

Ondes internes du lac du Bourget: analyse des observations par des modèles linéaires

Internal Waves in Lake Bourget: Data Analysis with Linear Models

P. E. Bournet, D. Dartus, B. Tassin and B. Vincon-Leite

Volume 9, Number 2, 1996

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/705252ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/705252ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Université du Québec - INRS-Eau, Terre et Environnement (INRS-ETE)

ISSN

0992-7158 (print)

1718-8598 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Bournet, P. E., Dartus, D., Tassin, B. & Vincon-Leite, B. (1996). Ondes internes du lac du Bourget: analyse des observations par des modèles linéaires. *Revue des sciences de l'eau / Journal of Water Science*, 9(2), 247–266.
<https://doi.org/10.7202/705252ar>

Article abstract

There is a great concern about the understanding of water mass movements in lakes as they play a crucial role in the way nutrients and pollutants are transported. This work brings new insights to the study of internal waves as it compares field data to various mathematical approaches.

During the months of April and December 1994, a thermistor chain was deployed in Lake Bourget, France (length 18 km, width 3 km, maximum depth 145 m) to record temperature every 10 min, over nine unevenly spaced depths, from 10 to 51 m. The time series of measurements provide a detailed picture of the characteristics and dynamics of internal waves. Records are discussed in view of the wind data observed at a meteorological station located at the south-end of the lake. According to the intensity of the wind forcing, the thermal structure is altered in different ways. When the winds are weak, the thermo-cline tilts and sets up a hydrostatic pressure gradient which balances the wind stress (TURNER, 1973). When the wind stops, the density interface oscillates until buoyancy is strong enough to balance the baroclinic pressure field.

Strong winds, however, enhance large amplitude nonlinear waves which may break (Kelvin-Helmholtz instabilities), and therefore give rise to vertical mixing in the hypolimnion. During the recording periods wind stress in general is low, but occasional bursts of energy generate internal waves (fig. 2 and 3). In this paper, we focus on linear internal waves as records display a dominant response of the first longitudinal mode. The internal seiche continues to oscillate with decreasing amplitude after the wind has ceased.

Two approaches have been implemented in order to characterize the internal waves. One consists of signal treatment through spectral analysis and the second one involves mathematical modeling.

Spectral analysis discloses responses of the first mode with periods of about 80h and 40h, respectively, for the April and December field survey (fig. 4 and 5). Further analysis of the April spectra shows that winds generate highly non-linear waves with high energy levels in a large band located in the first 30m. This band results from the merging of two peaks of high energy at 80 and 40h respectively which probably correspond to the fundamental and second harmonic of a nonlinear wave. Then, as the wind stops, internal seiche of the first mode develops in the layer located between 30 and 50m indicating a deepening of the thermocline.

Those fluctuations and their energy spectra are compared with the predictions of three methods which are based on linear theories and consequently are not valid when the magnitude of oscillations is too high. The full phenomenon of wind-forced motion in a lake is not treated here. However, the analysis of postforcing phase is undertaken to characterize free internal waves. One method is the Merian formula, which considers the lake as a two-layer system of constant properties and assumes the lake as a rectangular box. Another is a modified version of the Defant procedure (MORTIMER, 1979) which again assumes two layers but solves the momentum and mass equations with a varying cross section. The third method is the two layered variable depth model (TVDM) developed by Schwab (HORN et al., 1986), fitted to the basin topography and including the free surface displacement. It is expressed here through a one dimensional version directed along the main axis of the lake (i.e. the lateral variations of depth are not considered).

The models display patterns of thermocline displacements (illustrated in fig. 7 and 8) which, in periodicity, are closely similar to those observed. Moreover, they give estimates of the maximum velocity induced by the seiche. Values of the order of 7 cm/s and 3 cm/s are found in the epilimnion and hypolimnion respectively. Finally, the influence exerted by the morphometry on the wave shape and associated field velocity is emphasized. In particular, the difference in the maximum speed calculated in the hypolimnion probably stems from the lateral contraction of the lake (and thus increasing speed) near Aix-les-Bains which is not taken into account in the TVD Model. The validity of the models implemented here is thrown back into question when the magnitude of the oscillations is sufficiently high to steepen the thermocline and in this particular case, a nonlinear theory (Korteweg-de Vries Equation) would be appropriate.

The importance of a better knowledge of internal seiches goes beyond the field of physics. Through their influence on mixing and dispersal, those motions profoundly affect the chemical and biological economies of many lakes. Internal waves are responsible for periodic vertical displacement of the resuspended biomass, and consequently for variation in the light intensity to which algal cells are exposed. Furthermore, associated bottom currents can enhance dissolution and remobilization of nutrients by transporting the products of bacterial decomposition away from the sediment-water interface into the water column.

Ondes internes du lac du Bourget : analyse des observations par des modèles linéaires

Internal waves in lake Bourget :
Data analysis with linear models

P.E. BOURNET^{*1}, D. DARTUS², B. TASSIN¹, B. VINÇON-LEITE¹

Reçu le 4 septembre 1995, accepté le 25 janvier 1996*.

SUMMARY

There is a great concern about the understanding of water mass movements in lakes as they play a crucial role in the way nutrients and pollutants are transported. This work brings new insights to the study of internal waves as it compares field data to various mathematical approaches.

During the months of April and December 1994, a thermistor chain was deployed in Lake Bourget, France (length 18 km, width 3 km, maximum depth 145 m) to record temperature every 10 min, over nine unevenly spaced depths, from 10 to 51m. The time series of measurements provide a detailed picture of the characteristics and dynamics of internal waves. Records are discussed in view of the wind data observed at a meteorological station located at the south-end of the lake. According to the intensity of the wind forcing, the thermal structure is altered in different ways. When the winds are weak, the thermocline tilts and sets up a hydrostatic pressure gradient which balances the wind stress (TURNER, 1973). When the wind stops, the density interface oscillates until buoyancy is strong enough to balance the baroclinic pressure field.

Strong winds, however, enhance large amplitude nonlinear waves which may break (Kelvin-Helmoltz instabilities), and therefore give rise to vertical mixing in the hypolimnion. During the recording periods wind stress in general is low, but occasional bursts of energy generate internal waves (*fig. 2 and 3*). In this paper, we focus on linear internal waves as records display a dominant response of the first longitudinal mode. The internal seiche continues to oscillate with decreasing amplitude after the wind has ceased.

Two approaches have been implemented in order to characterize the internal waves. One consists of signal treatment through spectral analysis and the second one involves mathematical modeling.

1. Centre d'Enseignement et de Recherche pour la Gestion des Ressources Naturelles et de l'Environnement, La Courtine, 93167 Noisy-Le-Grand, France.
2. Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Allée du Prof. C. Soula, 31400 Toulouse, France.

* Les commentaires seront reçus jusqu'au 13 décembre 1996.

Spectral analysis discloses responses of the first mode with periods of about 80h and 40h, respectively, for the April and December field survey (fig. 4 and 5). Further analysis of the April spectra shows that winds generate highly nonlinear waves with high energy levels in a large band located in the first 30m. This band results from the merge of two peaks of high energy at 80 and 40h respectively which probably correspond to the fundamental and second harmonic of a nonlinear wave. Then, as the wind stops, internal seiche of the first mode develops in the layer located between 30 and 50m indicating a deepening of the thermocline.

Those fluctuations and their energy spectra are compared with the predictions of three methods which are based on linear theories and consequently are not valid when the magnitude of oscillations is too high. The full phenomenon of wind-forced motion in a lake is not treated here. However, the analysis of post-forcing phase is undertaken to characterize free internal waves. One method is the Merian formula, which considers the lake as a two-layer system of constant properties and assumes the lake as a rectangular box. Another is a modified version of the Defant procedure (MORTIMER, 1979) which again assumes two layers but solves the momentum and mass equations with a varying cross section. The third method is the two layered variable depth model (TVDM) developed by Schwab (HORN *et al.*, 1986), fitted to the basin topography and including the free surface displacement. It is expressed here through a one dimensional version directed along the main axis of the lake (i.e. the lateral variations of depth are not considered).

The models display patterns of thermocline displacements (illustrated in fig. 7 and 8) which, in periodicity, are closely similar to those observed. Moreover, they give estimates of the maximum velocity induced by the seiche. Values of the order of 7 cm/s and 3 cm/s are found in the epilimnion and hypolimnion respectively. Finally, the influence exerted by the morphometry on the wave shape and associated field velocity is emphasized. In particular, the difference in the maximum speed calculated in the hypolimnion probably stems from the lateral contraction of the lake (and thus increasing speed) near Aix-les-Bains which is not taken into account in the TVD Model. The validity of the models implemented here is thrown back into question when the magnitude of the oscillations is sufficiently high to steepen the thermocline and in this particular case, a nonlinear theory (Korteweg-de Vries Equation) would be appropriate.

The importance of a better knowledge of internal seiches goes beyond the field of physics. Through their influence on mixing and dispersal, those motions profoundly affect the chemical and biological economies of many lakes. Internal waves are responsible for periodic vertical displacement of the resuspended biomass, and consequently for variation in the light intensity to which algal cells are exposed. Furthermore, associated bottom currents can enhance dissolution and remobilization of nutrients by transporting the products of bacterial decomposition away from the sediment-water interface into the water column.

Key words : internal waves, lake, mathematical modeling, spectral analysis.

RÉSUMÉ

Deux campagnes de mesures effectuées sur le lac du Bourget en période de faible stratification (avril et décembre 1994) ont mis en évidence des oscillations de la thermocline de période comprise entre deux et trois jours. Ces oscillations atteignent 40 m d'amplitude pour une profondeur maximale de 145 m. Elles ont probablement un impact sur les processus biologiques et physico-chimiques qui gouvernent l'évolution de la qualité des eaux du lac.

L'analyse des données brutes des températures révèle une corrélation étroite entre la génération des ondes internes et les événements de vents importants. Il apparaît en particulier que seuls les vents violents (> 8 m/s) affectent la stratification thermique de manière significative.

Deux approches sont utilisées pour caractériser ces ondes :

– une approche par traitement du signal qui donne accès aux périodes d'oscillations prédominantes ainsi qu'à la répartition de l'énergie dans la colonne d'eau en fonction de la fréquence.

– une approche par modélisation mathématique au cours de laquelle les résultats obtenus par trois techniques distinctes utilisant plusieurs degrés de représentation de la bathymétrie du lac sont comparés. Ces modèles permettent de calculer les périodes d'oscillations ainsi que les déplacements de l'interface de densité et les vitesses dans chaque couche. À partir des valeurs des amplitudes d'oscillation obtenues expérimentalement, des vitesses maximales de l'ordre de 7 cm/s dans l'épilimnion et 3 cm/s dans l'hypolimnion ont pu être estimées pour les deux épisodes considérés.

On montre que les modèles mathématiques et l'analyse spectrale corroborent les observations.

Mots-clés : ondes internes, lac, modélisation mathématique, analyse spectrale.

1 – INTRODUCTION

Les ondes stationnaires, ou seiches ont été fréquemment observées en milieu lacustre (MORTIMER, 1952 ; THORPE, 1977 ; WIEGAND et CHAMBERLAIN, 1986). Ces oscillations surviennent en surface (mode barotropique), ou à l'intérieur de la colonne d'eau (mode baroclinique). Dans le cas des seiches de surface, les forces qui gouvernent le retour à l'équilibre sont proportionnelles à la différence de densité entre l'eau et l'air, alors que pour les ondes internes, elles sont proportionnelles à la différence de densité entre l'épi- et l'hypolimnion. Une conséquence directe de ces observations est que les seiches internes ont en général une forte amplitude (plusieurs mètres), une vitesse faible (quelques cm/s), et des périodes longues (plusieurs dizaines d'heures), à l'opposé des seiches de surface (MUNNICH *et al.*, 1992). Les seiches internes ont donc un impact plus important sur les processus physico-chimiques et biologiques dans le lac que les seiches de surface. En effet, les déplacements souvent importants et persistants des couches d'eau qu'elles engendrent peuvent affecter fortement les distributions de nutriments et de biomasse. Les seiches sont responsables du déplacement vertical périodique du plancton, et donc de la variation périodique d'intensité lumineuse à laquelle les algues sont exposées (GAEDKE & SCHIMMELE, 1991). De plus, les courants de fond associés à ces ondes internes peuvent favoriser la remise à disposition à l'intérieur de la colonne d'eau des nutriments stockés dans le sédiment (MUNNICH, 1994).

2 – PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL ET ANALYSE DES DONNÉES

2.1 Le site

Le lac du Bourget est le plus grand lac situé entièrement en France. Localisé en Savoie à proximité des Alpes, il est issu du retrait glaciaire würmien (NICLOUD *et al.*, 1987). Le lac, eutrophe jusqu'en 1980, a vu la qualité de ses eaux s'améliorer suite à un détournement des eaux usées des villes riveraines qui y parvenaient. Une modélisation biogéochimique sur la période 1980-90 (VINÇON-LEITE *et al.*, 1995) a permis d'interpréter l'évolution de la qualité des eaux du lac consécutive à ces aménagements. Il est apparu nécessaire d'entreprendre une analyse approfondie du fonctionnement physique du lac pour améliorer la quantification des échanges entre l'épi et l'hypolimnion.

Le lac a une forme allongée, orientée approximativement suivant un axe Nord-Sud. Les caractéristiques morphométriques du lac sont reportées dans le tableau 1. Le lac peut être considéré comme formé de deux bassins : celui du Nord (profondeur 145 m) et celui du Sud (profondeur 110 m). Une plate-forme littorale peu profonde s'étend sur le pourtour Est du lac. Le talus situé à l'Ouest, en revanche, est beaucoup plus pentu (*fig. 1*). Des montagnes parallèles aux rives du lac le protègent des vents transversaux, de sorte que la plupart des vents sont orientés suivant l'axe principal Nord-Sud.

Tableau 1 Caractéristiques morphométrique du lac du Bourget.

Table 1 *Morphometric characteristics of Lake Bourget.*

Superficie	42 km ²
Volume	3,5 km ³
Profondeur maximale	145 m
Profondeur moyenne	80 m
Longueur	18 km
Largeur maximale	3 km
Superficie du bassin versant	560 km ²

Les données de vent ont été acquises par Météo France avec un pas de temps de 6 min à la station météorologique de Voglans au sud du lac (*fig. 1*).

Les données de température ont été enregistrées avec un pas de temps de 10 min en utilisant une chaîne de thermistances Aanderaa (Aanderaa, 1991) constituée de 9 capteurs répartis inégalement entre 10 et 51 m de profondeur. La chaîne est mouillée au sud d'Aix les Bains (point T) en dehors des zones de pêche. Un autre point, le point B (ou point central), localisé dans la fosse Nord a aussi fait l'objet de mesures ponctuelles de profils thermiques. Celles-ci ont été effectuées avec une sonde CTD¹ (Conductivity, Temperature, Depth).

1. Meeres-technik-Elektronik, Trappenkamp, Germany.

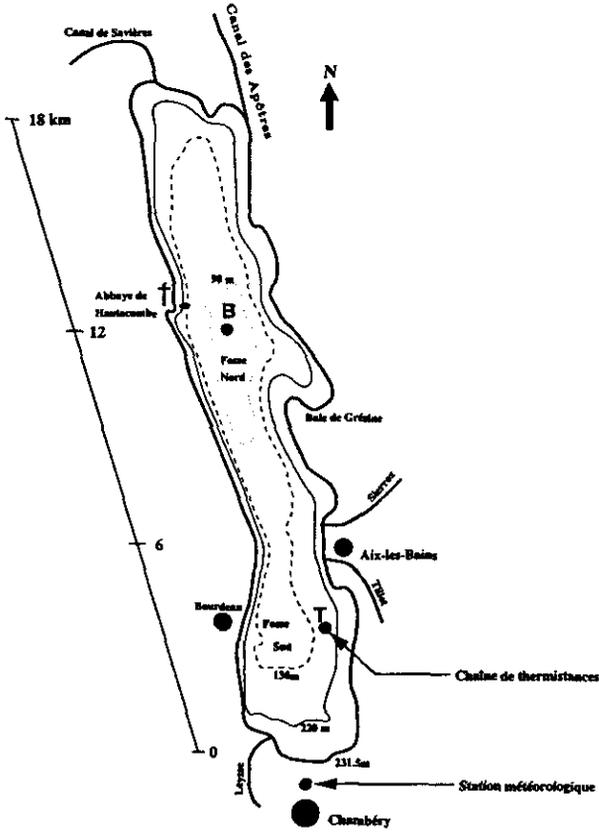


Figure 1 Points de mesures dans le lac du Bourget.
Station locations in Lake Bourget.

Deux périodes ont été définies pour suivre le développement des ondes internes :

- la première au moment où la stratification commence à se mettre en place : 30 mars-17 avril 1994,
- la seconde au moment où la destratification s'amorce : 30 novembre-12 décembre 1994.

2.2 Observations et interprétations

Nous avons reporté sur les figures 2 et 3 les module et direction du vent, le cisaillement correspondant - estimé à partir de la relation de Wu (1969) :

$\tau = \rho_{air} C_D U_{10}^2$ avec ρ_{air} : densité de l'air, U_{10} : vitesse du vent (m/s) à 10 m et

$C_D = .5 \sqrt{U_{10}} \cdot 10^{-3}$ dans la plage de vent considérée -, et les séries temporelles de température à 9 profondeurs distinctes. Pour plus de lisibilité, ces chroniques de températures ont été décalées successivement de 1 °C par thermistance suivant la verticale en indiquant la première valeur de chaque série.

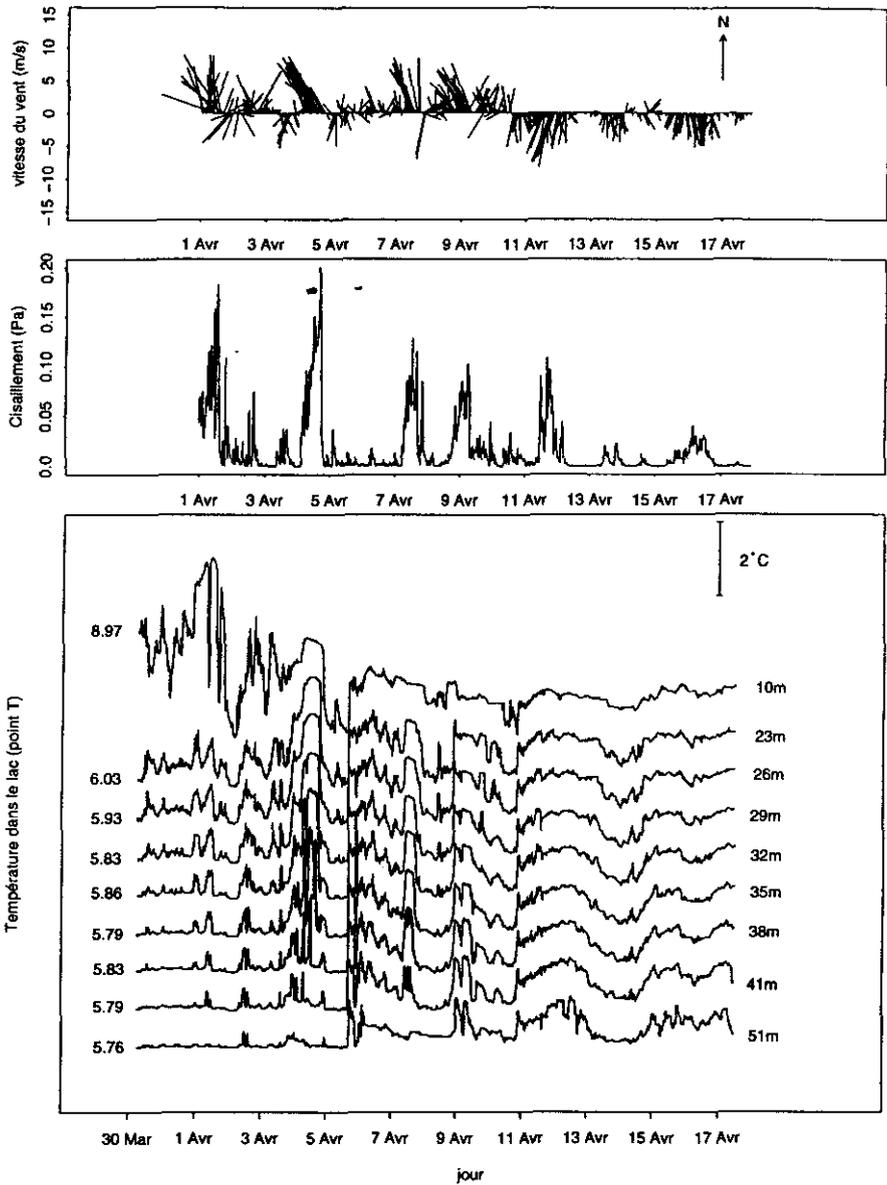


Figure 2 Evolution du vent et des températures dans le lac, avril 1994.
Time series of wind and themistor chain data at point T, April 1994.

2.2.1 Campagne d'avril 1994 (fig. 2)

L'enregistrement de vent permet de distinguer deux épisodes. Jusqu'au 9 avril, les vents dominants sont orientés suivant la direction Sud-Nord et atteignent

des vitesses maximales de l'ordre de 11 m/s. A partir du 10 avril, en revanche, la direction des vents s'est inversée et leur intensité s'est réduite. L'analyse des séries temporelles de température révèle une corrélation étroite avec les chro-

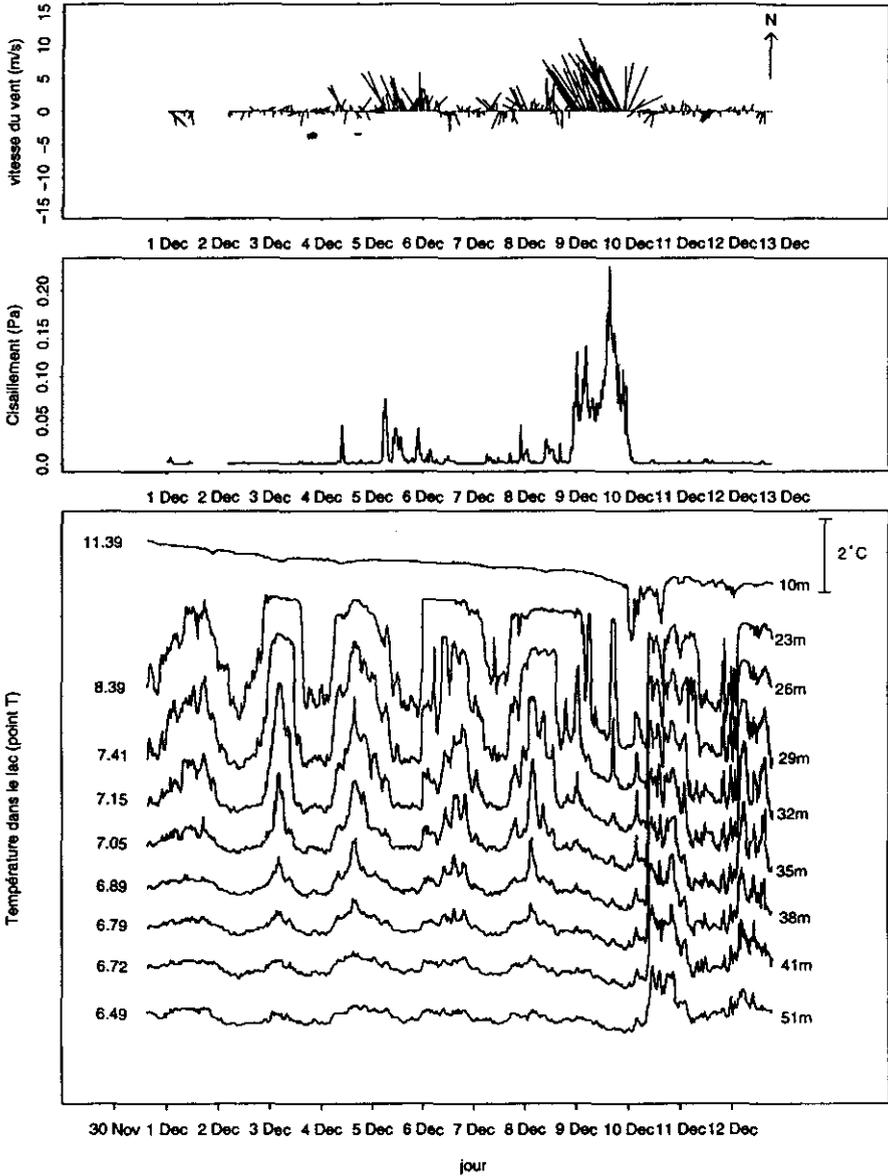


Figure 3 Evolution du vent et des températures dans le lac, décembre 1994.
Time series of wind and themistor chain data at point T, December 1994.

niques de vent. Au début de l'enregistrement, le lac est bien stratifié avec une interface de densité à environ 15 m de profondeur. Mais entre le 1^{er} et le 9 avril, 2 événements de vent important (1 et 4 avril) ont successivement excité les isothermes pendant environ 20 h. Ces coups de vent génèrent des structures frontales fortement non linéaires qui raidissent la thermocline. Ils apportent par ailleurs suffisamment d'énergie pour initier une oscillation de l'interface de densité (HEAPS & RAMSBOTTOM, 1966) ainsi qu'un enfoncement significatif de la thermocline. Les vents de moindre intensité qui ont suivi semblent par contre avoir peu d'effet sur la structure thermique et des oscillations libres correspondant au premier mode de seiche interne se développent. Deux raisons peuvent justifier cette évolution : d'une part les vents qui surviennent après le 9 avril sont plus faibles (de l'ordre de 8 m/s) ; le cisaillement associé n'en est donc que d'autant plus diminué ; d'autre part la force volumique exercée par le vent sur l'épilimnion est fortement réduite lorsque l'épaisseur de ce dernier augmente. En l'absence de renouvellement suffisant d'énergie, l'onde s'amortit peu à peu.

2.2.2 Campagne de décembre 1994 (fig. 3)

Durant la majeure partie de la campagne, des vents de faible intensité provenant principalement du sud ont soufflé. Un épisode violent et durable est pourtant survenu le 9 décembre avec des pointes de l'ordre de 11 m/s comparables aux maxima enregistrés en avril. Alors que jusqu'à cette date, une structure oscillatoire, probablement initiée par des coups de vent successifs au mois de novembre existait dans le lac, à partir du 9 décembre, cette structure disparaît pour laisser place à des oscillations de forte amplitude qui désorganisent la structure thermique de la colonne d'eau. L'uniformité de la température à 10 m indique que le capteur se situe dans la zone mélangée. L'écrêtage des pics de la série enregistrée à 23 m traduit le passage intermittent du capteur dans la couche de mélange. Cet écrêtage n'étant plus visible à 26 m, on peut penser que l'épilimnion s'étend jusqu'à une profondeur d'environ 25 m.

2.3 Analyse spectrale

Afin de caractériser les ondes en terme de fréquence dominante et de répartition de l'énergie, nous avons déterminé les spectres des enregistrements de température. Les séries temporelles échantillonnées à pas de temps constant de 10 min ont été transformées en utilisant une technique de type Fast Fourier Transform (FFT). Les données ont été traitées par blocs de 1024 points, correspondant à environ une semaine d'enregistrement, après en avoir ôté la moyenne. Les figures 4 et 5 présentent la répartition spatiale de la puissance en fonction de la profondeur obtenue par interpolation linéaire des spectres calculés aux 9 profondeurs définies précédemment.

Pour la campagne d'avril, nous avons divisé l'enregistrement en deux périodes 3-9 avril 1994 et 10-17 avril 1994 afin de distinguer les processus prépondérants (fig. 4). La série 3-9 avril comporte 2 pics d'énergies voisines qui se confondent en une large bande couvrant une plage allant de 40 à 80 h tandis que la série 10-17 avril n'en présente qu'un à environ 80 h. Dans les deux cas, le premier mode est excité. Le second pic de la première série pourrait correspondre au 2^e mode d'oscillation du bassin. Néanmoins, la non linéarité observée doit aussi influencer ces résultats. La non linéarité peut en effet être considérée comme une onde de fondamental P à laquelle se superposent des harmoniques

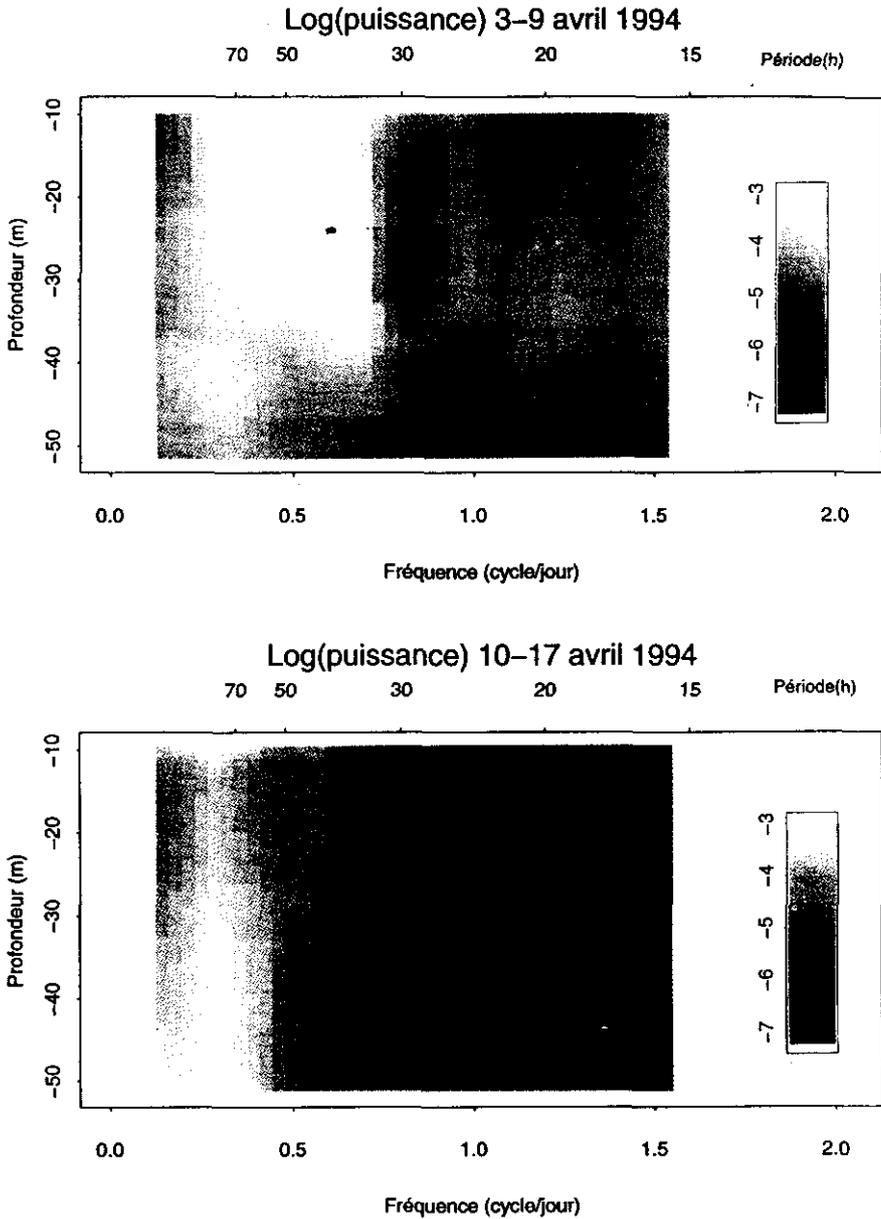


Figure 4 Carte spectrale de la répartition d'énergie au point T, avril 1994.
Spectral map showing the energy distribution at point T, Avril 1994.

plus élevées de période $P/2$, $P/3$... Les signaux de ces harmoniques (et en particulier le premier $P/2$), apparaissent dans le spectre, cumulés à ceux des modes de bassin (LEMMIN, 1987), ce qui rend la distinction entre les contributions relatives de ces deux processus délicate. La comparaison des deux cartes spectrales met aussi en évidence un transfert d'énergie de la zone 0-35 m vers la région 25-50 m qui traduit l'enfoncement de la thermocline.

Pour la campagne de décembre, seules les données couvrant la période 30 novembre-7 décembre ont été considérées. Le spectre correspondant présente un pic marqué au voisinage de 40 h qui témoigne de l'existence d'un premier mode de seiche de bassin. Contrairement aux spectres de la campagne d'avril, l'énergie est concentrée dans une région de faible épaisseur située entre 20 et 30 m. Les oscillations sont confinées dans la zone stratifiée, ce qui confirme le rôle de guide d'onde joué par le métalimnion (IMBERGER, 1994).

L'utilisation de la modélisation mathématique complète cette approche d'analyse spectrale.

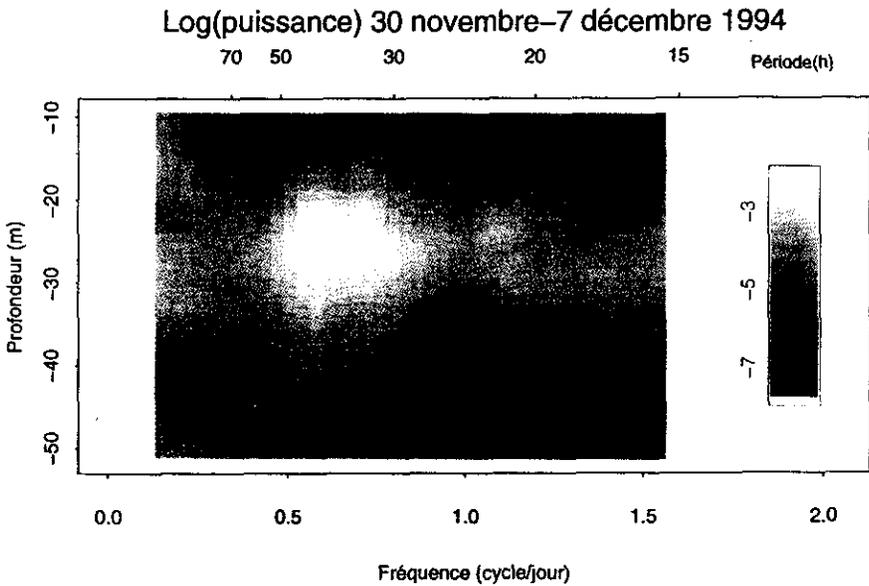


Figure 5 Carte spectrale de la répartition d'énergie au point T.
Spectral map showing the energy distribution at point T, December 1994.

3 – MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DES ONDES LINÉAIRES

Dans les situations stratifiées observées durant les campagnes de mesures d'avril et décembre 1994, le lac présente une structure caractérisée par un métaalimnion de faible épaisseur. Aussi, les modèles que nous présentons assimilent le lac à un système constitué de deux couches homogènes en température (fig. 6). Compte tenu de la forme allongée du lac, nous avons négligé les effets de la rotation de la terre (Mortimer, 1974) et considéré les seiches internes se propageant suivant l'axe principal x .

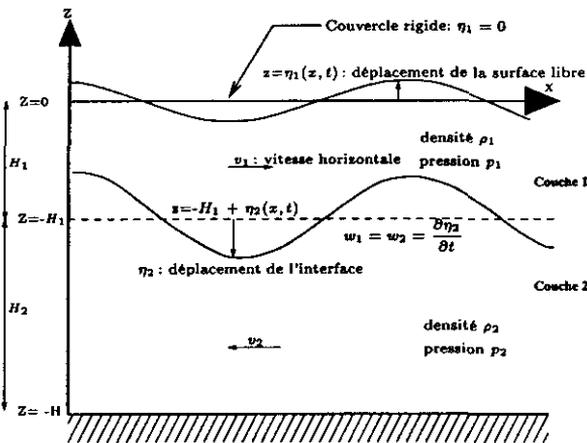


Figure 6 Schéma de définition d'un système bicouches.
Definition sketch of a two-layer system.

Plusieurs approches incorporant des modélisations différentes de la géométrie du lac ont été mises en œuvre afin de caractériser les ondes linéaires du lac du Bourget en terme de période, de déplacement de l'interface de densité et de vitesses horizontales dans chaque couche :

- la relation de MERIAN considère le lac comme un parallélépipède rectangle à 2 couches d'épaisseurs constantes,
- le modèle de HORN *et al.* (1986) résout les équations unidirectionnelles qui régissent le comportement des ondes en incorporant la variation de l'épaisseur de l'hypolimnion,
- enfin, la méthode de DEFANT (MORTIMER, 1979) suppose le lac constitué de deux couches mais intègre en plus la variation de la section transversale.

3.1 Formulation

3.1.1 Équations de base

Les modèles que nous avons utilisés reprennent la formulation générale décrite par LEBLOND & MYSAK (1978). Les notations utilisées dans la suite sont définies sur la figure 6.

Couche 1 – $H_1 + \eta_2 \leq z \leq \eta_1$

$$\text{Pression} \quad p_1 = \rho_1 g(\eta_1 - z) \quad (1)$$

$$\text{Continuité :} \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Équation de quantité de mouvement projetée suivant l'axe des x dans l'hypothèse de petites perturbations :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \quad (3)$$

Couche 2 – $-H \leq z \leq -H_1 + \eta_2$

$$\text{Pression :} \quad p_2 = \rho_1 g(H_1 + \eta_1 - \eta_2) + \rho_2 g(-H_1 + \eta_2 - z) \quad (4)$$

$$\text{Continuité :} \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Équation de quantité de mouvement projetée suivant l'axe des x dans l'hypothèse de petites perturbations :

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\rho_1}{\rho_2} g \frac{\partial(\eta_2 - \eta_1)}{\partial x} - g \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \quad (6)$$

3.1.2 Relation de Merian

Si l'on se place dans le cadre de l'approximation du couvercle rigide ($\eta_1 = 0$), l'intégration des équations de continuité suivant la verticale dans chaque couche en utilisant comme conditions aux limites $w = 0$ en $z = 0, -H$ et $w = \partial \eta_2 / \partial t$ en $z = -H_1$ conduit, après combinaison avec les équations de quantité de mouvement, à l'équation d'onde classique (GILL, 1982) :

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

où $c^2 = g' H_1 H_2 / (H_1 + H_2)$ représente le carré de la vitesse de propagation du mode baroclinique. On pose $g' = g(\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$.

Le champ de longueurs d'ondes admissibles est déduit des conditions aux limites (HUTTER, 1984) :

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

où L représente la longueur du bassin. Les périodes correspondantes sont calculées à partir de l'expression de la célérité :

$$T_n^2 = 4L^2 \frac{(H_1 + H_2)}{n^2 H_1 H_2 g'} \quad \text{formule de Merian} \quad (9)$$

3.1.3 Méthode TVDM (Two-layer Variable Depth Model)

Dans la méthode TVDM (HORN *et al.*, 1986), la stratification est approximée par deux couches de densités respectives ρ_1 et ρ_2 . La rotation de la terre est négligée mais les oscillations de la surface libre sont prises en compte. En supposant que les vitesses sont des fonctions harmoniques du temps, les équations linéarisées de conservation de la masse et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$i\omega(\eta_1 - \eta_2) = \frac{\partial H_1 v_1}{\partial x} \quad (10)$$

$$i\omega v_1 = -g \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \quad (11)$$

$$i\omega \eta_2 = \frac{\partial H_2 v_2}{\partial x} \quad (12)$$

$$i\omega v_2 = -g \frac{\partial (\delta(\eta_1 - \eta_2) + \eta_2)}{\partial x} \quad (13)$$

où ω est la fréquence d'oscillation, v_1 et v_2 sont les vitesses horizontales de la couche supérieure et inférieure, η_1 et η_2 , les déplacements de la surface libre et de l'interface et $\delta = \rho_1/\rho_2$.

Les conditions aux limites le long de la ligne de côte s'écrivent :

$$v_1 = 0, v_2 = 0 \quad (14)$$

et

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

Les équations 11 et 13, sont utilisées pour éliminer la vitesse des équations 10 et 12 :

$$-\frac{\omega^2}{g}(\eta_1 - \eta_2) = H_1 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} \quad (16)$$

$$-\frac{\omega^2}{g} \eta_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(H_2 \frac{\partial}{\partial x} (\delta(\eta_1 - \eta_2) + \eta_2) \right) \quad (17)$$

Pour la résolution numérique, on a utilisé un schéma classique aux différences finies (NOUGIER, 1985). Le système se ramène alors à un système linéaire à coefficients constants de la forme $\lambda \vec{X} = A \vec{X}$ où \vec{X} est la forme discrétisée du vecteur $(\eta_1 - \eta_2, \eta_2)$.

Les valeurs propres $(-\omega^2/g)$ associées à la matrice A donnent accès aux modes d'oscillation, et les vecteurs propres, aux champs de déplacements cor-

respondants. Les équations 11 et 13 permettent de déduire les champs de vitesse maximale après intégration sur 1/4 de période.

$$v_{1 \max} = \frac{gT}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial x}; v_{2 \max} = \frac{gT}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\partial(\delta(\eta_1 - \eta_2) + \eta_2)}{\partial x} \quad (18)$$

3.1.4 Méthode de DEFANT

La méthode de DEFANT (LEMMIN & MORTIMER, 1986) suppose aussi un système bi-couches, mais prend en plus en compte la variation de la section transversale. Cette méthode prédit pour chaque mode non seulement les périodes et les positions des nœuds mais aussi les déplacements à partir desquels on peut estimer la vitesse des courants. Les déplacements horizontaux ξ_2 et ξ_1 moyennés sur chaque tronçon sont calculés en supposant que η_2 et ξ_2 sont des fonctions harmoniques du temps de la forme $\eta_2 = \eta_2(x) \exp(i\omega t)$ et $\xi_2 = \xi_2(x) \exp(i\omega t)$. En remarquant que $v_2 = \partial \xi_2 / \partial t$, l'équation de continuité prend la forme :

$$\frac{\partial S_2 \xi_2}{\partial x} = -\eta_2 b \quad (19)$$

De même, l'équation 6 appliquée à la couche 2, pour un bi-couches de section variable devient (MORTIMER, 1979) :

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = -g' \frac{S_1}{S_1 + S_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \quad (20)$$

b représente la largeur du lac et S_1, S_2 les sections transversales respectivement de la couche supérieure et de la couche inférieure. Les équations sont discrétisées puis le système est résolu de façon itérative. L'itération commence en choisissant une valeur de la période T généralement prise égale à celle donnée par la formule de Merian. Les périodes des modes d'oscillations sont obtenues pour les valeurs de T qui assurent la condition de continuité.

Les vitesses maximales sont déduites du champ de déplacement longitudinal après intégration sur 1/4 de cycle :

$$v_{1 \max} = \frac{2 \cdot \pi \xi_1}{T}; v_{2 \max} = \frac{2 \cdot \pi \xi_2}{T} \quad (21)$$

3.2 Résultats et discussions

Les trois méthodes décrites précédemment (MERIAN, DEFANT et TVDM) ont été successivement appliquées aux campagnes d'avril et de décembre 1994 pour caractériser les ondes linéaires observées. Les paramètres utilisés ont été estimés à partir des isothermes et des profils de température obtenus avec la sonde CTD (*tabl. 2*) au point B situé à proximité du nœud du 1^{er} mode de seiche.

Pour calculer la profondeur H_2 utilisée dans la relation de Merian, on a utilisé l'approximation : $H_2 = (H_{\text{moyen}} - H_1)$. Les périodes calculées sont reportées dans les tableaux 3 et 4. Les trois modèles donnent des résultats similaires qui, pour le premier mode, sont proches des écarts moyens entre deux crêtes calculés à par-

tir des enregistrements thermiques : respectivement 77,1 h et 39,5 h pour les campagnes d'avril et de décembre.

Tableau 2 Paramètres utilisés dans les modèles linéaires.

Table 2 Parameters used in linear models.

	H1 (m)	T1 (°C)	T2 (°C)
Avril 1994	40	7,2	5,8
Décembre 1994	25	10,7	6,5

Tableau 3 Modes d'oscillation (h) campagne d'avril 1994.

Table 3 Periods of the internal seiche modes, April 1994.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Merian	85,3	42,6	28,4	21,3
Defant	76,8	36,3	25,1	18,8
TVDM	73,1	36,8	24,6	18,6

Tableau 4 Modes d'oscillation (h) campagne de décembre 1994.

Table 4 Periods of the internal seiche modes, December 1994.

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Merian	40,4	20,2	13,5	10,1
Defant	39,2	18,6	12,6	9,5
TVDM	36,9	18,7	12,5	9,4

Pourtant, de façon générale, la formule de Merian a tendance à surestimer les périodes parce qu'elle ne prend pas correctement en compte les effets géométriques. Les méthodes de Defant (LEMMIN & MORTIMER, 1986) et TVDM, en revanche intègrent ces effets et donnent une représentation plus adéquate de la physique des ondes. Dans le cas de la méthode TVDM l'impact de la non-prise en compte de la variation latérale de profondeur du lac a été évalué. Conservant la valeur donnée initialement à H_1 , on a affecté un coefficient multiplicateur $0 < \alpha < 1$ à H_2 . En considérant que chaque section de la couche inférieure peut être décrite par une parabole, la hauteur équivalente (H'_2 à prendre en compte devient $H'_2 = 2H_2/3$ ($\alpha = 2/3$). Cette opération a pour effet de réduire les volumes des sections de la couche inférieure utilisées dans la résolution numérique. La

conséquence immédiate est une augmentation des périodes d'oscillation (respectivement 77,7 h et 38,3 h pour les campagnes d'avril et décembre 1994) qui va dans le sens escompté.

Les figures 7 et 8 indiquent les champs de déplacement normé de l'interface obtenus par les deux modèles bicouches à géométrie variable. L'origine de l'axe horizontal se situe à l'extrémité Sud du lac. Les vitesses maximales correspondantes dans chaque couche sont estimées en supposant un déplacement maximal de l'interface de 1 m. Les vitesses réelles peuvent alors être calculées en multipliant ces résultats par l'amplitude des oscillations (*tabl. 5*).

Tableau 5 Amplitudes d'oscillations observées et vitesses maximales associées.

Table 5 *Magnitude of observed oscillations and corresponding maximum velocities.*

	Amplitude (m)	Defant (cm/s)		TVDM (cm/s)	
		$v_1 \text{ max}$	$v_2 \text{ max}$	$v_1 \text{ max}$	$v_2 \text{ max}$
Avril 1994	20	6,8	5,0	6,1	2,6
Décembre 1994	6	6,8	2,6	5,6	1,0

Les deux modèles fournissent des résultats sensiblement identiques. En particulier, les positions des nœuds et des ventres d'oscillation coïncident entre les deux méthodes. Des écarts parfois importants sont néanmoins observés entre les champs de vitesse à hauteur d'Aix-les-Bains (km 7). Ils sont probablement dus à l'étranglement de l'écoulement à cet endroit que seule, la méthode de Defant intègre dans le calcul.

L'approche linéaire n'est valable que pour des ondes stationnaires de faible amplitude. Cependant, les épisodes de vent fort (1,4 avril ; 9 décembre) engendrent des structures frontales de grande amplitude qui se présentent comme des ondes de dépression se propageant d'une extrémité à l'autre du lac. Ces structures sont semblables à celles observées dans d'autres lacs (Lac Seneca, Hunkins & Fliegel (1973) ; Loch Ness, Thorpe (1977) et Lac Babine, Farmer (1978)). Leur analyse nécessite la mise en œuvre de modèles non linéaires comme, par exemple, la théorie de Korteweg-de Vries (voir Mysak, 1984).

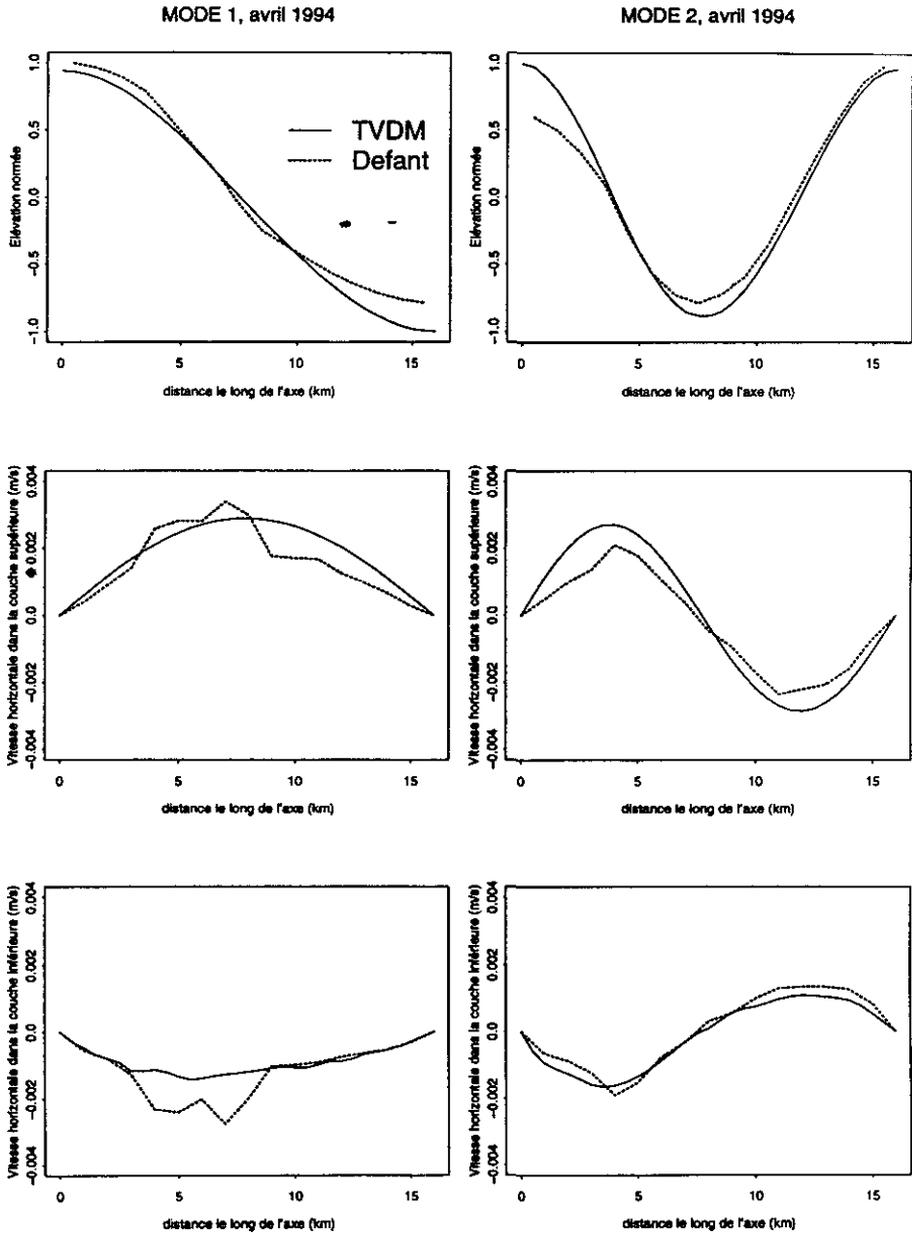


Figure 7 Comparaison des résultats des méthodes de Defant et TVDM : avril 1994.
Predictions by the Defant procedure compared with those by the TVDM model, April 1994.

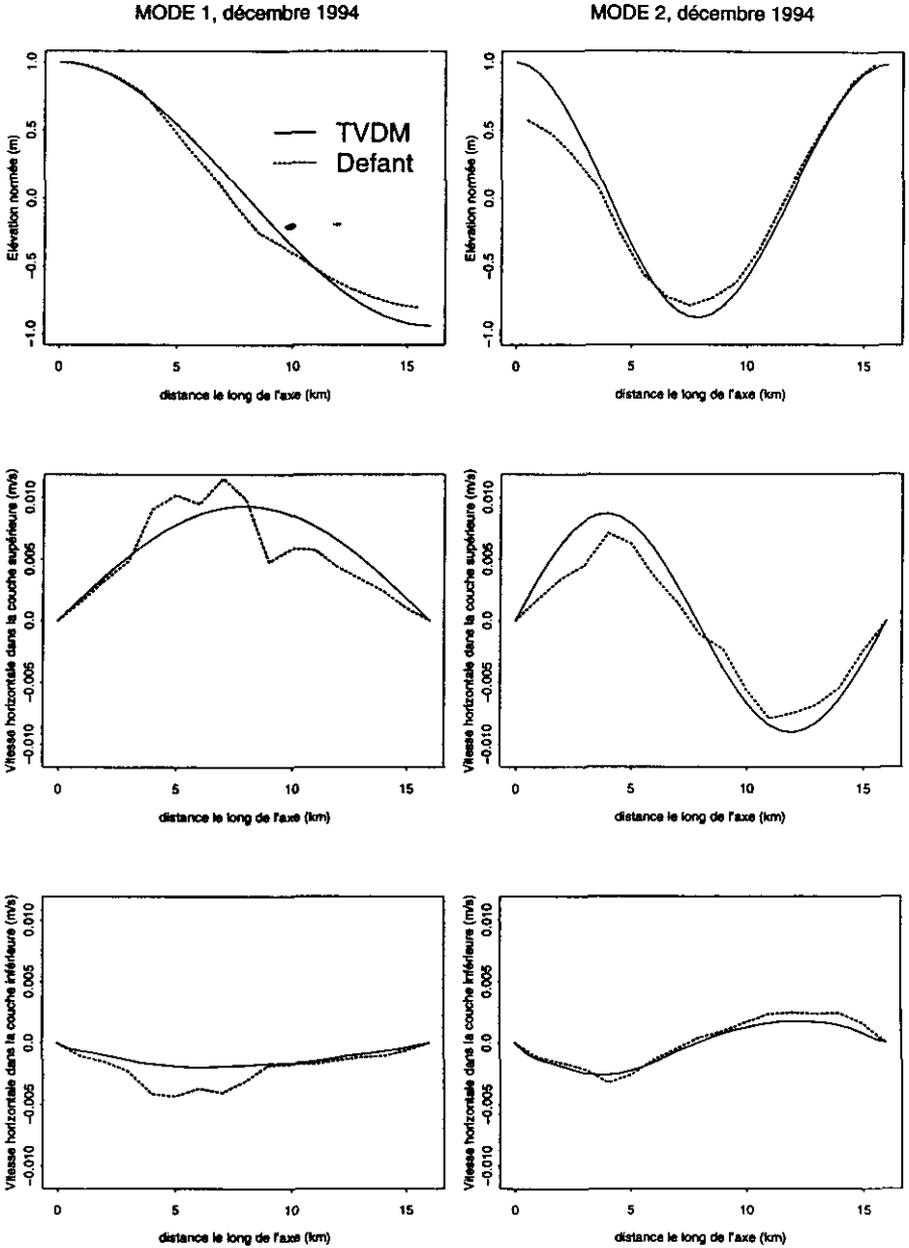


Figure 8 Comparaison des résultats des méthodes de Defant et TVDM : décembre 1994.
Predictions by the Defant procedure compared with those by the TVDM model, December 1994.

4 – CONCLUSIONS

L'analyse de deux campagnes de mesures effectuées sur le lac du Bourget à des périodes où celui-ci était faiblement stratifié a révélé l'existence d'oscillations internes de période comprise entre 2 et 3 jours.

La modélisation mathématique basée sur les équations linéarisées de conservation de la masse et de la quantité de mouvement a permis d'identifier ces oscillations comme étant des seiches internes uninodales de premier mode. Elle a aussi permis d'estimer les vitesses maximales associées à ces mouvements : des valeurs de l'ordre de 7 cm/s ont été obtenues. Ces vitesses sont bien supérieures à la vitesse débitante (débit moyen/section moyenne) qui, dans le cas du lac du Bourget est inférieure au millimètre par seconde. La comparaison des modèles a aussi montré que, une fois que les ondes sont initiées par un coup de vent, deux facteurs contrôlent leur évolution : la stratification et la bathymétrie. Enfin, des structures frontales non linéaires apparaissent dans les enregistrements suite à des coups de vent forts. Leur interprétation pourra être effectuée à partir de la théorie de Korteweg-de Vries.

L'analyse spectrale a apporté des informations sur les transferts et sur la répartition de l'énergie dans la colonne d'eau. On a en particulier montré qu'une partie de l'énergie apportée par le vent migrait vers le fond pour alimenter la seiche.

Les ordres de grandeur des vitesses obtenues suggèrent l'existence de cisaillement important susceptible de favoriser les transferts à l'interface de densité. Le mélange associé pourra être évalué à l'aide du modèle à stratification continue (GILL, 1982).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AANDERAA, 1991. Operating manual for temperature profile recorder models 7 and 8. Technical report, Aanderaa instruments, Bergen, Norway.
- FARMER D.M., 1978. Observations of long nonlinear internal waves in a lake. *J. Phys. Oceanogr.*, 8, 63-73.
- GAEDKE U. & SCHIMMELE M., 1991. Internal seiches in lake Constance : influence on plankton abundance at a fixed sampling site. *J. Plankton Res.*, 13, 743-754.
- GILL A.E., 1982. *Atmosphere-Ocean dynamics*. Academic press, San Diego, California.
- HEAPS N.S. & RAMSBOTTOM A.E., 1966. Wind effects on the water in narrow two-layered lake. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A* 259, 391-430.
- HORN W., MORTIMER C.H. & SCHWAB D.J., 1986. Wind-induced internal seiches in lake Zürich observed and modeled. *Limnol. Oceanogr.*, 31, 1232-1254.
- HUNKINS K. & FLIEGEL M., 1973. Internal undular surges in Seneca Lake. *J. Geophys. Res.*, 78, 539-548.
- HUTTER K., 1984. Hydrodynamics of lakes. CISM, Udine, Springer Verlag Wien-New York. 331 p.
- IMBERGER J., 1994. Mixing and transport in a stratified lake. In *Fourth international symposium on stratified Flows*. E. Hopfinger, B. Voisin, G. Chavand, Grenoble, France.

- LEBLOND P.H. & MYSAK L.A., 1978. *Waves in the Ocean*. Elsevier scientific company, New York.
- LEMMIN U., 1987. The structure and dynamics of internal waves in Baldeggersee. *Limnol. Oceanogr.*, 32, 43-61.
- LEMMIN U. & MORTIMER C.H., 1986. Test of an extension to internal seiches of Defant's procedure for determination of surface seiche characteristics in real lakes. *Limnol. Oceanogr.*, 31, 1207-1231.
- MORTIMER C.H., 1952. Water movements in lakes during summer stratification; Evidence from the distribution of temperature in Windermere. *Phil. Trans. R. Soc. Lon.*, 236, 355-404.
- MORTIMER C.H., 1974. Lakes hydrodynamics. Technical report, Ass. Int. Limn. contribution 109, pp. 124-197.
- MORTIMER C.H., 1979. Strategies for coupling data collection and analysis with dynamic modelling of lake motion. In *Hydrodynamics of lakes*, pages 183-231. W. H. Graf and C.H. Mortimer. Elsevier.
- MUNNICH M., 1994. The influence of bottom topography on internal seiches in continuously stratified media. In *Fourth international symposium on stratified flows*. E. Hopfinger, B. Voisin, G. Chavand, Grenoble, France.
- MUNNICH M., WUEST A. & IMBODEN D.M., 1992. Observations of the second vertical mode of the internal seiche in an alpine lake. *Limnol. Oceanogr.*, 37, 1705-1719.
- MYSAK L.A., 1984. Nonlinear internal waves p. 130-146. In *Hydrodynamics of lakes*. CISM, Udine, Springer Verlag Wien-New York.
- NICOUD G., MONJUVENT G. & MAILLET-GUY G., 1987. Contrôle du comblement quaternaire des vallées alpines du nord par la dynamique lacustre. *Géologie Alpine, Mém. h. s.*, 13, 457-468.
- NOUGIER J.P., 1985. *Méthodes de calcul numérique*. Masson, Paris. 325 p.
- THORPE S.A., 1977. Turbulence and mixing in a Scottish Loch. *Phil. Trans. Royal Soc. London, A* 286, 125-181.
- THORPE S.A. & HALL A.J., 1977. Mixing in upper layer of a lake during heating cycle. *Nature, Lond.*, 265, 719-722.
- TURNER, J.S., 1973. *Buoyancy effects in fluids*. Cambridge University Press, U.K.
- VINÇON-LEITE B., TASSIN B. & JAQUET J.M., 1995. Contribution of mathematical modeling to lake ecosystem understanding: Lake Bourget (Savoy, France). *Hydrobiologia*, 300/301, 433-442.
- WIEGAND C. & CARMACK E.C., 1986. The climatology of internal waves in a deep temperate lake. *J. Geophys. Res.*, 91, 3951-3958.
- WU J., 1969. Wind stress and surface roughness at air-sea interface. *J. Geophys. Res.*, 74, 444-455.