

Modèle de transfert et de diffusion de masse dans un écoulement, en présence de gradients de vitesse et de gradients du coefficient de diffusion turbulente

A diffusion an mass transport model in stream with velocity and turbulent diffusion coefficient gradients

J. Boczar, A. Dorobczynski and J. Miakotoi

Volume 5, Number 3, 1992

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/705136ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/705136ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Université du Québec - INRS-Eau, Terre et Environnement (INRS-ETE)

ISSN

0992-7158 (print)

1718-8598 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Boczar, J., Dorobczynski, A. & Miakotoi, J. (1992). Modèle de transfert et de diffusion de masse dans un écoulement, en présence de gradients de vitesse et de gradients du coefficient de diffusion turbulente. *Revue des sciences de l'eau / Journal of Water Science*, 5(3), 353–379. <https://doi.org/10.7202/705136ar>

Article abstract

The report shows mathematical model of diffusion and pollutants mass transport in rivers with transversal to main movement direction velocity and turbulent diffusion coefficient gradients. The occurrence of the mentioned gradients in plane cross sections is a result of variable depth channel and stream interaction. The results of sample calculations using microcomputer program and the results of mathematical model verification on laboratory model were shown. The presented model serves to qualification of pollutants concentration distribution in rivers, below the outfall.

A mathematical model is based on differential equations of advection-diffusion. Fundamental equation includes real dimensions of outfall and riversides reaction. To take into account the influence of flow velocity and turbulent diffusion gradients, an intensity of transversal to the main flow direction diffusion flux was determined. An intensity of diffusion flux which flows in any stream filament « l » depends on its coordinate, flow velocity and turbulent diffusion coefficient in this stream filament. Basing on diffusion flux intensity equations with variable parameters v_i and D_i , a pollutant concentrations field in a plane cross section was determined. To determine the influence of stream boundaries, the method of ratio of concentration field in unlimited and limited by riversides stream was used. Using this method it is necessary to take into account the symmetry of turbulent diffusion coefficient and velocity distributions related to boundaries which separate the real stream from the imaginary streams situated beyond the boundaries. A condition of mirror reflection of turbulent diffusion coefficient and velocity distributions is accounted for transversal diffusion flux reflection off impermeable riverside and the change movement direction to reversal one.

Sample calculations were based on the example of river channel 30 m wide and the boundary outflow with real dimensions. To express explicitly the results of sample calculations and their analysis, a linear positive and negative diffusion coefficient (range $1.5 \cdot 10^{-9}$ to $80 \cdot 10^{-9}$ [ms⁻²]) and velocity (range 0.2 to 0.8 [ms⁻¹]) gradients were assumed. Negative gradients mean decreasing flow velocity and diffusion coefficient with increasing y distance from the outflow. Positive gradient means increasing magnitude of D (y) and v (y) with increasing y coordinate.

Quantities of turbulent diffusion coefficient were estimated on the basis of mathematical model verification at hydraulic model described below. Sample calculations were done using computer program « Gradient 2 ».

Basing on the analysis of testing results it was found out that the condition of concentration field continuity in the plane cross-section, which was valid with nongradient flow, was not satisfied with the occurrence of flow velocity gradient. Negative velocity gradient causes a considerable increase of concentration field. The quantity of concentration field increases with distance from outfall to cross-section. Comparison results of sample calculations with carried out earlier for slot outfall shows lower concentrations field increments for mal dimension outfall. It is accounted for the presence of wedge with concentrations equal to the initial concentration in outfall. Positive flow velocity gradient causes concentration field decrease with the increase of distance between the stream plane cross-section and outfall.

The increase of concentrations field with negative flow velocity gradient is accounted for pollutants mass accumulation in stream filaments, which flow with lower velocity. With positive gradient an increased pollutant mass advection process occurs in stream filaments with higher velocity. Turbulent diffusion coefficient gradients do not change the quantity of concentration field, but change distribution of pollutant concentrations. Negative gradient increases the slope of concentrations distribution curve, increases maximum concentrations and decreases range of diffusion flux action. Positive diffusion coefficient gradients decrease the slope of concentrations distribution curve by decreasing maximum concentrations and increasing range of diffusion flux action.

Verification of mathematical model was done using laboratory model of open channel. The conditions of dynamic similarity of pollutant mass propagation processes on hydraulic model and river channel were determined. Conditions of similarity were determined on the basis of identity of differential equations of advection-diffusion written for model end the real object. Provided there is a similarity condition of processes of advection and diffusion which is the same Peclet number ($Pe = idem$), the condition of flow similarity must be satisfied, which is the same Froude number ($Fr = idem$). Using the mentioned similarity conditions between the model and the object a similarity scale of concentrations is determined. Concentrations of pollutant mass in any stream point on hydraulic model are I_n times larger than concentrations in corresponding river point, where I_n is a scale of geometric similarity of model to object.

Verification measurements were carried out in laboratory channel 0.3 m in width and 5 m long. Flow velocity gradients were generated by various depth of trapezium channel. Reynolds number was ranging from $2.6 \cdot 10^3$ to $2 \cdot 10^4$. Pollutants were simulated by rhodamine B dye solution. Concentrations of rhodamine solution were measured using the spectral colorimeter, equipped with instrument for measuring fluorescence with accuracy of 10^{-9} [N m⁻³]. The measurements of flow velocity were done with using current flow meter, and the measurements of depth with the use of point limnimeter.

Turbulent diffusion coefficient was estimated on the basic of measured parameters by empirical relation $Dl = I_n \cdot v_i \cdot h_i$, where I_n is a proportionality coefficient, and its value is $I_n = (0.7 \cdot 1) \cdot 10^{-2}$. The results of measurements of tracer concentrations, and results of mathematical model calculations show sufficient convergence for practical tanks. Maximum relative deviation of concentrations reached 18 %. For the detailed investigation of mathematical model suitability, the next stage of verification is predicted on the base of measurements in the natural channel, with gradient of flow velocity.

Modèle de transfert et de diffusion de masse dans un écoulement, en présence de gradients de vitesse et de gradients du coefficient de diffusion turbulente

A diffusion an mass transport model in stream with velocity and turbulent diffusion coefficient gradients

J. BOCZAR¹, A. DOROBCZYNSKI¹, J. MIAKOTO¹

Reçu le 8 décembre 1988, accepté pour publication le 10 décembre 1991*.

SUMMARY

The report shows mathematical model of diffusion and pollutants mass transport in rivers with transversal to main movement direction velocity and turbulent diffusion coefficient gradients. The occurrence of the mentioned gradients in plane cross sections is a result of variable depth channel and stream interaction. The results of sample calculations using microcomputer program and the results of mathematical model verification on laboratory model were shown. The presented model serves to qualification of pollutants concentration distribution in rivers, below the outfall.

A mathematical model is based on differential equations of advection-diffusion. Fundamental equation includes real dimensions of outfall and riversides reaction. To take into account the influence of flow velocity and turbulent diffusion gradients, an intensity of transversal to the main flow direction diffusion flux was determined. An intensity of diffusion flux which flows in any stream filament « i » depends on its coordinate, flow velocity and turbulent diffusion coefficient in this stream filament. Basing on diffusion flux intensity equations with variable parameters v_i and D_i , a pollutant concentrations field in a plane cross section was determined. To determine the influence of stream boundaries, the method of ratio of concentration field in unlimited and limited by riversides stream was used. Using this method it is necessary to take into account the symmetry of turbulent diffusion coefficient and velocity distributions related to boundaries which separate the real stream from the imaginary streams situated beyond the boundaries. A condition of mirror reflection of turbulent diffusion coefficient and velocity distributions is accounted for transversal diffusion flux reflection off impermeable riverside and the change movement direction to reversal one.

Sample calculations were based on the example of river channel 30 m wide and the boundary outflow with real dimensions. To express explicitly the

1. Ecole Polytechnique de Szczecin, Allée Piastow 50, 70-311 Szczecin, Pologne.

* Les commentaires seront reçus jusqu'au 30 mars 1993.

results of sample calculations and their analysis, a linear positive and negative diffusion coefficient (range $1.5 \cdot 10^{-3}$ to $80 \cdot 10^{-3}$ [ms^{-2}]) and velocity (range 0.2 to 0.8 [ms^{-1}]) gradients were assumed. Negative gradients mean decreasing flow velocity and diffusion coefficient with increasing y distance from the outflow. Positive gradient means increasing magnitude of D (y) and v (y) with increasing y coordinate.

Quantities of turbulent diffusion coefficient were estimated on the basis of mathematical model verification at hydraulic model described below. Sample calculations were done using computer program « Gradient 2 ».

Basing on the analysis of testing results it was found out that the condition of concentration field continuity in the plane cross-section, which was valid with nongradient flow, was not satisfied with the occurrence of flow velocity gradient. Negative velocity gradient causes a considerable increase of concentration field. The quantity of concentration field increases with distance from outfall to cross-section. Comparison results of sample calculations with carried out earlier for slot outfall shows lower concentrations field increments for real dimension outfall. It is accounted for the presence of wedge with concentrations equal to the initial concentration in outfall. Positive flow velocity gradient causes concentration field decrease with the increase of distance between the stream plane cross-section and outfall.

The increase of concentrations field with negative flow velocity gradient is accounted for pollutants mass accumulation in stream filaments, which flow with lower velocity. With positive gradient an increased pollutant mass advection process occurs in stream filaments with higher velocity. Turbulent diffusion coefficient gradients do not change the quantity of concentration field, but change distribution of pollutant concentrations. Negative gradient increases the slope of concentrations distribution curve, increases maximum concentrations and decreases range of diffusion flux action. Positive diffusion coefficient gradients decrease the slope of concentrations distribution curve by decreasing maximum concentrations and increasing range of diffusion flux action.

Verification of mathematical model was done using laboratory model of open channel. The conditions of dynamic similarity of pollutant mass propagation processes on hydraulic model and river channel were determined. Conditions of similarity were determined on the basis of identity of differential equations of advection-diffusion written for model and the real object. Provided there is a similarity condition of processes of advection and diffusion which is the same Peclet number ($Pe = \text{idem}$), the condition of flow similarity must be satisfied, which is the same Froude number ($Fr = \text{idem}$). Using the mentioned similarity conditions between the model and the object a similarity scale of concentrations is determined. Concentrations of pollutant mass in any stream point on hydraulic model are \mathcal{L}_1 times larger than concentrations in corresponding river point, where \mathcal{L}_1 is a scale of geometric similarity of model to object.

Verification measurements were carried out in laboratory channel 0.3 m in width and 5 m long. Flow velocity gradients were generated by various depth of trapezium channel. Reynolds number was ranging from $2.6 \cdot 10^{-3}$ to $2 \cdot 10^{-3}$. Pollutants were simulated by rhodamine B dye solution. Concentrations of rhodamine solution were measured using the spectral colorimeter, equipped with instrument for measuring fluorescence with accuracy of 10^{-9} [N m^{-3}]. The measurements of flow velocity were done with using current flow meter, and the measurements of depth with the use of point limnimeter. Turbulent diffusion coefficient was estimated on the basis of measured parameters by empirical relation $Di = \mathcal{L}_p v_i h_i$, where \mathcal{L}_p is a proportionality coefficient, and its value is $\mathcal{L}_p = (0.7 - 1) \cdot 10^{-2}$. The results of measurements of tracer concentrations, and

results of mathematical model calculations show sufficient convergence for practical tasks. Maximum relative deviation of concentrations reached 18 %. For the detailed investigation of mathematical model suitability, the next stage of verification is predicted on the base of measurements in the natural channel, with gradient of flow velocity.

Key-words : mathematical model, convection, turbulent diffusion, flow velocity gradient, diffusion coefficient gradient.

RÉSUMÉ

Le travail présente un modèle mathématique conceptuel de transfert et de diffusion de masse destiné à l'étude des migrations d'effluents en rivière. Ce modèle prend en compte l'existence d'écoulements cisailés ainsi que la présence de gradients de diffusion turbulente. Il permet de calculer les champs de concentrations et les valeurs moyennes de concentration à travers toute section transversale de l'écoulement. La localisation et la taille relative du rejet sont respectées. L'influence des rives sur les processus de dispersion est prise en considération.

Pour quantifier l'influence des berges, une relation est établie entre les concentrations calculées en écoulement de largeur infinie et les concentrations en écoulement d'extension limitée. La méthode utilisée est fondée sur l'emploi d'un champ de vitesse et d'un champ de coefficient de diffusion, symétriques par rapport à des lignes riveraines séparant le courant nul d'un courant fictif situé de part et d'autre de ces limites.

Les résultats des tests du modèle mathématique, réalisés à l'aide du programme moniteur « Gradient 2 », sont présentés. Dans le cas d'écoulements cisailés, on a constaté que la valeur moyenne de concentration d'effluent calculée au travers de sections transversales à l'écoulement n'était pas une quantité invariante tout au long de l'écoulement. Un gradient de vitesse négatif induit une augmentation de cette moyenne à mesure que l'on s'éloigne du rejet alors qu'un gradient positif produit l'effet inverse. Un gradient du coefficient de diffusion turbulente détermine un changement du profil de concentration à l'intérieur d'une section transversale donnée, sans en changer cependant la valeur moyenne. Un gradient négatif augmente la valeur maximale de la distribution des concentrations. Un gradient positif fait diminuer la valeur maximale en aplatissant l'allure du profil.

Le modèle mathématique a ensuite été vérifié à l'aide d'un modèle physique. Un modèle réduit respectant les similitudes d'écoulement a été bâti. Les gradients de vitesse du fluide et les gradients du coefficient de diffusion étaient provoqués par l'introduction de tirants d'eau non uniformes dans chaque section transversale. Les mesures réalisées ont permis d'estimer les coefficients de diffusion turbulente.

Mots clés : modèle mathématique, convection, diffusion turbulente, gradient de vitesse d'écoulement, gradient du coefficient de diffusion.

1 - INTRODUCTION

Les problèmes de transfert et de diffusion de polluants se posent souvent dans les rivières où existent des écoulements cisailés présentant des gradients horizontaux de vitesse ainsi que des coefficients de diffusion turbulente non constants. Ces gradients qui peuvent être définis dans toute section transversale résultent de l'influence de la forme du lit de la rivière sur l'écoulement.

Des recherches antérieures, concernant l'étude des rejets continus d'effluents ont montré que les gradients de vitesse exerçaient une influence significative sur les processus de transfert et de diffusion de masse. La comparaison des flux de masse à travers différentes sections transversales successives en témoigne.

On a en effet constaté que si les flux de masse se conservent de section en section en présence de profils transversaux de vitesse uniformes, il n'en est pas de même dans le cas des écoulements cisailés où les profils de vitesse ne sont plus uniformes.

D'autres études menées par BOCZAR (1983) visaient à quantifier l'influence des paramètres – vitesse d'écoulement et coefficient de diffusion – sur les champs de concentrations en régime non permanent. Ces phénomènes non permanents ont été étudiés sur une rivière située en aval d'un barrage. Il a été conclu que les champs de concentration qui s'établissent dans un écoulement non permanent en présence de gradients de vitesse et de gradients de coefficient de diffusion sont essentiellement différents de ceux qui s'établissent dans les écoulements permanents.

Le présent article rend compte des résultats relatifs à l'étude de l'influence des gradients horizontaux de vitesse d'écoulement et des gradients de diffusion sur les profils de concentrations en effluents rejetés dans une rivière. Les différents processus sont supposés permanents et la variable temps n'apparaîtra pas.

Cette étude a été conduite dans le cadre du « Programme central de recherches fondamentales 03-09, méthodes d'analyse et d'utilisation des ressources en eau ».

2 - ÉQUATIONS FONDAMENTALES

Le transport de polluants conservatifs est décrit par l'équation générale de convection-dispersion que l'on peut écrire dans un repère rectangulaire tridimensionnel sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{S}}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(D_j \frac{\partial \bar{S}}{\partial X_j} \right) \quad j = x, y, z \quad [2.1]$$

v et S représentent des moyennes au cours du temps.

Cette équation repose sur le principe de conservation de la masse et sur l'hypothèse de Taylor selon laquelle la moyenne du produit des fluctuations des variables concentration et vitesse est proportionnelle au gradient de concentration moyenne, soit :

$$\overline{S' v'_j} = - D_j \frac{\partial \bar{S}}{\partial X_j} \quad [2.2]$$

Ces phénomènes de transport ont été étudiés par TAYLOR (1954) pour décrire la dispersion longitudinale dans un conduit cylindrique, et par PATTERSON *et al.* (1956), FISCHER (1967) et THACSON *et al.* (1967) dans le cas d'un écoulement à surface libre dans un canal.

Ils introduisent une simplification de l'équation [2.1] conduisant à la formulation suivante :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial X} = D_L \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \quad [2.3]$$

où D_L ($m^2 s^{-1}$) représente le coefficient de dispersion longitudinale.

Cette description monodimensionnelle est inadaptée à l'étude des rivières larges car elle suppose des profils de concentrations uniformes dans l'une quelconque de leurs sections transversales. De fait on constate souvent sur les rivières larges que les distances séparant les prises d'eau d'un rejet de polluants éventuel sont souvent inférieures aux distances nécessaires à l'obtention de profils de concentrations uniformes. Nous préférons donc utiliser une forme bidimensionnelle de l'équation de convection-diffusion qui tienne compte des phénomènes de dispersion transversale.

Dans le cas d'un rejet permanent qui s'épancherait dans un canal rectangulaire étroit où l'écoulement est uniforme, l'équation [2.1] s'écrit sous la forme suivante (VERBOOM, 1973 ; BANSAL, 1971) :

$$v \frac{\partial S}{\partial X} = D \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \quad [2.4]$$

La direction x désigne alors l'axe longitudinal du canal et y la direction transversale, perpendiculairement aux parois.

La solution analytique de l'équation [2.4], associée à la condition imposée à la limite $x = 0$: rejet permanent à concentration imposée situé à $y = y_0$ s'écrit (CRAN, 1956 ; BANOAL, 1971) :

$$S(x, y) = \frac{Q_s S_s}{2 H \sqrt{\Pi D x v}} \exp \left[- \frac{(y - y_0)^2}{4 D x / v} \right] \quad [2.5]$$

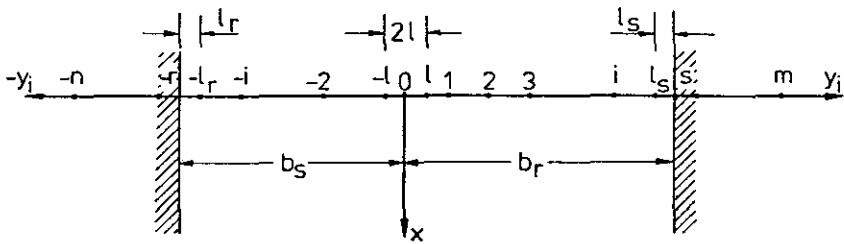


Figure 1 Schéma du canal.
Schematic diagram of channel.

En définissant la concentration équivalente $S_L = \frac{Q_s S_s}{H_v}$ l'expression [2.5] peut se réécrire sous la nouvelle forme :

$$S(x, y) = \frac{S_L}{2\sqrt{\pi D x/v}} \exp - \left[\frac{(y - y_0)^2}{4 D x/v} \right] \quad [2.6]$$

La solution analytique [2.6] a été comparée avec des résultats provenant d'une résolution numérique de l'équation [2.4]. Le schéma explicite utilisé, stable sous certaines conditions, a conduit à une approximation jugée satisfaisante. Néanmoins l'emploi de la solution analytique présente un intérêt pratique supérieur.

3 - DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE MATHÉMATIQUE

Dans le but de tirer parti de l'expression [2.6] pour l'étude de problèmes concrets, nous modifions les conditions imposées à la limite $x = 0$ et remplaçons le rejet théorique ponctuel par un rejet distribué de manière continue à travers une surface de géométrie définie. Cette surface plane est disposée perpendiculairement à la direction générale de l'écoulement, et a pour largeur $2l$ et pour hauteur H . La concentration en polluant y est fixée à la valeur S_0 . Cette surface est appelée surface initiale. L'axe x du référentiel est orienté dans le sens de l'écoulement et l'axe y est perpendiculaire à l'axe du canal. En utilisant un système de coordonnées Euleriennes, on peut définir à tout instant « t » un champ de concentration dans la masse fluide, ainsi qu'une grandeur scalaire de concentration A (s) en chaque section droite du canal. Dans l'hypothèse d'un régime d'écoulement permanent, les grandeurs précédemment définies sont aussi indépendantes du temps (fig. 1).

La linéarité de l'équation [2.4] permet d'employer le principe de superposition afin d'obtenir le champ de concentrations à l'aval du rejet étendu dont les

caractéristiques géométriques sont celles d'un rejet réel. Cette distribution de concentrations est donnée par l'expression suivante :

$$S(x, y) = \frac{S_p}{2 \sqrt{\pi D x/v}} \int_{-L}^L \exp - \left[\frac{(y - y_0)^2}{4 D x/v} \right] dy \quad [3.1]$$

En utilisant la fonction d'erreur erf définie par $\text{erf}(zn) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{zn} \exp(-z^2) dz$

et en introduisant la nouvelle variable $t = x/v$, on obtient une nouvelle formulation pour [3.1] :

$$S(x, y) = \frac{S_p}{2} \left[\text{erf} \left(\frac{L + y}{2 \sqrt{Dt}} \right) + \text{erf} \left(\frac{L - y}{2 \sqrt{Dt}} \right) \right] \quad [3.2]$$

L'équation [3.2] permet de calculer une distribution de concentration dans un milieu illimité latéralement. Pour tenir compte de la présence des berges de la rivière, il est possible d'utiliser la méthode des images symétriques, et le principe de superposition.

Une autre méthode, plus grossière, consiste à multiplier les résultats fournis par la relation [3.2] par le coefficient β précisé ci-dessous :

$$\beta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S dy}{\int_{-b_r}^{+b_s} S dy} \quad [3.3]$$

Le régime d'écoulement étant permanent et les profils de vitesses uniformes, la grandeur $L = \int_{-\infty}^{+\infty} S dy$ se conserve tout au long de l'écoulement et l'on obtient la relation suivante :

$$L(S) = \beta \int_{-b_r}^{+b_s} S dy = 2 L S_p \quad [3.4]$$

L'estimation du coefficient D ainsi que la vérification des résultats produits par la solution [3.2], modifiée par la prise en compte du coefficient β , ont été effectuées sur la Notec, rivière du bassin de l'Oder en Pologne (BOCZAR, 1983). Cependant, l'équation [3.2], établie pour une vitesse d'écoulement moyenne constante V et un coefficient de dispersion unique D, ne permet pas d'étudier les rivières naturelles où les écoulements présentent souvent des profils transversaux de vitesse non uniformes ainsi que des gradients du coefficient de dispersion.

Nous présentons ci-dessous un essai de prise en considération de ces cisaillements dans un modèle de dispersion des polluants. Ce modèle est basé sur la solution [3.2] transformée de façon à rendre compte des échanges diffusifs qui s'établissent entre les différentes veines de l'écoulement.

Pour quantifier les échanges transversaux, l'écoulement est discrétisé en filets élémentaires de largeur Δy , indices respectivement $i = 0, 1, 2, \dots, m, -1, -2, \dots, -n$ (fig. 1). En supposant que la vitesse et le coefficient de diffusion sont constants et respectivement égaux à V_0 et D_0 , on peut définir la concentration dans le filet d'indice i à partir de l'expression [2.1] grâce à la transformation [3.5], dans laquelle $t_0 = X/V_0$:

$$S_i^{(o)} = S_0^{(o)} \varphi_i^{(o)} \quad [3.5]$$

et où $S_0^{(o)}$ désigne la concentration dans le filet « 0 » situé sur l'axe du rejet et est donné par :

$$S_0^{(o)} = S_p \operatorname{erf} \left(\frac{L}{2 \sqrt{D_0 t_0}} \right) \quad [3.6]$$

Le coefficient $X_i^{(o)}$ désigne le coefficient de réception du filet i et vaut :

$$\varphi_i^{(o)} = \frac{\operatorname{erf} \left(\frac{L + y_i}{2 \sqrt{D_0 t_0}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L - y_i}{2 \sqrt{D_0 t_0}} \right)}{2 \operatorname{erf} \frac{1}{2 \sqrt{D_0 t_0}}} \quad [3.7]$$

Dans cette dernière formule, l'indice i peut varier comme suit :

$$i = 1, 1, 2, \dots, i_s, s, \dots, m, -1, -1, -2, \dots, -i_p, -r, \dots, -n$$

En admettant que le système de coordonnées se déplace à la vitesse moyenne de l'écoulement, on constate que le polluant migre perpendiculairement à la direction générale de l'écoulement, sous l'effet du gradient de concentrations. L'intensité du courant diffusif qui passe du filet (o) au filet indicé i s'écrit :

$$J_{D,i}^{(o)} = -D_0 \frac{\partial D_i^{(o)}}{\partial y_i} \quad [3.8]$$

En utilisant l'expression [3.5] :

$$S_i^{(o)} = S_0^{(o)} \frac{\operatorname{erf} \left(\frac{L + y_i}{2 \sqrt{D_0 t_0}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L - y_i}{2 \sqrt{D_0 t_0}} \right)}{2 \operatorname{erf} \left(\frac{L}{2 \sqrt{D_0 t_0}} \right)}$$

on obtient pour [3.8] :

$$J_{D,i}^{(o)} = - \frac{D_o S_o^{(o)}}{2 \operatorname{erf} \frac{L}{2 \sqrt{D_o t_o}}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{L + y_i}{2 \sqrt{D_o t_o}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L - y_i}{2 \sqrt{D_o t_o}} \right) \right]$$

$$= - \frac{D_o S_o}{2 \operatorname{erf} \frac{L}{2 \sqrt{D_o t_o}}} \frac{1}{\sqrt{\pi D_o t_o}} \exp \left[- \frac{(L + y_i)^2 - (L - y_i)^2}{4 D_o t_o} \right] \text{ [g m}^{-2} \text{ s}^{-2}]$$

Si $y_i = 0$ on obtient :

$$J_{D,o}^{(o)} = - \frac{D_o S_o^{(o)}}{2 \operatorname{erf} \frac{L}{2 \sqrt{D_o t_o}}} \frac{1}{\sqrt{\pi D_o t_o}}$$

Dans le cas de l'existence d'un gradient de vitesse d'écoulement l'intensité du courant diffusif s'écrit :

$$J_{D,i}^{(1)} = - \frac{D_o S_o^{(o)}}{2 \operatorname{erf} \frac{L}{2 \sqrt{D_o t_i}}} \frac{1}{\sqrt{\pi D_o t_i}} \exp - \left[\frac{(L + y_i)^2 - (L - y_i)^2}{4 D_o t_i} \right] \quad [3.9]$$

De même, l'expression de la concentration en polluant devient :

$$S_i^{(1)} = - \frac{1}{D_o} \int J_{D,i}^{(1)} dy_i = S_o^{(o)} \varphi_i^{(1)} \quad [3.10]$$

avec

$$\varphi_i^{(1)} = \frac{\operatorname{erf} \left(\frac{L + y_i}{2 \sqrt{D_o t_i}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{L - y_i}{2 \sqrt{D_o t_i}} \right)}{2 \operatorname{erf} \left(\frac{L}{2 \sqrt{D_o t_i}} \right)} \quad [3.11]$$

La présence d'un profil de vitesse non uniforme dans les sections transversales de l'écoulement exerce une influence notable sur la dispersion de l'effluent ce qui se traduit, relativement à la quantité L (s) dans chaque section, par une inégalité du type :

$$L (S_i^{(1)}) > L (S_i^{(o)}) \quad [3.12]$$

ou

$$L (S_i^{(1)}) < L (S_i^{(o)})$$

où $L(S_i)$ représente la somme suivante :

$$L(S_i) = \frac{\Delta y}{2} (S_0 + 2S_1 + \dots + S_m) + \frac{\Delta y}{2} (S_0 + 2S_{-1} + \dots + S_{-n}) \quad [3.13]$$

L'influence des berges peut être définie d'une façon identique à celle qui a déjà été utilisée lors de l'établissement de la relation [3.3]. Les distributions de vitesses virtuelles $V(y)$ et de coefficients de diffusion $D(y)$ fictifs affectés aux courants virtuels, de part et d'autre des limites latérales de l'écoulement réel (fig. 2), contribuent à ce calcul d'influence, en créant des courants diffusifs transversaux issus des rives imperméables.

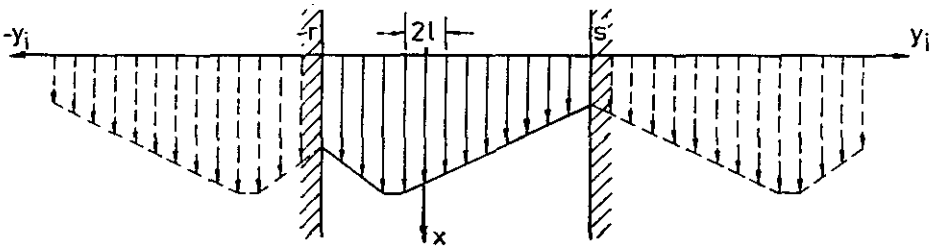


Figure 2 Distributions de vitesse d'écoulement dans le courant réel et dans les courants images.

Flow velocity distribution in real and in imaginary stream.

Dans l'hypothèse d'un écoulement non cisailé, on peut donc définir l'expression de la concentration en effluent dans chacun des filets i d'un écoulement d'extension latérale limitée par la formule suivante :

$$S_i^{(2)} = S_i^{(0)} \frac{L(S_i^{(0)})}{A(S_i^{(0)})} \quad [3.14]$$

où $A(S_i^{(0)})$ représente la somme suivante :

$$A(S_i^{(0)}) = \frac{\Delta y}{2} (S_0 + 2S_1 + \dots + 2S_i + \dots + S_m) + \frac{\Delta y}{2} (S_0 + 2S_{-1} + \dots + 2S_{-i} + \dots + S_{-n}) + \frac{l_s}{2} (S_{is} + S_s) + \frac{l_r}{2} (S_{-ir} + S_{-r}) \quad [3.15]$$

Si l'écoulement présente des profils transversaux de vitesses non uniformes l'introduction de l'effet des rives sur la dispersion conduit à l'expression suivante des concentrations en effluent d'un filet d'indice i :

$$S_i^{(3)} = S_i^{(1)} \frac{L(S_i^{(1)})}{A(S_i^{(1)})} \quad [3.16]$$

Remarquons que l'on peut établir les relations suivantes :

$$A (S_i^{(2)}) = L (S_i^{(0)}) \tag{3.17}$$

$$A (S_i^{(3)}) = L (S_i^{(1)}) \tag{3.18}$$

L'analyse d'un écoulement présentant des gradients de vitesse, mais où le coefficient de diffusion turbulente D_i est maintenu constant et égal à D_o , ne sert uniquement qu'à établir des comparaisons d'ordre numérique. En effet les gradients de vitesse et les gradients de coefficient de diffusion turbulente existent simultanément dans la réalité.

De précédentes études (BOCZAR *et al.*, 1987) ont permis de constater que l'existence d'un gradient du coefficient de diffusion D_i ne modifiait pas les quantités $L (S)$ et $A (S)$ tout au long de l'écoulement, mais induisait seulement des profils de concentrations différents à l'intérieur des sections transversales.

Une valeur négative de ce gradient implique une augmentation du maximum du profil de concentration et des pentes plus marquées, tandis qu'une valeur positive de ce gradient conduit à des distributions de concentration plus aplaties.

Le courant diffusif qui passe vers le filet i a pour intensité la quantité suivante :

$$J_{D,i}^{(4)} = \frac{D_i S_o^{(0)}}{\operatorname{erf}\left(\frac{L}{2\sqrt{D_i t_i}}\right) \sqrt{\pi D_i t_i}} \exp\left[-\frac{(L+y_i)^2 - (L-y_i)^2}{4 D_i t_i}\right] \tag{3.19}$$

et la valeur de la concentration en ce filet numéro i est de :

$$S_i^{(4)} = S_o^{(0)} \mathcal{X}_i^{(4)} \tag{3.20}$$

avec

$$\mathcal{X}_i^{(4)} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{L+y_i}{2\sqrt{D_i t_i}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{L-y_i}{2\sqrt{D_i t_i}}\right)}{2 \operatorname{erf}\left(\frac{L}{2\sqrt{D_i t_i}}\right)} \tag{3.21}$$

Tout comme en [3.7], l'indice i peut varier suivant :

$$i = 1, 1, 2, \dots, i_s, s, \dots, m, -1, -1, -2, \dots, -i_r, -r, \dots, -n$$

L'existence d'un gradient du coefficient de diffusion n'influençant pas les grandeurs des quantités $A (S)$ et $L (S)$ dans une section droite donnée, nous pouvons déduire l'expression des concentrations en une section donnée par la relation [3.22] :

$$S_i^{(5)} = S_i^{(4)} \frac{L (S_i^{(1)})}{L (S_i^{(4)})} \tag{3.22}$$

ou
$$L(S_i^{(5)}) = L(S_i^{(1)}) \quad [3.23]$$

Enfin, en considérant l'effet des rives sur un écoulement présentant des gradients de vitesse et de coefficient de diffusion turbulente, on obtient le champ de concentration par la relation :

$$S_i^{(6)} = S_i^{(5)} \frac{L(S_i^{(5)})}{A(S_i^{(5)})} \quad [3.24]$$

Comme précédemment, nous remarquons que $A(S_i^{(6)}) = L(S_i^{(5)})$.

4 - RÉSULTATS DES TESTS DU MODÈLE MATHÉMATIQUE

Les données qui ont été utilisées pour tester et analyser le modèle mathématique sont rassemblées dans le tableau 1. Ces données décrivent des profils de vitesse non uniformes et les différentes valeurs du coefficient de diffusion turbulente qui ont été affectés aux différents filets de l'écoulement. Le rejet de polluants est situé sur le bord de la rivière (fig. 3) et a pour dimensions $2l = 0,6$ m. Les autres paramètres ont été fixés aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} l_s &= 1,7 \text{ m} \\ l_r &= 1 = 0,3 \text{ m} \\ S_p &= 100 \text{ g m}^{-3} \\ \Delta y &= 2 \text{ m} \end{aligned}$$

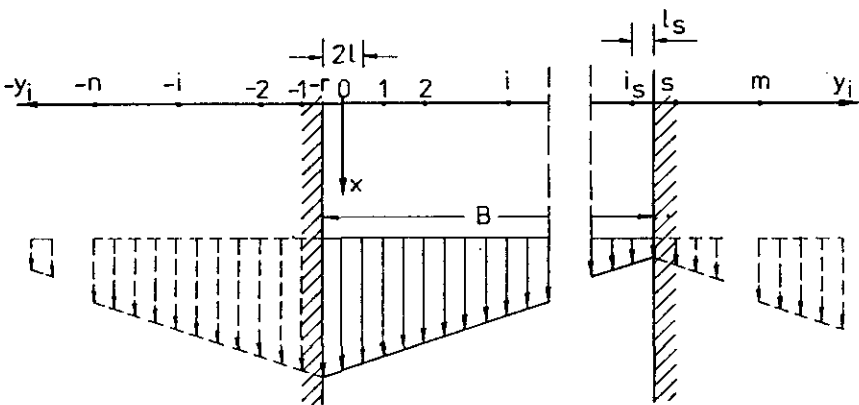


Figure 3 Schéma de distribution de vitesse d'écoulement admis au test du modèle mathématique.

Schematic diagram of flow velocity distribution used in sample calculations.

Les profils de concentrations ont été calculés aux abscisses $x = 200$ m, 300 m, 400 m, 500 m et 600 m (x désignant l'éloignement de la section de calcul à la section initiale où a lieu le rejet).

Afin d'obtenir une interprétation plus aisée des résultats, les différents gradients intervenant au cours de la modélisation sont supposés linéaires, positifs ou négatifs, tout au long de la rivière. Le coefficient de diffusion turbulente (tableau 1) a été estimé à partir de la relation empirique [5.11], elle-même établie d'après les mesures recueillies sur le modèle réduit.

Tableau 1 Données initiales pour tester le modèle mathématique. Gradients négatifs/positifs de vitesse d'écoulement et du coefficient de la diffusion.

Table 1 Input data to mathematical model testing. Positive/negative gradients of turbulent diffusion coefficient and flow velocity.

i	y_i (m)	v_i (m s ⁻¹)	$10^{-3} D_i$ (m ² s ⁻¹)	i	y_i (m)	v_i (m s ⁻¹)	$10^{-3} D_i$ (m ² s ⁻¹)
0	0,0	0,80	80,0	15	30,0	0,212	6,5
		0,20	5,0			0,788	78,5
1	0,3	0,794	79,25	16	32,0	0,252	11,5
		0,206	5,75			0,748	73,5
1	2,0	0,76	75,0	$-r = -1$	$-0,3$	0,806	80,75
		0,24	10			0,194	4,25
2	4,0	0,72	70	-1	$-2,0$	0,722	76,5
		0,28	15			0,234	8,5
3	6,0	0,68	65	-2	$-4,0$	0,732	71,5
		0,32	20			0,274	13,5
4	8,0	0,64	60	-3	$-6,0$	0,692	66,5
		0,36	25			0,314	18,5
5	10,0	0,60	55	-4	$-8,0$	0,652	61,5
		0,40	30			0,354	23,5
6	12,0	0,56	50	-5	$-10,0$	0,612	46,5
		0,44	35			0,394	28,5
7	14,0	0,52	45	-6	$-12,0$	0,572	41,5
		0,48	40			0,434	33,5
8	16,0	0,48	40	-7	$-14,0$	0,532	36,5
		0,52	45			0,474	38,5
9	18,0	0,44	35	-8	$-16,0$	0,492	31,5
		0,56	50			0,514	43,5
10	20,0	0,40	30	-9	$-18,0$	0,452	26,5
		0,60	55			0,554	48,5
11	22,0	0,36	25	-10	$-20,0$	0,412	21,5
		0,64	60			0,594	53,5
12	24,0	0,32	20	-11	$-22,0$	0,372	16,5
		0,68	65			0,634	58,5
13	26,0	0,28	15	-12	$-24,0$	0,332	11,5
		0,72	70			0,674	63,5
14 = i_s	28,0	0,24	10	-13	$-26,0$	0,292	6,5
		0,76	75			0,714	68,5
S	29,70	0,206	5,75	-14	$-28,0$	0,252	1,5
		0,794	79,25			0,754	73,5

La première constatation concerne l'effet d'un profil de vitesse non uniforme. Un gradient négatif entraîne un accroissement significatif de la valeur moyenne de la concentration à travers des sections successives de l'écoulement. Pour s'en convaincre, il suffit d'analyser les répartitions de concentrations obtenues dans un courant sans gradients d'une part, et celles que l'on a calculées en introduisant un gradient de vitesse d'autre part (fig. 4). La figure 5 montre l'évolution de la quantité A (S) en fonction de l'abscisse x. La quantité A (S) croît, dans cet exemple, à mesure que l'on s'éloigne du rejet. En prenant pour référence les valeurs que l'on peut calculer dans un écoulement uniforme, cet accroissement s'élève à 24 % dès 200 m et atteint 35 % après 600 m : on peut toutefois constater que cet accroissement est moins marqué dans le cas d'un rejet fictif (BOCZAR *et al.*, 1987) que dans le cas présent d'un rejet dont les dimensions et les caractéristiques sont plus proches de la réalité.

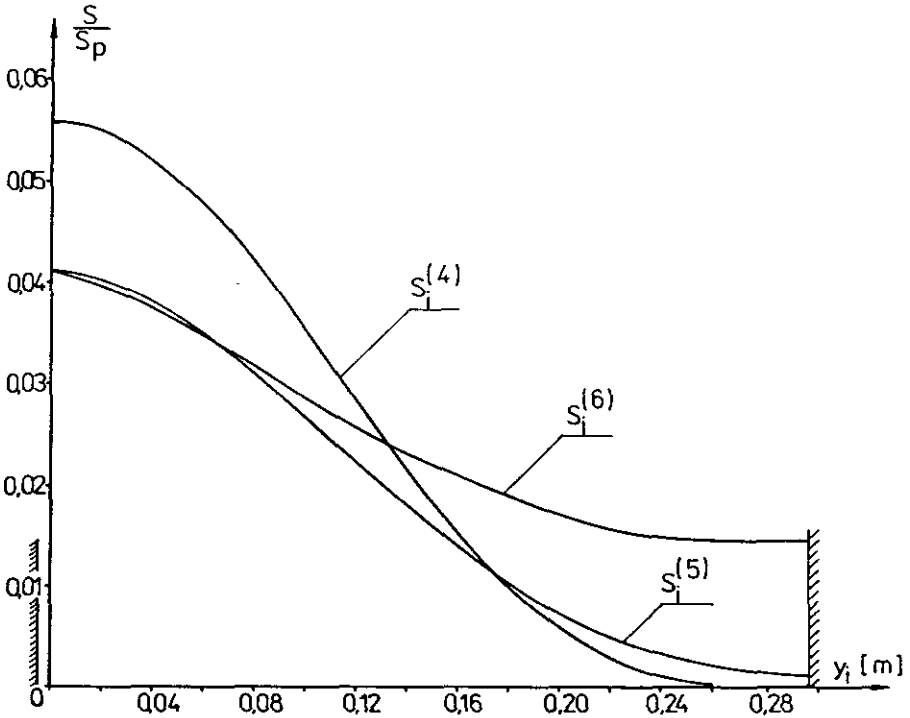


Figure 4 Distributions de concentrations calculées dans les sections transversales de la rivière. $S_i^{(4)}$: concentrations en présence de gradients négatifs ; $S_i^{(5)}$: concentrations dans un courant sans gradient ; $S_i^{(6)}$: concentrations en présence du gradient négatif v_i .

Calculated concentration distributions in river cross-sections. $S_i^{(4)}$: concentrations with negative gradients of v_i and D_i ; $S_i^{(5)}$: concentrations in non-gradient stream ; $S_i^{(6)}$; concentration with negative gradient of v_i .

L'effet d'un gradient négatif du coefficient de diffusion turbulent est de diminuer la portée du courant diffusif transversal et d'augmenter la valeur maximale des profils de concentration à l'intérieur des sections transversales. Cette augmentation s'élève à 33 % de la valeur obtenue sans gradients.

Inversement, un gradient transversal positif de vitesse d'écoulement provoque une diminution de la quantité A (S) par rapport à la valeur que l'on aurait dans le cas d'un écoulement uniforme. Cette diminution atteint 15 % après 200 m et 22 % après 600 m parcourus depuis le rejet (fig. 5 et 6). De même l'action d'un gradient positif du coefficient de diffusion turbulente est de modifier l'allure des profils de concentrations dans une section donnée en les aplatissant. Les maximums de ces profils diminuent de 56 %. Corrélativement le rayon d'action du courant diffusif augmente. Rappelons que les gradients de coefficient de diffusion turbulente ne modifie en rien les valeurs des mesures A (S) et L (S) dans chacune des sections transversales du courant.

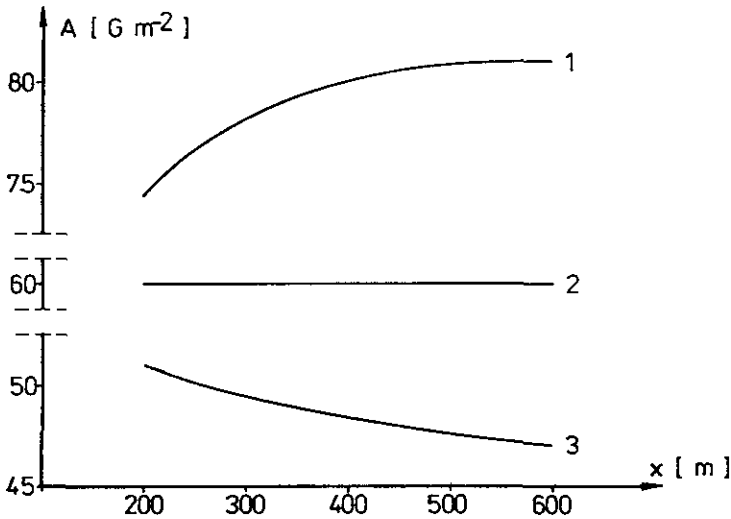


Figure 5 Changement du champ de concentrations dans les sections transversales de la rivière. 1 : champ en présence de gradients négatifs v_i ; 2 : champ dans un courant sans gradient; 3 : champ en présence de gradients positifs v_i .

Variation of pollutant concentration field in river cross-sections. 1 : field with negative gradients; 2 : field in stream without gradient; 3 : field with positive gradients.

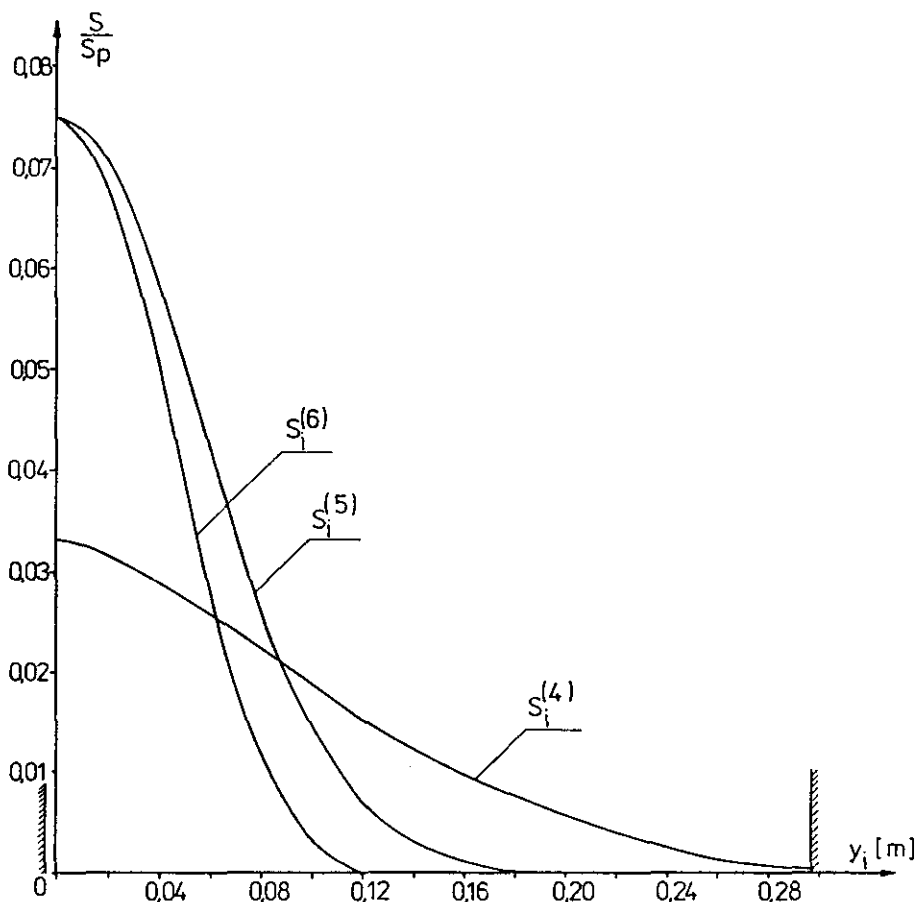


Figure 6 Distributions de concentrations calculées dans les sections transversales de la rivière. $S_i^{(4)}$: concentrations en présence de gradients positifs v_i et D_i ; $S_i^{(5)}$: concentrations en présence de gradients positifs v_i .

Calculated concentrations distributions in river cross-sections. $S_i^{(4)}$: concentration with positive gradients; $S_i^{(5)}$: concentration in stream without gradient; $S_i^{(6)}$: concentration with positive gradients of v_i .

5 - VÉRIFICATION DU MODÈLE MATHÉMATIQUE

La vérification de la validité du modèle mathématique a été obtenue à l'aide d'un modèle réduit de rivière, plus facile à mettre en place qu'une campagne de mesures en rivière naturelle. Les résultats des études menées sur la convection ou la diffusion de polluant obtenus à l'échelle du modèle

réduit peuvent en effet être étendus à l'échelle naturelle à condition de respecter certains coefficients de similitude dynamique. Ces conditions de similitude peuvent être établies à partir de l'équation de convection-dispersion [2.1] écrite pour le modèle réduit, et de l'équation correspondante écrite avec les variables propres au système naturel.

En respectant les conditions de similitude géométrique et cinématique et en se basant sur les conditions de similitude de la diffusion turbulente on construit le nombre adimensionnel de Peclet suivant :

$$Pe = \frac{V_L}{D} \tag{5.1}$$

En plus de cette condition de similitude des phénomènes dispersifs [5.1], les conditions de similitude de l'écoulement doivent aussi être respectées pour que les écoulements en rivière et en modèle réduit puissent être comparés.

La base de l'établissement de cette dernière condition est l'équation différentielle qui décrit un écoulement turbulent quasi-permanent, à laquelle on ajoute l'équation de continuité :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = q_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + K_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad i = x, y, z ; j = x, y, z \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \tag{5.3}$$

La similitude cherchée s'exprime alors par la conservation des nombres adimensionnels suivants, lorsqu'on passe du modèle réduit à l'écoulement naturel :

nombre de Froude :
$$Fr = \frac{V}{Lg} \tag{5.4}$$

nombre de Peclet :
$$Pe = \frac{V_L}{K} \tag{5.5}$$

Remarque : Les nombres de Peclet calculés lors du transfert de mouvement $Pe = \frac{V_L}{K}$ et lors de la dispersion du polluant $Pe = \frac{V_L}{D}$ sont égaux dans le cas de polluants conservatifs.

A l'aide des conditions de similitude précédemment établies, il est maintenant possible de construire le facteur d'échelle $\mathcal{L}'_s = \frac{S'}{S}$ qui permettra de passer des concentrations relevées sur le modèle réduit aux valeurs correspondantes dans l'écoulement réel.

La solution analytique de l'équation de convection-dispersion relative à l'écoulement en canal naturel s'écrit sous la forme suivante :

$$S' = \frac{S_p}{\sqrt{\Pi D' x' / v'}} \exp\left(-\frac{y'^2}{4 D' x' / v'}\right) \quad [5.6]$$

La même solution relative au modèle réduit s'écrit :

$$S = \frac{S_p}{\sqrt{\Pi D x / v}} \exp\left(-\frac{y'^2}{4 D x / v}\right) \quad [5.7]$$

Après l'introduction des échelles de similitude \mathcal{L}_v , \mathcal{L}_D et \mathcal{L}_L calculées comme \mathcal{L}_s , on obtient une nouvelle expression de S' :

$$S' = \frac{S_p}{\sqrt{\Pi \mathcal{L}_D D \cdot \mathcal{L}_L / \mathcal{L}_v \cdot x / v}} \exp\left[\frac{-y^2 (\mathcal{L}_L^2 y)^2 - \mathcal{L}_D \mathcal{L}_L / \mathcal{L}_v}{4 \mathcal{L}_D D \cdot \mathcal{L}_L / \mathcal{L}_v \cdot x / v}\right] \quad [5.8]$$

L'échelle des concentrations \mathcal{L}_s peut alors être calculée telle que :

$$\mathcal{L}_s = \frac{S'}{S} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}_D \cdot \mathcal{L}_L / \mathcal{L}_v}} \exp\left[\frac{-y^2 (\mathcal{L}_L^2 - \mathcal{L}_D \mathcal{L}_L / \mathcal{L}_v)}{4 \mathcal{L}_D D \cdot \mathcal{L}_L / \mathcal{L}_v \cdot x / v}\right] \quad [5.9]$$

Tenant compte de la conservation des nombres de Froude et de Peclet on obtient $\mathcal{L}_v = \mathcal{L}_L^{1/2}$ et $\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_L^{3/2}$, ce qui permet de simplifier l'expression [5.9] en :

$$\mathcal{L}_s = \frac{S'}{S} = \frac{1}{\mathcal{L}_L} \quad [5.10]$$

La concentration en un point quelconque de l'écoulement du modèle réduit est donc \mathcal{L}_L fois plus grande que la concentration correspondante dans le canal naturel. Ce facteur d'échelle est en particulier appliqué dans la section initiale de l'écoulement où se produit le rejet d'effluents.

Présentation du modèle réduit sur lequel a été vérifié le modèle mathématique (fig. 7)

Il s'agit d'un canal en plexiglas de longueur égale à 5 m et de largeur 0,3 m. Les vitesses d'écoulement varient de 0,095 m s⁻¹ à 0,265 m s⁻¹ (tableau 2). Ces profils de vitesse ont été provoqués par l'introduction d'une section droite trapézoïdale. Les tirants d'eau varient de 0,027 m à 0,086 m. Les mesures de tirant d'eau ont été effectuées à l'aide d'un limnimètre à pointe, et un micromoulinet hydrométrique a permis la mesure des vitesses d'écoulement. Le nombre de Reynolds de l'écoulement a varié de 2,6.10³ à 23.10³ au cours des essais prélevés en deux exemplaires dans 5 sections, sur 11 verticales, à raison de 5 points par verticale. Ces 5 sections de mesures avaient respectivement 1,9 m, 2,4 m, 2,9 m, 3,4 m et 3,9 m pour abscisse, l'origine étant fixée au droit du point d'injection de l'indicateur coloré.

L'utilisation d'un colorimètre spectral « Specol » capable de mesurer la fluorescence a permis la mesure des concentrations en rhodamine avec une précision de 10^{-7} g m^{-3} .

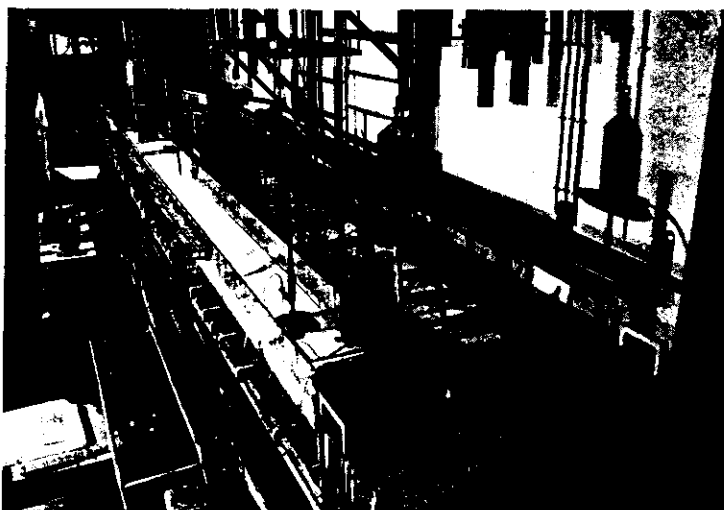


Figure 7 Modèle réduit.
Hydraulic model.

Les gradients de vitesse obtenus dans les expériences « 1 » et « 2 » ont été approchés par des distributions linéaires que l'on a rapportées dans le tableau 2 et sur la figure 8. Ces coefficients de distribution turbulente ont été estimés au cours de l'expérience « 1 » à partir des vitesses d'écoulement mesurées et calculées, moyennées sur la verticale, des concentrations du traceur et de la relation empirique suivante :

$$D_i = \mathcal{L}_p V_i h_i \quad [5.11]$$

dans laquelle le coefficient de proportionnalité \mathcal{L}_p varie entre $0,7 \cdot 10^{-2}$ et 10^{-2} . La linéarité des gradients du coefficient de diffusion turbulente a été admise de même que cela a été supposé pour les distributions de vitesse.

Ces résultats présentés sur les figures 9 et 10 montrent des écarts relativement faibles entre les mesures de l'expérience « 2 » et les courbes calculées à l'aide du modèle mathématique. Ce résultat est jugé satisfaisant, et les précisions atteintes suffisantes pour aborder les problèmes pratiques. L'erreur relative maximale relevée sur les concentrations atteint 18 %. Afin de confirmer la validité de ce modèle analytique, une seconde étape de vérification est prévue. Elle consistera en une comparaison avec des mesures de concentration relevées dans une rivière où existent des gradients de vitesse d'écoulement.

Tableau 2 Données initiales pour vérifier le modèle mathématique.

Table 2 Input data to mathematical model verification.

Gradients négatifs

i	y_i (m)	v_i ($m s^{-1}$)	$10^{-3} D_i$ ($m^2 s^{-1}$)	i	y_i (m)	v_i ($m s^{-1}$)	$10^{-5} D_i$ ($m^2 s^{-1}$)
0	0,0	0,265	24,0	13	0,26	0,110	3,4
i_s	0,003	0,263	23,7	14	0,28	0,125	5,4
1	0,02	0,250	22,0	-1	-0,003	0,263	23,7
2	0,04	0,235	20,0	-1	-0,02	0,250	22,0
3	0,06	0,220	18,0	-2	-0,04	0,235	20,0
4	0,08	0,206	16,0	-1	-0,06	0,220	18,0
5	0,10	0,190	14,0	-1	-0,067	0,215	17,7
6	0,12	0,175	12,0	-4	-0,08	0,225	19,4
7	0,14	0,160	10,0	-5	-0,10	0,240	21,4
8	0,16	0,145	8,0	-6	-0,12	0,255	23,4
9	0,18	0,130	6,0	-7	-0,14	0,270	25,4
10	0,20	0,115	4,0	-8	-0,16	0,285	23,4
$i_s=11$	0,22	0,100	2,0	-9	-0,18	0,240	21,4
S	0,233	0,090	0,7	-10	-0,20	0,225	19,4
12	0,240	0,095	1,4	-11	-0,22	0,210	17,7

Gradients positifs

i	y_i (m)	v_i ($m s^{-1}$)	$10^{-3} D_i$ ($m^2 s^{-1}$)	i	y_i (m)	v_i ($m s^{-1}$)	$10^{-5} D_i$ ($m^2 s^{-1}$)
0	0,0	0,115	5,0	-1	-0,006	0,119	5,6
i_s	0,06	0,111	4,4	-1	-0,02	0,130	7,0
1	0,02	0,100	3,0	-2	-0,04	0,145	9,0
$i_s=2$	0,04	0,085	1,0	-3	-0,06	0,160	11,0
S	0,044	0,082	0,6	-4	-0,08	0,175	13,0
3	0,06	0,094	2,2	-5	-0,10	0,190	15,0
4	0,08	0,109	4,2	-6	-0,12	0,205	17,0
5	0,10	0,124	6,2	-7	-0,14	0,220	19,0
6	0,12	0,139	8,2	-8	-0,16	0,235	21,0
7	0,14	0,154	10,2	-9	-0,18	0,250	23,0
8	0,16	0,169	12,2	-10	-0,20	0,265	25,0
9	0,18	0,184	14,2	-11	-0,22	0,280	23,0
10	0,20	0,199	16,2	-1	-0,24	0,235	21,0
11	0,22	0,214	18,2	-1	-0,256	0,243	19,4
12	0,24	0,229	20,2	-13	-0,26	0,220	19,0
13	0,26	0,244	22,2	-14	-0,28	0,205	17,0
14	0,28	0,259	24,2	-15	-0,30	0,190	15,0
15	0,30	0,244	22,2	-16	-0,32	0,175	13,0

Les distributions de concentrations calculées dans les trois cas types, courant uniforme sans gradients, écoulement avec gradients de vitesse V (g), et écoulement où coexistent gradients de vitesse et gradient du coefficient de

diffusion $D(y)$, ont été, comparées aux résultats fournis par les tests du modèle présentés au chapitre 4. Ces résultats sont présentés sur les figures 11 et 12. Les différences de maximum des profils de concentration $S_o^{(5)}$ et $S_o^{(6)}$ s'expliquent par les réactions des bords et des distributions asymétriques de la vitesse d'écoulement dans le canal.

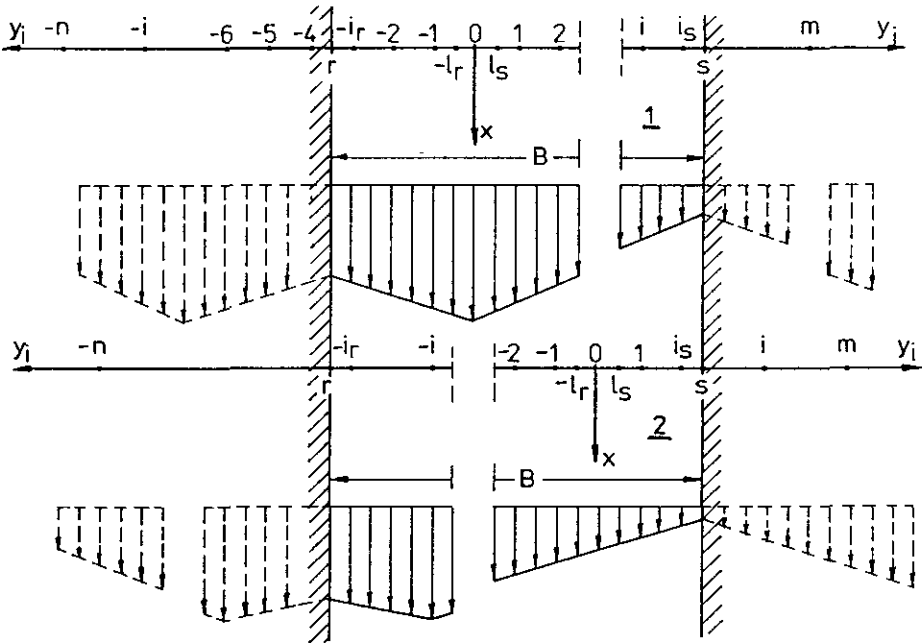


Figure 8 Schémas de distribution de vitesse d'écoulement et situation de rejet de polluants sur le modèle réduit.
Schematic diagrams of flow velocity distribution and pollutant outfall placement on hydraulic model.

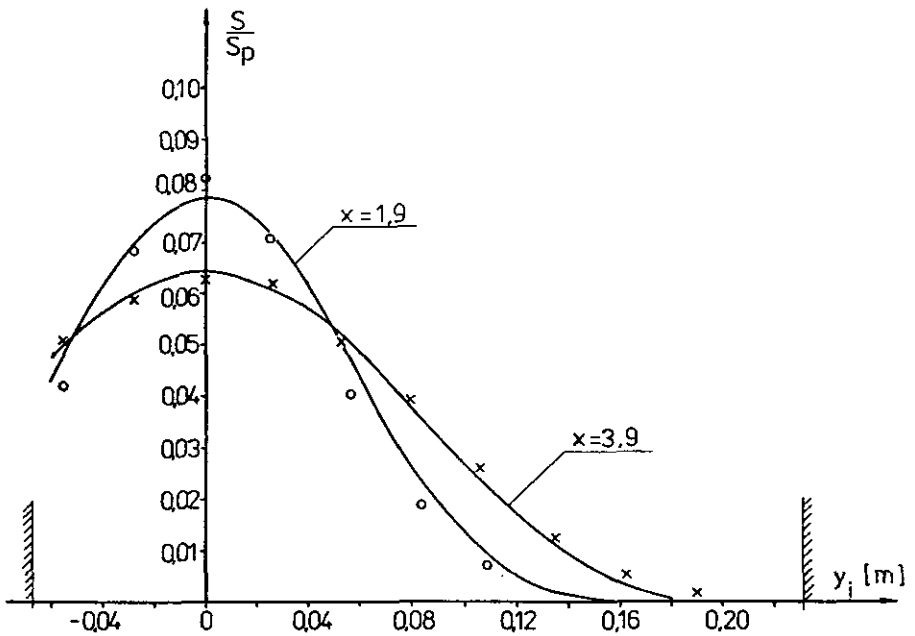


Figure 9 Distribution de concentrations dans les sections transversales du modèle réduit dans le cas de gradients négatifs de vitesse et du coefficient de diffusion turbulente :

— concentrations calculées,

xxxx concentrations mesurées à la distance $x = 3,9$ m de rejet,

oooo concentrations mesurées à la distance $x = 1,9$ m.

Concentrations distribution in model cross-sections with negative turbulent diffusion coefficient and flow velocity gradients :

— *calculated concentrations,*

xxxx *concentrations measured at distance $x = 3,9$ m,*

oooo *concentrations measured at distance $x = 1,9$ m.*

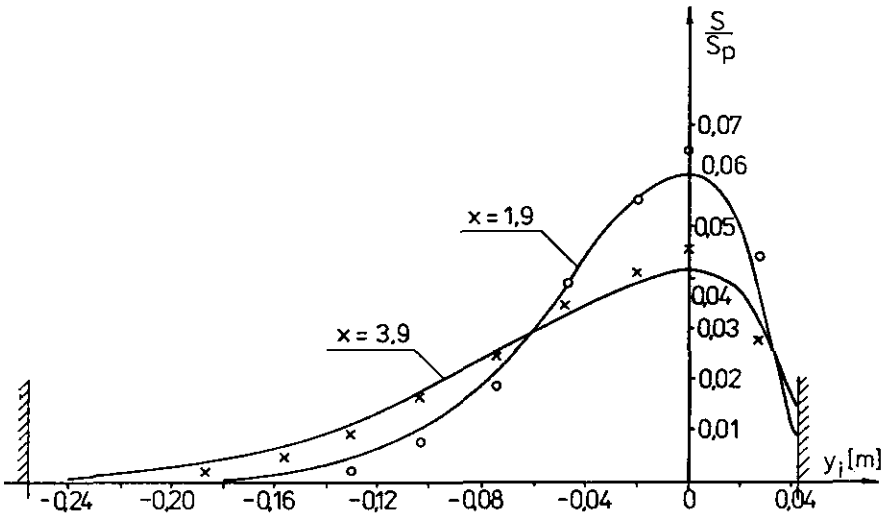


Figure 10 Distribution de concentrations dans les sections transversales du modèle réduit dans le cas de gradients positifs :

— concentrations calculées,
 xxx concentrations mesurées à la distance $x = 3,9$ m de rejet,
 ooo concentrations mesurées à la distance $x = 1,9$ m.

Concentrations distribution in model cross-sections with positive gradients :

— *calculated concentrations,*
 xxx *concentrations measured at distance $x = 3,9$ m,*
 ooo *concentrations measured at distance $x = 1,9$ m.*

Il faut enfin remarquer que l'évolution des valeurs moyennes de concentration de polluants (Fig. 13) est moins marquée dans le cas du canal du fait des gradients de vitesse faibles ($0,09/0,265$ m s⁻¹), et que la longueur relativement courte du modèle réduit, comparée aux longueurs utilisées lors des vérifications numériques du chapitre 4, minore encore cet effet.

CONCLUSION

Le modèle mathématique proposé peut être utilisé pour prévoir le champ de concentrations en polluant dans une rivière soumise en un lieu donné à un rejet d'effluents, et présentant des gradients horizontaux de vitesses d'écoulement et des distributions non uniformes du coefficient de diffusion turbulente.

Le modèle tient compte des conditions limites correspondant aux situations réelles. Le rejet n'est pas ponctuel, mais étendu, et les rives exercent une influence sur les phénomènes de dispersion des effluents.

Le coefficient de diffusion turbulente sur lequel est fondé la vérification du modèle mathématique a été estimé à partir de mesures obtenues sur un modèle réduit et il est d'un ordre de grandeur supérieur à celui qui a été estimé à partir d'un écoulement uniforme ne présentant aucun gradient.

La loi de conservation de la mesure de concentration moyenne A (S) calculée dans différentes sections transversales n'est pas respectée dans le cas d'un écoulement non uniforme. Les gradients de vitesse négatifs induisent un accroissement de cette quantité tandis que des gradients positifs la font diminuer au fur et à mesure que l'on s'éloigne du rejet. Toutefois ces variations sont moins prononcées que celles qui avaient été remarquées lors d'études précédentes (BOCZAR *et al.*, 1987). Ceci est dû à une plus faible intensité du courant diffusif transversal régnant au niveau des filets d'écoulement situés sur l'axe du rejet réel simulé.

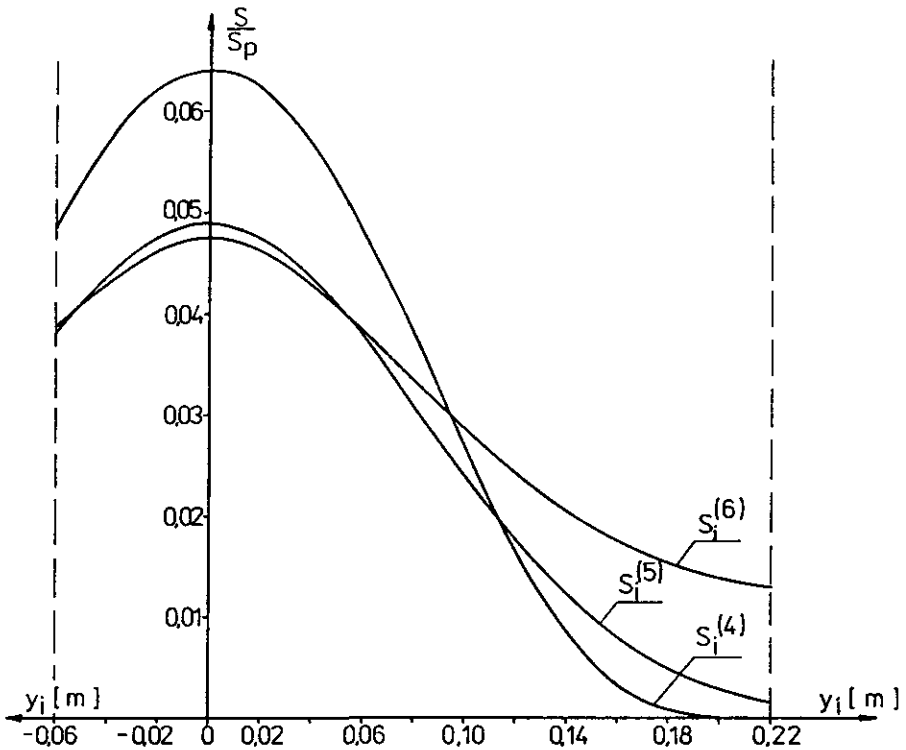


Figure 11 Distributions de concentrations calculées pour le modèle réduit. $S_i^{(4)}$: concentrations en présence de gradients négatifs v_i et D_i ; $S_i^{(5)}$: concentrations dans un courant sans gradient; $S_i^{(6)}$: concentrations en présence du gradient négatif v_i .

Calculated concentration distributions on hydraulic model. $S_i^{(4)}$: concentrations with negative gradients of v_i and D_i ; $S_i^{(5)}$: concentrations in stream without gradient; $S_i^{(6)}$: concentrations with negative gradient of v_i .

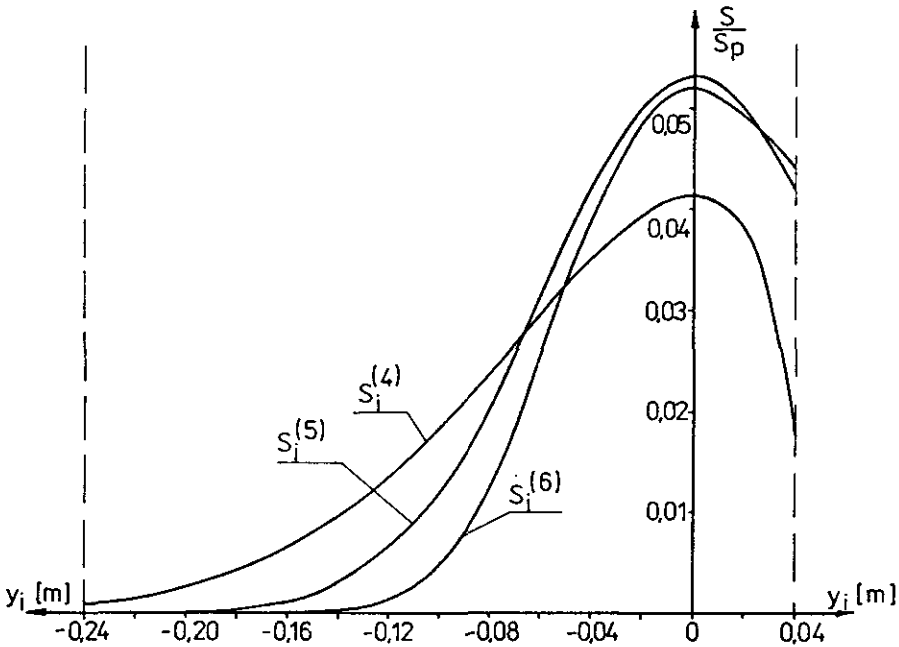


Figure 12 Distributions de concentrations calculées pour le modèle réduit. $S_i^{(4)}$: concentrations en présence de gradients positifs v_i et D_i ; $S_i^{(5)}$: concentrations dans un courant sans gradient; $S_i^{(6)}$: concentrations en présence du gradient positif v_i .

Calculated concentration distributions on hydraulic model. $S_i^{(4)}$: concentrations with positive gradients of v_i and D_i ; $S_i^{(5)}$: concentrations in stream without gradient; $S_i^{(6)}$: concentrations with positive gradient of v_i .

La présence d'un gradient du coefficient de dispersion détermine des changements dans les distributions de concentration de polluants par rapport aux profils existant dans un écoulement dépourvu de tels gradients. Un gradient positif de la grandeur D (y) implique une diminution du maximum des concentrations et provoque un allongement et un aplatissement du profil de concentrations. Un gradient négatif contribue au processus de dispersion en faisant augmenter la valeur maximale et en augmentant les pentes des profils de concentration. Ces résultats sont similaires à ceux précédemment obtenus lors d'études semblables dans le cas de rejets fictifs continus.

Une première vérification du modèle mathématique de convection-diffusion de polluants a pu être réalisée à l'aide d'un modèle réduit. La reproduction des nombres de Peclet et de Froude assurent les conditions de similitudes dynamiques des phénomènes de convection et de diffusion turbulente des polluants entre le modèle réduit et la situation réelle. Les concentrations en traceur non réactif en un point quelconque de l'écoulement en modèle réduit sont \mathcal{L}_1 fois supérieures aux concentrations correspondantes dans la rivière

naturelle simulée, L_1 étant le facteur d'échelle géométrique permettant de rapporter les longueurs réelles aux longueurs correspondantes sur la maquette.

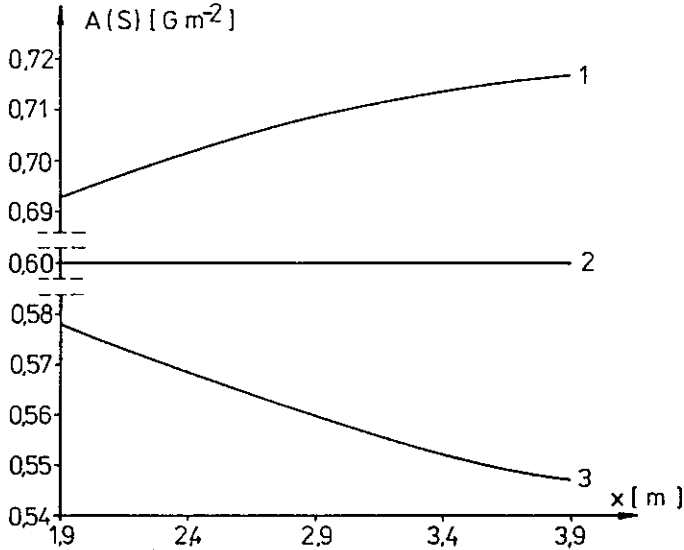


Figure 13 Changement du champ de concentrations mesurées sur le modèle réduit : 1 : champ en présence de gradients négatifs ; 2 : champ dans un courant sans gradient ; 3 : champ en présence de gradients positifs.

Variation of pollutant concentration field on hydraulic model. 1 : negative gradients ; 2 : stream without gradient ; 3 : positive gradients.

Notations

A (S)	$[g m^{-2}]$	mesure de la concentration moyenne transversale dans une section de courant limitée
B	[m]	largeur au miroir
b_r, b_s	[m]	distances entre l'axe du rejet et les deux rives
D	$[m^2 s^{-1}]$	coefficient de dispersion turbulente transversale
Fr		nombre de Froude
g	$[m s^{-2}]$	accélération de la pesanteur
H	[m]	tirant d'eau dans la section du rejet
J		perte de charge
J_d	$[g m^{-2} s^{-1}]$	intensité du courant diffusif
i		numéro d'ordre d'un filet fluide élémentaire
K	$[m^2 s^{-1}]$	viscosité turbulente

L (S)	[g m ⁻²]	mesure de la concentration moyenne transversale dans une section de courant illimitée
2 l	[m]	largeur du rejet à l'origine
l		indice du filet fluide jouxtant le rejet
m, n		indices des filets fluides dans lesquels les concentrations sont négligeables
Pe		nombre de Peclet
P	[N m ⁻²]	pression hydrostatique
Q _s	[m ³ s ⁻¹]	débit de l'effluent
r, s		indices des filets fluides le long des rives
S	[g m ⁻³]	concentration
S _p	[g m ⁻³]	concentration initiale au droit du rejet
t	[s]	temps
v	[m s ⁻¹]	vitesse d'écoulement
Δ y	[m]	distance séparant deux filets voisins
L		échelle de similitude dynamique
ℳ		coefficient de réception des polluants

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BANSAL M.K.,1971. Dispersion in natural streams. *J. Hydr. Div., ASCE* 97, HY 11.
- BOCZAR J., DOROBZYNSKI A., MIAKOTO J.,1989. Méthodes de calculs de la vitesse d'écoulement et de la dispersion des polluants au cours d'écoulement bidirectionnel dans une rivière. *Arch. Hydrotechniki*, z. 3-4.
- BOCZAR J.,1983. Prévision de la qualité d'eau de rivière en aval d'un barrage pendant l'écoulement en régime non permanent. *CR. XX° Congr. de l'AI RH, Moscou, sujet D*, 5 : 144-152.
- BOCZAR J., 1983. Estimation des paramètres et vérification expérimentale de modèle mathématique de la qualité de l'eau en rivière. *Arch. Hydrotechniki*, XXX, z. 2 : 143-163.
- CRANK J.,1956. The mathematics of diffusion. Clarendon Press, London.
- FISCHER H.B.,1967. The mechanics of dispersion in natural streams. ASCE Environmental Engineering Conference, Preprint 427.
- PATTERSON C.C., GLOYNA E.F.,1965. Dispersion measurement in open channels. *J. Sanitary Engineering Div., ASCE* 91, n° SA3.
- TAYLOR G.J.,1954. The dispersion of matter in turbulent flow trough a pipe. *Proc. roy. Soc., London*, 223 : 446.
- THACKSON E.L., KRENKEL P.A.,1967. Longitudinal mixing in natural streams. *J. Sanitary Engineering Div., ASCE* 93, n° SA5 : 67-90.
- VERBOOM G.K.,1973. Transverse mixing in rivers. A numerical approach. *Assoc. Intern. Rech. Hydraulique*, A41.