour faire l'analyse conceptuelle de nouvelles notions assez proches de celles traitées dans le cours. Bien que comparables, les indices de transfert (88% et 92%) ne font pas ressortir le fait que le nombre de modes identifiés pour la multiplication et la division (95/108 et 99/108) dépasse de loin celui qui a été obtenu pour l'addition et la soustraction (75/112 et 73/112). Deux raisons expliquent ces différences : dans le premier cas il y a eu travail d'équipe et dans l'autre, travail individuel ; ensuite, il faut remarquer que, pour l'addition, les enseignants n'en étaient qu'à leur troisième analyse, tandis que pour la multiplication ils en étaient à leur sixième. Cette formation à l'analyse conceptuelle a eu plusieurs conséquences intéressantes rapportées dans les deux prochaines sections.

V — Compétence mathématique des enseignants

Une première conséquence touche le progrès du groupe expérimental sur le plan mathématique. À en juger par le nombre de cours suivis pendant leur formation initiale, leur contenu, et le temps écoulé depuis le dernier cours, la compétence mathématique de nos enseignants était assez limitée. Ceci nous a amenés à écarter le format standard prétest-test afin d'éviter l'anxiété et l'attitude négative qu'un échec à de tels tests aurait pu engendrer. Cependant, nous avons plusieurs évidences de leur faiblesse en mathématiques. Ainsi, d'après leurs analyses, on voit qu'il y a souvent eu confusion entre les concepts d'aire et de surface, nombre et chiffre, et entre l'opération d'addition et son algorithme.

Le cas de l'aire est particulièrement révélateur. Tout au début du cours nous avions fait passer un questionnaire sur ce concept. Il ne s'agissait pas là d'un prétest, mais bien d'un point de comparaison devant permettre aux enseignants de suivre leur propre évolution lors de l'introduction des modèles de la compréhension, lesquels étaient illustrés à l'aide de cette même notion.

La question qui suit faisait partie du questionnaire : « Comment vous y prendriez-vous pour estimer l'aire de la figure suivante ? » Sur 27 enseignants, 14 ont indiqué qu'ils recouvriraient la figure d'unités carrées dont le nombre leur donnerait une approximation de l'aire ; deux enseignants ont suggéré de circonscrire un rectangle à la figure et d'estimer visuellement la proportion occupée par celle-ci ; six autres mesureraient le contour de la figure à l'aide d'une ficelle qu'ils emploieraient pour construire un rectangle de même périmètre, l'aire duquel serait calculée par la formule ; enfin, cinq enseignants ont tout simplement indiqué n'en avoir aucune idée. Fait remarquable, huit de ces 13 derniers enseignaient au deuxième cycle du primaire (4, 5 et 6ième année), niveau où la notion d'aire est traitée. Par contre, après en avoir discuté dans le contexte de la compréhension, tous avaient acquis cette notion. Ce résultat ne saurait être attribué uniquement aux modèles car il est probable qu'une simple discussion sur le plan mathématique aurait suffi, mais elle n'aurait certes pas engendré une réflexion sur l'aspect cognitif.



En centrant l'enseignant sur l'aspect cognitif de l'apprentissage nous pensons avoir changé la perception qu'il a de sa compétence en mathématique. En effet, dans un questionnaire anonyme distribué à la fin du cours, 25 participants sur 28 ont signifié qu'ils pensaient mieux comprendre la mathématique. Ceci est bien surprenant car nous n'aurions pas cru que des gens qui enseignent depuis de nombreuses années des notions aussi « élémentaires » que le nombre, l'addition, la soustraction, etc., aient l'impression de les mieux comprendre après quelques semaines d'analyses. Nous nous l'expliquons par le fait que l'analyse de la compréhension change non seulement la perception de leur compétence, mais aussi leur perception de la mathématique elle-même. De fait, au point de vue cognitif, les modèles donnent à cette matière des dimensions qui dépassent les interprétations courantes d'instrumentale et formelle (« la mathématique c'est surtout des règles et des définitions »). Les analyses obligent l'enseignant à reconstruire la mathématique dans un contexte psycho-génétique qui valorise les aspects intuitifs et relationnels.

VI — Effets psycho-pédagogiques

Anxiété générée par l'expérience

Malgré la précaution que nous avions prise de ne pas employer de test mathématique, une certaine forme d'anxiété n'a cependant pu être évitée. En effet, pendant les cinq premières semaines, des commentaires venant de différentes sources (commentaires privés des enseignants, rapport du conseiller pédagogique) ont révélé chez certains enseignants un malaise face à l'analyse des concepts, voire même une déstabilisation de leur assurance initiale. Plusieurs raisons peuvent expliquer cet état de fait.

Tout d'abord les enseignants s'attendaient à un cours régulier de mathématique ne faisant pas intervenir les aspects psycho-pédagogiques. Ensuite il y a le fait qu'une longue habitude de n'évaluer que les réponses écrites entravait l'adoption d'une nouvelle forme d'évaluation basée sur les processus utilisés. Ceci est indiqué par la question soulevée à maintes reprises : « Comment être sûr que la compréhension n'est pas instrumentale ? ». Ce n'est qu'après cinq semaines que les enseignants ont réalisé que les critères employés pour juger de ces processus ne sont en général que des indications et non pas des preuves. En effet, rien ne garantit que les procédures ne sont pas le fruit d'un apprentissage instrumental. Seul un questionnement approprié peut permettre de l'établir.

Une autre cause d'anxiété peut être attribuée aux divergences que les enseignants pouvaient constater entre le traitement d'une notion dans le manuel scolaire qu'ils employaient dans leur classe et les conclusions pédagogiques que leur fournissaient leurs analyses. Par exemple, dans leur manuel la notion d'addition était traitée uniquement en fonction des états (état qui précède, et état qui suit la réunion de deux ensembles) et ignorait l'interprétation en terme d'opérateur (l'action naturelle d'ajouter).

L'analyse en profondeur d'une notion mathématique en fait ressortir la grande complexité, ce qui, tout en lui donnant un éclairage nouveau, peut devenir une cause justifiée d'inquiétude. Par exemple la notion de nombre entrevue comme mesure d'une quantité d'objets distincts (Vergnaud, 1979), pose la question des unités de mesure (Steffe et al., 1981), celle des diverses façons de compter (Comiti et al., 1980), la conservation du nombre (Piaget, 1965), ainsi que des problèmes associés à sa représentation symbolique (Ginsburg, 1977).

Une dernière source d'anxiété que nous avons pu identifier est reliée à la difficulté d'interprétation des modes de compréhension. Nous avions choisi divers critères pour décrire un même mode, et plusieurs enseignants les ont regroupés autrement que nous. Dans les tests de transfert par exemple, sur 28 sujets, 13 ont confondu certains modes, la plus grande confusion s'étant produite entre les modes intuitif et instrumental d'une part, et entre les modes relationnel et formel d'autre part. Le tableau suivant indique la nature et la distribution des types de confusion.

	Addition				Soustraction			
Mode	**Int.**	**Instr.**	**Relat.**	**Formel**	**Int.**	**Instr.**	**Relat.**	**Formel**
Int.		5	3	0		4	3	1
Instr.			1	3			1	2
Rel.				5				9
Formel								

* Note : La somme de ces nombres dépasse 13 puisqu'un même enseignant peut faire plusieurs erreurs.

Nous avons été nous-mêmes l'une des causes de ces confusions. En effet, alors que les trois premières semaines du cours avaient été consacrées aux modèles de Bruner, de Skemp, et celui du tétraède, ce n'est qu'au fur et à mesure que le cours évoluait que le besoin de critères pouvant décrire la construction de schèmes conceptuels s'est fait ressentir. Et, c'est la génération graduelle de tels critères additionnels qui, venant se greffer sur le modèle du tétraèdre, l'ont transformé en ce que nous avons appelé après coup le modèle hybride. Mais, de fait, tout en employant les nouveaux critères, les enseignants n'étaient pas conscients que ceux-ci s'intégraient dans un nouveau modèle. Par exemple, nous élargissions la définition de compréhension instrumentale au sens du Skemp (des règles sans raison) en incluant comme critère additionnel la première quantification d'un concept. Comme cette extension n'a pas été communiquée de façon suffisamment explicite, ce dernier critère a souvent été interprété comme signe d'une compréhension intuitive. Quant à la confusion entre le relationnel et le formel, elle était due au fait que plusieurs enseignants interprétaient « relationnel » comme étant la « relation » entre l'expression symbolique et sa représentation par l'action ou l'image.

Décentration de la réponse.

Nous nous proposions dans cette première expérience de former les enseignants à l'analyse de la compréhension afin de leur fournir un cadre référentiel comme base d'un éventuel entraînement aux méthodes cliniques. Ces méthodes cliniques devaient leur permettre de se décentrer des produits de l'apprentissage (réponses écrites) pour s'attacher aux processus de pensée des élèves. Cependant nous avons des évidences qu'une telle décentration peut déjà résulter de l'analyse conceptuelle faite à l'aide des modèles de la compréhension.

Une première évidence se situe au niveau des analyses d'équipes. Le deuxième tableau de la section 4 indique que plusieurs équipes ont pu identifier quatre modes pour les diverses notions traitées. Ceci implique qu'ils ont pu discriminer entre les modes instrumental et relationnel qui souvent se distinguaient par la procédure (par exemple, l'addition : compter à partir de 1 ou compter à partir du premier terme). Donc, nous constatons que grâce aux modèles, les enseignants commencent à tenir compte des processus en jeu.

Comme deuxième évidence, nous avons les projets réalisés par les enseignants à l'intérieur du cours. Les équipes, formées de trois à cinq professeurs ont suivi l'évolution de la compréhension d'un concept ou algorithme à travers les différents niveaux du primaire, en interviewant de un à trois enfants par niveau. C'est en se basant sur les processus de pensée des élèves que toutes les équipes ont jugé de leur compréhension.

Enfin, des indications manifestes nous ont été fournies par les réponses à deux questionnaires passés vers la fin du cours. À la question « Croyez-vous qu'il est souhaitable d'utiliser les modèles de compréhension dans votre enseignement ? » toutes les réponses ont été affirmatives (18 répondants) et les raisons suivantes ont été invoquées : « permet de suivre le cheminement de l'enfant dans son raisonnement » (5) ; « permet de se pencher sur notre façon d'enseigner, d'évaluer et d'aider les enfants » (5) ; « oui car on faisait appel seulement à un mode de compréhension (instrumental) » (3) ; un « oui » non justifié (5).

Ces réponses ont corroboré celles qui avaient été obtenues deux semaines auparavant à la question : « Ce cours vous a-t-il amené(e) à mieux enseigner certaines notions mathématiques ? — Si oui, pouvez-vous décrire les changements apportés dans l'une de vos leçons (Par exemple, dans la préparation, dans la façon de questionner les élèves, dans l'interprétation du feed-back reçu dans l'évaluation du travail écrit,...) ? ». Vingt-quatre enseignants sur 25 ont rapporté une amélioration de leur enseignement se situant aux niveaux de la leçon (13) ; du questionnement (17) ; de l'évaluation (13) ; et de la remédiation (10). Les commentaires suivants en communiquent la saveur :

— « Maintenant lorsque je prépare une leçon j'essaie de toucher aux quatre types de compréhension chez l'enfant. »
— « Souvent en corrigeant le cahier je demande même à ceux qui ont tout bien. »
— « Au niveau de la soustraction j'ai 5 élèves sur 25 qui savaient le pourquoi du 1 qu'on emprunte. Je n'en revenais pas. »
— « J'essaie le plus souvent possible de faire expliquer la démarche de l'enfant et ne prends plus ses erreurs pour un signe d'incompréhension totale. »

Conclusions

Les travaux de cette première année d'expérimentation ont eu une grande portée tant du côté pratique que du côté théorique de notre recherche. Aussi discuterons-nous de ces implications en divisant la conclusion en trois parties portant sur l'expérience, ses effets psycho-pédagogiques, ainsi que sur la critique du modèle de la compréhension utilisé.

L'expérience

La méthode d'enseignement que nous avons adoptée s'est révélée particulièrement efficace. En posant la question « Que veut dire comprendre tel concept ? », les enseignants ont pu en discuter en tout aise sans se sentir évalués puisque le contexte créé visait la compréhension chez l'enfant. La discussion plénière permettait de recueillir une multitude d'interprétations qui, sans aucune structuration, seraient demeurées des connaissances didactiques éparpillées et plutôt floues. C'est justement l'une des fonctions qu'a jouée le modèle de la compréhension, lors du travail de classification en petites équipes, celui de structurer ces différentes interprétations.

Mais bien plus, le modèle a aussi incité les enseignants à chercher différents modes de compréhension pour une notion donnée. Par exemple, la question « Qu'est-ce qu'une compréhension intuitive de l'algorithme de l'addition ? » pouvait les amener à valoriser davantage des activités touchant à l'approximation. Pour juger du degré d'assimilation du modèle, nous avons choisi comme critère le nombre de modes différents qu'ils pouvaient identifier sans que leur classification coïncide nécessairement avec la nôtre. Ceci nous paraît justifiable par le fait que l'identification des différents processus de pensée utilisés par les enfants l'emporte sur une simple connaissance de la terminologie employée pour les désigner. C'est en nous basant sur ce critère que nous pouvons conclure que le modèle de la compréhension est à la portée des maîtres. En effet, tel que l'indiquent les rapports d'équipes, ils ont pu, après quelques semaines maintenir un taux de réussite assez élevé dans leurs analyses. Ce taux de réussite contraste fortement avec celui d'un groupe témoin. Mais c'est le succès remarquable du groupe expérimental aux tests de transfert qui reflète le mieux le degré d'assimilation du modèle. En effet, ces tests révèlent que les enseignants peuvent analyser par eux-mêmes de nouveaux concepts assez voisins de ceux traités dans le cours.

L'analyse conceptuelle a permis aux maîtres de prendre conscience de la complexité épistémologique des notions qu'ils enseignent. Ceci a eu pour conséquence l'amélioration de leurs connaissances mathématiques (cf. la notion d'aire), ainsi que de la perception qu'ils avaient de leur propre compétence. On peut attribuer ces changements au fait que, loin de se limiter à l'aspect « règles et définitions », le modèle incite l'enseignant à reconstruire la mathématique dans un contexte psycho-génétique valorisant les aspects intuitifs et relationnels.

Effets psycho-pédagogiques

Que quinze semaines d'analyse de concepts mathématiques se soient soldées par des progrès au niveau de la discipline n'a rien de surprenant puisqu'un cours standard de mathématique aurait pu avoir le même résultat. Mais que cette expérience ait eu un effet psycho-pédagogique important auprès des enseignants nous ouvre une voie des plus prometteuses pour les programmes de formation et de perfectionnement des maîtres. En effet, malgré que des cours de psychologie et de pédagogie figurent dans ces programmes, il est difficile pour l'enseignant de les intégrer à la didactique de la mathématique pour se centrer sur la construction des schèmes conceptuels de l'enfant. Aussi, l'enseignant se limite-t-il bien souvent à inférer de la compréhension à partir de la « bonne réponse » de l'élève. Or, le cheminement qui amène celui-ci à sa réponse est pédagogiquement tout aussi important que le résultat. Car il pourrait fort bien arriver à la bonne réponse par un raisonnement fautif, tout comme il pourrait arriver à la mauvaise réponse par un bon raisonnement suite à une erreur d'inattention. Et ce n'est pas la réponse écrite qui permet de le détecter. Donc, toute démarche qui amènerait l'enseignant à se décentrer de la réponse écrite pour s'attacher aux processus de pensée de l'enfant est capitale au point de vue psycho-pédagogique.

Nous avons obtenu plusieurs évidences (les rapports d'équipes, les projets, les questionnaires) indiquant que l'entraînement à l'analyse conceptuelle a produit un tel effet, et cela malgré l'anxiété passagère constatée au début de l'expérience. Cette décentration de la réponse, qui résulte d'un approche intégrant la mathématique, la psychologie, la pédagogie et l'épistémologie, prend une importance particulière du fait qu'elle donne aux enseignants une perception constructiviste de l'apprentissage. Ceci est mis en évidence par le rôle accru que prend à leurs yeux le questionnement des élèves comme en fait foi la remarque « Souvent quand je corrige le cahier, je demande même à ceux qui ont tout bien ». L'idée que véhicule cette enseignante est des plus intéressantes : non seulement elle questionne les élèves ayant fait des erreurs, mais elle questionne aussi « ceux qui ont tout bien ». Cette réflexion souligne bien les deux rôles complémentaires du test écrit et du questionnement. Si le premier permet d'évaluer les habiletés, par contre un questionnement approprié permet de mieux cerner les processus utilisés.

Critique du modèle hybride

L'expérimentation de la première année nous a amenés à reconsidérer le cadre théorique utilisé dans l'analyse conceptuelle. Malgré nos succès nous ne pouvions pas ignorer les difficultés rencontrées par les enseignants dans l'application du modèle hybride. Les confusions possibles entre les divers modes de compréhension réflétaient certaines contradictions et mettaient en question la cohérence interne de ce modèle.

La première de ces contradictions touche la compréhension dite instrumentale. Tel que nous l'avons déjà mentionné, nous avons employé cette terminologie pour décrire deux choses : une procédure bien spécifique (construction initiale) et aussi toute autre procédure apprise par cœur. Évidemment, avec « procédure apprise par cœur » nous ne faisons pas référence aux automatismes développés à la suite d'une période d'assimilation (telle la mémorisation des tables une fois la construction des concepts d'addition et de multiplication accomplie). Nous désignons plutôt les procédures apprises par cœur qui ne font pas intervenir le raisonnement. Or, comme la compréhension implique nécessairement les processus de pensée, une mémorisation sans raisonnement peut difficilement être qualifiée de compréhension. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce qu'au niveau même de la définition, le mode instrumental, au sens de Skemp, ait provoqué un conflit avec le sens usuel attaché au mot « compréhension ».

La seconde contradiction fait intervenir les deux modes instrumental et relationnel. En effet, en acceptant les critères de Skemp et en y ajoutant d'autres critères basés sur des procédures, différentes évaluations contradictoires de la compréhension sont ainsi rendues possibles. Par exemple, la compréhension de l'addition chez un enfant qui réunit deux ensembles et en compte les éléments à partir de un peut être qualifiée d'instrumentale puisque cette procédure répond au critère de « construction initiale ». D'autre part, elle peut aussi être identifiée comme relationnelle si l'élève peut la justifier. Comment alors caractériser l'élève qui peut justifier la procédure plus évoluée de compter à partir du premier terme ? Dans les deux cas, chaque procédure étant justifiée, on pourrait les qualifier toutes deux de « relationnelle ». Comme l'indique cet exemple, un modèle de la compréhension ne peut utiliser à la fois des critères basés sur des procédures ainsi que sur leur justification. En fait, tout comme les procédures peuvent être apprises par cœur, toute procédure peut aussi être justifiée. Comme la justification témoigne de processus de pensée et de raisonnement elle se rattache à la notion globale de compréhension et ne peut donc pas être considérée comme l'attribut d'un mode particulier.

Une troisième contradiction est rattachée aux modes relationnel et formel. Dans le modèle utilisé, la justification a servi de critère au mode relationnel. Cependant, comme déjà mentionné, toute justification fait appel à une certaine logique de l'enfant et peut même démontrer une « capacité à combiner des idées mathématiques dans un enchaînement de raisonnements logiques ». Il en découle donc qu'un même type de compréhension peut être à la foi qualifié de relationnel et de formel.

Les contradictions que nous venons de décrire proviennent du fait que nous avons essayé de greffer sur les trois modèles précédents des critères additionnels permettant de décrire la formation de concepts. C'est ainsi que nous nous sommes retrouvés avec un modèle hybride. Malgré ces faiblesses, les résultats obtenus sont si encourageants qu'ils justifient l'élaboration d'un nouveau modèle mieux approprié à l'analyse de concepts mathématiques.

Il est à remarquer que les critères que nous avons ajoutés (compréhension intuitive prise dans le sens de connaissances informelles, compréhension instrumentale prise dans le sens de procédure initiale, compréhension relationnelle mise en évidence par des propriétés d'invariance et de réversibilité, compréhension formelle dans le sens de symbolisation d'une notion déjà acquise) décrivent fort bien les niveaux de compréhension dans la construction de schèmes conceptuels. Bien plus, ils peuvent en soi servir de base pour un nouveau modèle qui se limiterait à décrire la formation de concepts. L'élaboration d'un tel modèle exempt de contradictions, ainsi que son expérimentation, font présentement l'objet de nos recherches.

NOTE

1. Recherche subventionnée par le ministère de l'Éducation du Québec (FCAC, EQ-1741).

RÉFÉRENCES

Bergeron, J.C. et Herscovics, N., Vers une intégration de la recherche à la formation et au perfectionnement des enseignants, *Revue des sciences de l'éducation*, vol. VI, no 2, printemps 1980, p. 215-230.

Bergeron, J.C. et Herscovics, N., Problems Related to the Application of a Model of Understanding to Elementary School Mathematics, in *Proceedings of the Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics* (IGPME), Minnesota, 1981, p. 24-29.

Bergeron, J.C., Herscovics, N., Dionne, J., Assimilation of Models of Understanding by Elementary School Teachers, in *Proceedings of the Fifth International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Balacheff, N. (éd.) I.M.A.G., Université de Grenoble, juillet 1981, p. 362-368.

Bruner, J., *The Process of Education*, Cambridge: Harvard, 1960.

Byers, V. et Herscovics, N., Understanding School Mathematics, *Mathematics Teaching*, no 81, 1977, p. 24-27.

Carpenter, T.P. et Moser, J.M., The Development of Addition and Subtraction Concepts in Young Children, in *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Tall, D. (éd.), Warwick, 1979, p. 4-47.

Comiti, C., Bessot, A., Pariselle, C., Analyse de comportements d'élèves du cours préparatoire confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équipotent à un ensemble donné, *Recherches en didactique des mathématiques*, 1980, vol. 1.2, p. 171-224.

Fuson, K., An Analysis of the Counting-on Solution Procedure in Addition, Communication présentée à Wingspread Conference on the Initial Learning of Addition and Subtraction Skills, Racine, Wisconsin, november 1979.

Ginsburg, H., *Children's Arithmetic*, New York: Van Nostrand, 1977.

Herscovics, N., Bergeron, J.C., Nantais-Martin, N., Some Psycho-pedagogical Effects Associated with the Study of Models of Understanding by Primary School Teachers, in *Proceedings of the Fifth International conference on the Psychology of Mathematics Education*, Balacheff, N. (éd.). I.M.A.G., Université de Grenoble, juillet 1981, p. 369-374.

Nesher, P., Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction, Communication présentée à Wingspread Conference on the Initial Learning of Addition and Subtraction Skills, Racine, Wisconsin, novembre 1979.

Piaget, J., *The Child's conception of Number*, New-York: W.W. Norton, 1965.

Skemp, R.R., Relational and Instrumental Understanding, *Mathematics Teaching*, no 77, 1976.

Steffe, L.P., Richards, J., Von Glasersfeld, E., *Children's counting Types : philosophy, theory, and case studies*. Symposium on Inter-disciplinary Research on Number, Athens, Georgia, avril 1981.

Vergnaud, G., The Acquisition of Arithmetical Concepts, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 10, 1979, p. 263-274.