

La modélisation stochastique des étiages: une revue bibliographique

The stochastic modeling of low-flows: a literature review

I. Abi-Zeid and B. Bobée

Volume 12, Number 3, 1999

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/705360ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/705360ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Université du Québec - INRS-Eau, Terre et Environnement (INRS-ETE)

ISSN

0992-7158 (print)

1718-8598 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this document

Abi-Zeid, I. & Bobée, B. (1999). La modélisation stochastique des étiages: une revue bibliographique. *Revue des sciences de l'eau / Journal of Water Science*, 12(3), 459–484. <https://doi.org/10.7202/705360ar>

Article abstract

The increasing pressure on the water resources requires better management of the water deficit situations may it be unusual droughts or yearly recurring low-flows. It is therefore important to model the occurrence of these deficit events in order to quantify the related risks. Many approaches exist for the modeling of low-flow/drought events. We present here a literature review of the stochastic methods. We start by clarifying the difference between low-flows and droughts, two terms which are often used interchangeably. We then present some low-flow and drought indicators.

The stochastic approach may be divided into two categories: Frequency analysis and stochastic processes. Most frequency analysis studies aim to assign to a flow value X a cumulative frequency, either directly using empirical distribution functions, or by fitting a theoretical distribution. This allows the computation of a critical flow x_c corresponding to a return period T , such that $P(X < x_c) = 1/T$. These studies use mostly the annual minima of daily flows where the hydrological data is assumed independent and identically distributed. It is also common to analyze Q_m , the annual minimum of the m -consecutive days average flow, m being generally 7, 10, 30, 60, 90, or 120 days, and to adopt as critical flow the m -day average having a return period of T years. The distributions which are used include the Normal, Weibull, Gumbel, Gamma, Log-Normal (2), Log-Pearson (3), Generalized Extreme Value, Pearson type 3, and Pearson type 5 distributions (GUMBEL, 1954; MATALAS, 1963; BERNIER, 1964; JOSEPH, 1970; CONDIE and NIX, 1975; HOANG, 1978; TASKER, 1987; RAYNAL-VILLASENOR and DOURIET, 1987; NATHAN and MCMAHON, 1990; ADAMCZYK, 1992).

The approach using stochastic processes for low-flows may be direct (analytical) or indirect (experimental) (YEVJEVICH *et al.*, 1983). The indirect approach (not described in this literature review) consists of obtaining flow models, generating synthetic flows and then empirically studying certain drought variables obtained from the synthetic data. The direct approach models deficit events and related variables without explicitly modeling flows. The stochastic processes are of two types and differ in the way that randomness is introduced in the model:

- State modeling: The process may be modeled as a probabilistic transition between various states (Markov processes for example). The states of the process $\{X_i\}$ are obtained from the hydrological observations $\{Y_i\}$ using thresholds. The number of states of $\{X_i\}$ is finite and run series analysis may be used to study the properties of the drought parameters; or

- Event modeling: The concept of random occurrence of an event is introduced, where an event is a transition between surplus and deficit and vice-versa. In this approach, stochastic point processes are appropriate. A deficit event is then considered a rare event and is characterized by its occurrence time.

We review the low-flows studies based on frequency analysis, run series analysis and on point processes. However, we do not include the physically-based models nor the regional analysis studies.

Run series analysis is applied to processes derived from flows and thresholds. A two-state process is obtained and Markov processes are often applied. The variables of interest are the duration of a deficit defined by the run length of series below the threshold (RL), the severity corresponding to the deficit volume over a negative run of length n (RS_n), and the intensity I , defined by the ratio RS_n/RL (SALDARRIGA and YEVJEVICH, 1970; SEN, 1977; MILLAN and YEVJEVICH, 1971; MILLAN, 1972; SEN, 1980A; SEN, 1980B; SEN, 1980C; GÜVEN, 1983; MOYÉ *et al.*, 1988; SEN, 1990). It is often assumed that the flow process is either independent or autoregressive of order 1 and that it is stationary except for SEN, 1980B.

Point processes are based on the notion of the occurrence of an event. They are defined by the occurrence time t_i of an event e_i . We present a classification of some of the pertinent processes and their relation to each other. These include the Poisson process, both homogeneous and non-homogeneous, the renewal process, the doubly stochastic process and the self-exciting process. These processes are well suited for obtaining models of deficit durations (NORTH, 1981; LEE *et al.*, 1986; ZELENHASIC *et al.*, 1987; CHANG, 1989; MADSEN and ROSBJERG, 1995; ABI-ZEID, 1997). The advantage of this approach is its ability to take into account nonstationarity where alternating surplus-deficit point processes are defined from daily flow data. ABI-ZEID (1997) proposed a physically-based alternating non-homogeneous Poisson process that takes into account precipitation and temperature, and defined low-flow risk indices computed from these developed models.

In conclusion, we remark that frequency analysis does not take into account well the duration aspects and uses simplifying stationarity hypothesis. Series analysis provides duration distributions for simple flow processes. The advantage of point processes is that they can model complex, dependent and non-stationary processes. Furthermore, alternating point processes can be used to model deficit durations and generate synthetic data such as occurrences of deficit and surplus events. We argue that the duration of low-flows is an important issue which has not received a lot of attention.

La modélisation stochastique des étiages : une revue bibliographique

The stochastic modeling of low-flows:
a literature review

I. ABI-ZEID * 1,2, B. BOBÉE 2

Reçu le 3 août 1998, accepté le, 21 janvier 1999**.

SUMMARY

The increasing pressure on the water resources requires better management of the water deficit situations may it be unusual droughts or yearly recurring low-flows. It is therefore important to model the occurrence of these deficit events in order to quantify the related risks. Many approaches exist for the modeling of low-flow/drought events. We present here a literature review of the stochastic methods. We start by clarifying the difference between low-flows and droughts, two terms which are often used interchangeably. We then present some low-flow and drought indicators.

The stochastic approach may be divided into two categories: Frequency analysis and stochastic processes. Most frequency analysis studies aim to assign to a flow value X a cumulative frequency, either directly using empirical distribution functions, or by fitting a theoretical distribution. This allows the computation of a critical flow x_T corresponding to a return period T , such that

$$P(X < x_T) = \frac{1}{T}. \text{ These studies use mostly the annual minima of daily flows}$$

where the hydrological data is assumed independent and identically distributed. It is also common to analyze Q_m , the annual minimum of the m -consecutive days average flow, m being generally 7, 10, 30, 60, 90, or 120 days, and to adopt as critical flow the m -day average having a return period of T years. The distributions which are used include the Normal, Weibull, Gumbel, Gamma, Log-Normal (2), Log-Pearson (3), Generalized Extreme Value, Pearson type 3, and Pearson type 5 distributions (GUMBEL, 1954; MATALAS, 1963; BERNIER, 1964; JOSEPH, 1970; CONDIE and NIX, 1975; HOANG, 1978;

1. Centre de Recherches pour la Défense Valcartier (CRDV), Section Technologies des Aides à la Décision, 2459 Pje XI Nord, Val Bélair, Québec, Canada G3J 1X5.
2. INRS-Eau, Université du Québec, Chaire CRSNG-Hydro Québec, Case postale 7500, 2800 rue Einstein, Sainte-Foy, Québec, Canada G1V 4C7. E-mail : chaire_hydro@inrs-eau.quebec.ca

* Correspondance. E-mail : irene.abi-zeid@drev.dnd.ca

** Les commentaires seront reçus jusqu'au 10 mai 2000.

TASKER, 1987; RAYNAL-VILLASENOR and DOURIET, 1987; NATHAN and MCMAHON, 1990; ADAMCZYK, 1992).

The approach using stochastic processes for low-flows may be direct (analytical) or indirect (experimental) (YEVJEVICH *et al.*, 1983). The indirect approach (not described in this literature review) consists of obtaining flow models, generating synthetic flows and then empirically studying certain drought variables obtained from the synthetic data. The direct approach models deficit events and related variables without explicitly modeling flows. The stochastic processes are of two types and differ in the way that randomness is introduced in the model:

– State modeling: The process may be modeled as a probabilistic transition between various states (Markov processes for example). The states of the process $\{X_i\}$ are obtained from the hydrological observations $\{Y_i\}$ using thresholds. The number of states of $\{X_i\}$ is finite and run series analysis may be used to study the properties of the drought parameters; or

– Event modeling: The concept of random occurrence of an event is introduced, where an event is a transition between surplus and deficit and vice-versa. In this approach, stochastic point processes are appropriate. A deficit event is then considered a rare event and is characterized by its occurrence time.

We review the low-flows studies based on frequency analysis, run series analysis and on point processes. However, we do not include the physically-based models nor the regional analysis studies.

Run series analysis is applied to processes derived from flows and thresholds. A two-state process is obtained and Markov processes are often applied. The variables of interest are the duration of a deficit defined by the run length of series below the threshold (RL), the severity corresponding to the deficit volume over a negative run of length n (RS_n), and the intensity I_n defined by the ratio RS_n/RL (SALDARRIGA and YEVJEVICH, 1970; SEN, 1977; MILLAN and YEVJEVICH, 1971; MILLAN, 1972; SEN, 1980A; SEN, 1980B; SEN, 1980C; GÜVEN, 1983; MOYÉ *et al.*, 1988; SEN, 1990). It is often assumed that the flow process is either independent or autoregressive of order 1 and that it is stationary except for SEN, 1980B.

Point processes are based on the notion of the occurrence of an event. They are defined by the occurrence time t_j of an event e_j . We present a classification of some of the pertinent processes and their relation to each other. These include the Poisson process, both homogeneous and non-homogeneous, the renewal process, the doubly stochastic process and the self-exciting process. These processes are well suited for obtaining models of deficit durations (NORTH, 1981; LEE *et al.*, 1986; ZELENHASIC et SALVAI, 1987; CHANG, 1989; MADSEN and ROSBJERG, 1995; ABI-ZEID, 1997). The advantage of this approach is its ability to take into account nonstationarity where alternating surplus-deficit point processes are defined from daily flow data. ABI-ZEID (1997) proposed a physically-based alternating non-homogeneous Poisson process that takes into account precipitation and temperature, and defined low-flow risk indices computed from these developed models.

In conclusion, we remark that frequency analysis does not take into account well the duration aspects and uses simplifying stationarity hypothesis. Series analysis provides duration distributions for simple flow processes. The advantage of point processes is that they can model complex, dependent and non-stationary processes. Furthermore, alternating point processes can be used to model deficit durations and generate synthetic data such as occurrences of deficit and surplus events. We argue that the duration of low-flows is an important issue which has not received a lot of attention.

Key-words: low-flows, drought, stochastic modeling, literature review.

RÉSUMÉ

La croissance continue de la population mondiale et l'augmentation du niveau de vie dans certaines parties de la planète exercent une pression de plus en plus forte sur la demande quantitative et qualitative de la ressource hydrique, nécessitant ainsi une gestion plus adéquate. Afin d'évaluer la fiabilité d'un système de ressources en eau et de déterminer son mode de gestion durant un étiage, il est utile d'avoir un outil de modélisation. Nous présentons ici une synthèse des travaux de modélisation réalisés dans le cadre de l'approche stochastique. Nous faisons d'abord le point sur la différence entre une sécheresse et un étiage, termes qui sont souvent confondus dans les publications, pour ensuite en présenter quelques indicateurs.

L'approche stochastique peut être subdivisée en deux catégories : l'étude fréquentielle et les processus stochastiques. La plupart des études d'analyse de fréquence ont pour objet de calculer des débits d'étiage critiques x_T correspondant à une certaine période de retour T , tel que $P(X < x_T) = \frac{1}{T}$. L'approche par les processus stochastiques consiste à modéliser les événements de déficit ou les variables d'intérêt sans utiliser directement des modèles de débit.

L'analyse de fréquence des débits ne tient pas compte des durées et émet des hypothèses trop simplistes de stationnarité. L'analyse des séquences permet l'obtention des lois de durées uniquement pour des processus de débits très simples. L'avantage de l'approche des processus ponctuels par rapport à l'analyse des séquences est qu'elle permet d'étudier des processus complexes, dépendants et non stationnaires. De plus, les processus ponctuels alternés permettent la modélisation des durées et la génération synthétique des temps d'occurrence des séries de surplus et de déficit.

Nous présentons dans cet article les travaux de modélisation des étiages basés sur l'analyse fréquentielle, la théorie des séquences et sur les processus ponctuels. Nous n'avons pas inclus les études qui développent des distributions des faibles débits à partir de modèles physiques, ni les études de type régional.

Mots clés : *étiage, sécheresse, modélisation stochastique, revue de littérature.*

1 - INTRODUCTION

La croissance continue de la population mondiale et l'augmentation du niveau de vie dans certaines parties de la planète exercent une pression de plus en plus forte sur la demande quantitative et qualitative de la ressource hydrique, nécessitant ainsi une gestion plus adéquate. Afin d'évaluer la fiabilité d'un système de ressources en eau et de déterminer son mode de gestion durant un étiage, il est utile d'avoir un outil de modélisation. À l'inverse d'une crue, qui est un phénomène spectaculaire de durée souvent courte et dont l'impact est dû surtout à son intensité, un étiage constitue un phénomène qui perdure et dont l'impact est dû surtout à la durée des faibles débits. Il s'avère alors impératif de développer des modèles d'étiages dont la variable principale est la durée du déficit. Il existe deux grandes approches à la modélisation des sécheresses hydrologiques et des étiages : l'approche déterministe et l'approche stochastique. Nous présentons ici une synthèse des travaux réalisés dans le cadre de l'approche stochastique qui peut être subdivisée en deux catégories :

– l'étude fréquentielle par les lois statistiques du minimum annuel des débits journaliers et du minimum annuel de la moyenne mobile sur m jours des débits journaliers, Q_m ; et

– l'analyse des durées par les processus stochastiques.

La distinction n'étant généralement pas faite entre étiage (*low-flow*) et sécheresse (*drought*) dans les travaux présentés, nous reprendrons ici les expressions utilisées par leurs auteurs pour décrire le déficit hydrique. Toutefois, avant d'entreprendre cette revue de littérature, nous faisons d'abord le point sur la différence entre ces deux termes qui sont souvent confondus dans les publications. Les sections suivantes décrivent les travaux liés à l'analyse fréquentielle des débits et ceux liés à l'analyse des durées et les processus stochastiques.

2 – DÉFINITIONS

La sécheresse est un concept très vaste qui touche plusieurs disciplines et dont le domaine de recherche inclut les sciences sociales, les sciences naturelles et l'ingénierie. Il n'existe pas de définition universellement acceptée de la sécheresse. Chaque définition proposée dépend du domaine affecté (météorologie, hydrologie, géographie, développement des ressources, agriculture, industrie, production hydroélectrique, alimentation en eau, navigation, activités récréatives, etc.). En général, la sécheresse est un événement exceptionnel, synonyme de pénurie ou de rareté d'eau pendant une période de temps prolongée sur un espace géographique significatif.

Parmi toutes les définitions de sécheresse, une définition objective et assez flexible ayant émergé est celle avancée par YEVJEVICH (1967) qui est reliée à la théorie des séquences, une branche de l'analyse statistique des séries chronologiques.

La sécheresse hydrologique est reliée à une période prolongée de bas débits, de bas niveaux des eaux de surface ou encore des eaux souterraines. La sécheresse des cours d'eau est une faiblesse des débits de rivières, dites à l'étiage. Un étiage peut être la conséquence d'une sécheresse hydrologique, mais à l'inverse de celle-ci, il n'est généralement pas considéré comme un événement exceptionnel. On dit qu'un cours d'eau est à l'étiage lorsqu'il y a faiblesse des débits. L'étiage est une notion aux multiples aspects : il peut être une période de l'année, un faible volume d'eau, un faible débit, ou une durée. Dans la pratique, chacun de ces aspects est décrit par un indicateur précis. Les étiages sont définis sur une base saisonnière et ils sont reliés au cycle solaire annuel et à ses effets climatiques locaux. La durée d'un étiage est habituellement de quelques jours à quelques semaines.

En résumé, l'étude des faibles débits est reliée au traitement statistique et à la compréhension du développement physique des débits à un point d'une rivière à court terme, ce qui contraste avec l'étude des sécheresses qui inclut la description des précipitations, des débits de rivières, de l'humidité du sol et des eaux souterraines pendant une saison, plusieurs saisons ou plusieurs années et ce, en tenant compte de l'étendue spatiale du phénomène.

Afin de caractériser les événements hydrologiques, DRACUP *et al.* (1980a) suggèrent de considérer un ensemble de définitions en fonction de l'unité de mesure des données (jour, mois, an) et du seuil utilisé pour définir l'événement tels que présentées sur la *figure 1*.

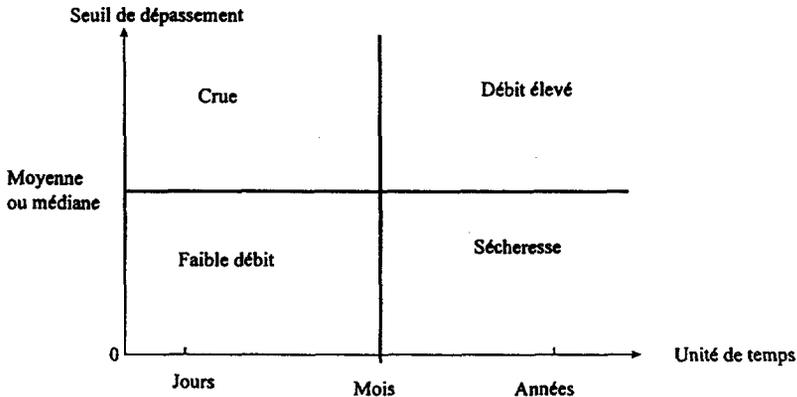


Figure 1 Classification des événements hydrologiques (adaptée de DRACUP *et al.*, 1980a).

*Classification of hydrological events (adapted from DRACUP *et al.*, 1980a).*

Les étiages et les sécheresses hydrologiques sont souvent caractérisés par des indicateurs dont nous présentons quelques exemples ci-dessous.

2.1 Les indicateurs de sécheresse et d'étiage

Plusieurs indicateurs de sécheresse surtout météorologiques ont été développés et sont utilisés (YEVJEVICH *et al.*, 1983). Un indicateur de sécheresse est toute variable hydrométéorologique ou toute fonction de ces variables dont les fluctuations peuvent indiquer la présence plus ou moins marquée de sécheresse. Un indicateur adéquat sert à résumer et à transmettre l'information concernant le phénomène et permet d'établir une base quantitative pour évaluer l'intensité et la sévérité de la sécheresse. Nous présentons ici quelques indicateurs de sécheresse hydrologique.

L'indice de Palmer (PI) (PALMER, 1965) est l'indicateur de sécheresse le plus utilisé aux États-Unis. Il combine l'information sur les précipitations et sur la température et mesure la différence cumulative entre les conditions normales et les conditions observées. Bien qu'il soit essentiellement un indice météorologique, il est aussi utilisé comme une mesure de la sécheresse hydrologique. L'indice hydrologique de sécheresse (HDI) de KENDALL et DRACUP (1990) est formulé pour tenir compte de la durée et de l'intensité d'une sécheresse. Pour une sécheresse qui dure d années, cet indice correspond à l'écart pondéré entre le déficit pendant d années et l'espérance de ce déficit calculée à partir des données historiques. Le *Surface Water-Supply Index* (SWSI) de GAREN (1993) est un indicateur de la disponibilité d'eau sur un bassin donné, et il est formulé en

terme de la probabilité conjointe de non-dépassement du volume disponible et du débit prédit sur une période de temps. Cet indice varie entre -4 et $+4$, un SWSI égal à -4 étant un indicateur d'une sécheresse extrême. RIGGS (1979) a défini un indicateur de sécheresse hydrologique comme étant la période de retour T , le temps moyen calculé sur une très longue période entre deux occurrences d'étiages, où un étiage est défini par le minimum annuel des débits moyens de 30 jours. Il a aussi défini un indicateur régional comme étant la moyenne de ces périodes de retour pour certains cours d'eau d'une région. Une période de retour plus élevée indique une sécheresse plus aigüe.

CORREIA *et al.* (1991) ont défini des indices de risque, de vulnérabilité et de résilience reliés aux sécheresses hydrologiques dans un contexte local ainsi que régional, et ce en utilisant des débits moyens annuels obtenus par génération de données synthétiques. Nous résumons leur travail dans ce qui suit. On dit qu'il y a sécheresse à une station k si le débit $X_k(t)$ est inférieur au seuil critique $f(t)$. $K(t) = \{k \mid X_k(t) \leq f(t)\}$ est l'ensemble de ces stations. La surface de déficit instantanée $A_s(t)$ est la surface affectée par la sécheresse. Cette quantité est la somme des surfaces correspondant aux stations affectées. Pour une région donnée, ayant p stations de mesure :

$$A_s(t) = \sum_{k=1}^p a_k I_{K(t)}(k) \quad (1)$$

où a_k est la surface associée à la station k (bassins versants disjoints) et

$$I_{K(t)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si le débit de la station } k \text{ est inférieur au seuil critique } f(t) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$D_s(t)$, le **déficit de surface**, correspond à la somme pondérée des déficits associés aux stations déficitaires, un déficit étant la différence entre le débit annuel $X_k(t)$ et le seuil critique $f_k(t)$:

$$D_s(t) = \sum_{k=1}^p a_k I_{K(t)}(k) [f_k(t) - X_k(t)] \quad (2)$$

Les indices présentés ci-haut n'ont pas été, à notre connaissance, probabilisés et modélisés par une distribution de probabilité contrairement aux indicateurs d'étiage définis par MIQUEL et PHIEN BOU PHA (1979). Ces derniers ont défini un indicateur d'étiage comme un couple débit-durée (Q, D) qui caractérise le processus des débits journaliers, l'un des termes étant fixé et l'autre variant dans le temps et pouvant être représenté par l'ajustement d'une loi aux valeurs observées (tableau 1).

MIQUEL et PHIEN BOU PHA (1979) ont appliqué les lois normale, log normale, et de Gumbel aux indicateurs à durée fixée. Les indicateurs à débit fixé sont moins répandus et ces auteurs leur ont appliqué la loi de Pearson type 3. D'autres indicateurs d'étiage ont également été considérés (CTGREF, 1979) :

- QME : débit du mois d'étiage, i.e. débit moyen du mois dont la moyenne interannuelle est la plus faible, cette notion fixe la date de l'étiage dans l'année ;

- QMNA : débit mensuel minimal annuel, i.e. minimum annuel des débits moyens mensuels ; ce débit peut correspondre, suivant les années, à des mois différents ; et

– QCN_n : seuil minimal en dessous duquel les débits sont restés pendant n jours consécutifs.

Tableau 1 Quelques indicateurs d'étiages (adapté de MIQUEL et PHIEN BOU PHA, 1979).

Table 1 Some low-flow indicators (adapted from MIQUEL and PHIEN BOU PHA, 1979).

	Indicateurs	Définitions
Durée fixée	Débits classés (Q, D) Débits moyens mensuels (Q, i) Débits minima mensuels (Q, i) Débits moyen mobiles minima (Q, D)	Débit dépassé D jours dans l'année Débit moyen du i ^e mois Débit minimum du i ^e mois Le minimum annuel de la moyenne mobile des débits de D jours consécutifs
Débit fixé	Durées classées annuelles (Q, D) Durées individualisées (Q, D) Durées classées mensuelles	Durée totale dans l'année où le débit est inférieur à Q fixé Durée pendant laquelle le débit reste sans interruption inférieur à Q fixé Durées classées au niveau de chaque mois

3 – L'ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES FAIBLES DÉBITS

La plupart des études d'analyse de fréquence ont pour objet d'assigner à des valeurs de débit X une fréquence cumulative exprimée en quantiles, soit directement par des fonctions de répartition empiriques, soit après ajustement par des distributions théoriques. Ceci permet le calcul des débits d'étiage critiques x_T correspondant à une certaine période de retour T , tel que $P(X < x_T) = 1/T$. Ces travaux ont surtout porté sur l'étude du minimum annuel du débit journalier où les données hydrologiques sont supposées indépendantes et identiquement distribuées. Il est aussi d'usage d'analyser Q_m , le minimum annuel du débit moyen sur m jours consécutifs, m prenant généralement les valeurs 7, 10, 30, 60, 90, ou 120 jours, et d'adopter comme débit critique un débit m jours ayant une période de retour de T ans. Le débit critique le plus utilisé en Amérique du Nord est $Q_{7,10}$ qui correspond au minimum annuel moyen sur 7 jours, ayant une période de retour de 10 ans. RIGGS (1972) et BERAN et RODIER (1985) décrivent la procédure à suivre afin d'obtenir les caractéristiques fréquentielles des débits d'étiage. Plusieurs lois combinées à diverses méthodes d'estimation des paramètres ont été utilisées en hydrologie statistique. Nous présentons dans ce qui suit les résultats des études d'analyse fréquentielle des débits. Nous n'avons pas inclus les analyses fréquentielles des durées et des volumes de déficit comme par exemple le travail de TALLAKSEN *et al.*, 1997. Les lois utilisées sont présentées au *tableau 2*.

Tableau 2 Les lois appliquées aux débits d'étiage.**Table 2** The distributions used to model low-flows.

Loi	Expression
Weibull	$f(x) = \frac{k}{\alpha} \left(\frac{x-u}{\alpha} \right)^{k-1} \exp - \left(\frac{x-u}{\alpha} \right)^k$
Gumbel	$f(x) = \alpha \exp[-\alpha(x-u) - \exp(-\alpha(x-u))]$
log normale à trois paramètres (LN3)	$f(x) = \frac{1}{(x-a)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\ln(x-a) - m]^2\right\}$
Pearson type 3 (LP3)	$f(x) = \frac{1}{a\Gamma(b)} \left(\frac{x-m}{a} \right)^{b-1} \exp - \left(\frac{x-m}{a} \right)$
Pearson type 5 (LP5)	$f(x) = \frac{1}{a\Gamma(b)} \left(\frac{x-m}{a} \right)^{-(b+1)} \exp - \left(\frac{a}{x-m} \right)$
Gamma	$f(x) = \frac{\alpha^\rho x^{\rho-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(\rho)}$
log normale à deux paramètres (LN2)	$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\ln(x) - m]^2\right\}$
normale	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
log Pearson type 3 (LP3)	$f(x) = \frac{1}{xa\Gamma(b)} \left(\frac{y-m}{a} \right)^{b-1} \exp - \left(\frac{y-m}{a} \right), y = \log(x)$
Loi généralisée des valeurs extrêmes (GEV)	$f(x) = \frac{1}{\alpha} \left\{ 1 - k \frac{(x-u)}{\alpha} \right\}^{\frac{1}{k}-1} \exp \left[- \left\{ 1 - k \frac{(x-u)}{\alpha} \right\}^{\frac{1}{k}} \right]$

GUMBEL (1954) a été le premier à appliquer la théorie des valeurs extrêmes aux événements de sécheresse et en particulier la loi de Weibull au débit minimum annuel de huit rivières américaines dans les états de l'Arizona, du Kansas, de Utah, du Montana, du Massachussets, du Colorado et du Wisconsin. Cette approche ne tient pas compte des durées ni des volumes des déficits. La loi de Weibull est à trois paramètres : un paramètre de forme k , un paramètre d'échelle α , et un paramètre de position u tel que $x \geq u$. L'estimation doit être telle que u soit inférieur au plus faible débit minimum observé.

MATALAS (1963) a effectué une étude de comparaison de quatre distributions théoriques asymétriques à trois paramètres, ayant une limite inférieure : la loi de Weibull, la loi log normale à trois paramètres (LN3), la loi de Pearson type 3 (LP3), et la loi de Pearson type 5. Il en a conclu que la loi de Weibull et la LP3 s'appliquent mieux aux débits minima annuels de 34 cours d'eau (Massachusetts, New Hampshire, Maine, Caroline du Nord, Idaho, Washington, New York, Virginie, Georgie, Tennessee, Pensylvanie) étudiés lorsque la méthode d'estimation est la méthode des moments, et ce, selon deux critères : la limite inférieure estimée ne doit pas être supérieur à la limite observée, et la relation entre le

coefficient d'asymétrie $\frac{E(x - \mu)^3}{\sigma^3}$ et le coefficient d'aplatissement $\frac{E(x - \mu)^4}{\sigma^4}$ de la

distribution théorique de moyenne μ et de variance σ^2 doit reproduire la relation présente dans les données observées.

JOSEPH (1970) a comparé cinq distributions : la loi Gamma, la loi log normale à deux paramètres (LN2), la loi normale, et la loi de Weibull appliquées au minimum annuel de la moyenne mobile sur 14 jours des débits journaliers et ce, pour 37 stations de mesure (bassin de la rivière Missouri, États-Unis) dont les données sont supposées indépendantes. L'année hydrologique commence le 1^{er} avril, la méthode d'estimation est la méthode du maximum de vraisemblance (MV). Il en a conclu que la loi Gamma, suivie de la loi de Weibull, et de la loi LN2 sont les plus adéquates. Les critères de comparaison utilisés par cet auteur sont le test d'ajustement du Khi-deux, et la comparaison des relations des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement.

CONDIE et NIX (1975) ont appliqué la loi de Pearson type 3, la loi de Pearson type 5, la loi de Weibull, et la loi LN3 à l'analyse des faibles débits de 38 rivières canadiennes. Les débits journaliers minimaux sont considérés, et l'année débute le 1^{er} juin. Les paramètres sont estimés par la méthode du MV et la méthode des moments. La loi de Weibull est la plus adéquate (estimation par le MV), suivie par la loi de Weibull (estimation par la méthode du plus faible débit observé, c'est-à-dire que la loi est rejetée si la borne inférieure estimée \hat{u} est supérieure au débit minimum observé). Un avantage de la loi de Weibull est qu'elle peut représenter des données qui ont un coefficient d'asymétrie négatif.

Au Québec, HOANG (1978) a montré que la loi log Pearson type 3 (LP3) s'applique le mieux aux minima annuels des débits journaliers pour l'ensemble de toutes les stations de mesure de la province de Québec (103). RAYNAL-VILLASENOR et DOURIET-CARDENAS (1987) ont recommandé l'usage de la loi GEV pour l'analyse de fréquence des débits minimaux annuels de trois rivières du nord-ouest du Mexique.

TASKER (1987) a utilisé la méthode du *bootstrap* (rééchantillonnage dans les distributions empiriques observées) afin d'estimer Q_7 pour des périodes de retour de 10 ans et de 20 ans pour 20 stations de mesure en Virginie. Les méthodes basées sur une distribution analytique telle que la loi de Weibull ou la loi LP3, donnent une erreur quadratique moyenne plus faible que les méthodes basées sur une distribution empirique.

NATHAN et MCMAHON (1990) ont étudié les méthodes d'estimation des paramètres de la loi de Weibull pour représenter le débit minimum annuel ainsi que pour les débits Q_m , $m = 1, 7, 15, 30, 60, 120, 183, 284$, et ce pour 134 stations du sud-ouest de l'Australie. Ils ont recommandé l'utilisation de plus d'une

méthode surtout pour les petits échantillons. ADAMCZYK (1992) a effectué une analyse de fréquence non paramétrique des débits Q_m , pour $m = 3, 14, 21, 28$.

LOGANATHAN *et al.* (1986) considèrent quatre catégories : (1) la méthode de transformation, où les données originales sont transformées et la loi normale est appliquée, (2) la méthode fréquentielle, où une loi est ajustée directement aux données, (3) la distribution empirique, où les données sont ordonnées et tracées selon une formule de probabilité empirique (*plotting position*) qui est utilisée pour estimer les probabilités de dépassement, et (4) les méthodes de probabilité à base physique qui utilisent les relations hydrologiques et des distributions analytiques des variables aléatoires hydrologiques indépendantes afin d'obtenir les distributions d'autres variables hydrologiques dépendantes. Les trois premières catégories appartiennent aux modèles dits de boîte noire et ne prennent pas en compte l'aspect physique du processus hydrologique. BERNIER (1964) a ainsi obtenu la loi de probabilité du débit minimum annuel de Bar-sur-Seine, France, en utilisant les précipitations et la courbe de tarissement. L'expression de cette loi est formellement celle de la théorie des valeurs extrêmes de Gumbel. Le *tableau 3* résume les travaux reliés à l'analyse de fréquence des faibles débits. Nous y rapportons les lois qui ont été identifiées comme les plus appropriées par leurs auteurs respectifs.

La plupart des études décrites dans cette section utilisent des séries de minima annuels et n'utilisent donc qu'une valeur de débit faible par année. Ainsi, des débits plus faibles que certains minima annuels ne sont pas inclus dans la série car ils correspondent au deuxième débit plus faible de leur année même s'ils sont plus bas que certains minima provenant d'autres années. Afin de pallier ce problème, et pour tenter d'augmenter l'information utilisable dans une série, l'approche de la série partielle est utilisée, où tous les débits en deçà d'un certain seuil, habituellement le maximum des débits minima annuels, sont conservés. LOGANATHAN *et al.* (1986) ont appliqué la loi de Weibull à la série partielle (toutes les valeurs inférieures à un seuil) des minima annuels de débit de quatre rivières pérennes et quatre rivières intermittentes.

4 - L'ANALYSE DES DURÉES ET LES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Toute technique d'analyse de fréquence pour caractériser les bas débits devrait inclure leur durée. Bien que le débit moyen sur une durée donnée soit important, il est souvent nécessaire de déterminer aussi la loi des durées pendant lesquelles le débit demeure faible. Le critère 7 jours 10 ans n'est pas pertinent pour toutes les applications. Dans une région donnée, ce débit peut aller de moins de 0.1 % à 15 % du débit moyen. Il faut donc utiliser d'autres critères pour tenir compte des durées. Un outil couramment utilisé est la courbe de fréquence cumulative débit-durée (*figure 2*), qui montre le pourcentage de temps durant lequel certains débits sont dépassés pendant la période couverte par l'échantillon, sans toutefois refléter si les périodes de faibles débits sont consécutives ou non. Cette courbe de durée ne peut être considérée comme une courbe de probabilité à cause des dépendances en série et de la variation saisonnière.

Tableau 3 Résumé des lois appliquées aux débits d'étiage.**Table 3** A summary of the distributions used to model low-flows.

Loi (lieu d'application)	Variable (série annuelle)	Référence
Weibull, 8 rivières américaines (Arizona, Kansas, Utah, Montana, Massachussets, Colorado, Wisconsin)	Minimum annuel	GUMBEL, 1954
Weibull 34 rivières américaines (Massachussets, New Hampshire, Maine, Caroline du Nord, Idaho, Washington, New York, Virginie, Georgie, Tennessee, Pensylvanie)	Minimum annuel	MATALAS, 1963
Approche physique (Gumbel) Bar-sur-Seine, France	Minimum annuel	BERNIER, 1964
Gamma, Weibull, LN2 ¹ 37 stations, bassin de la rivière Missouri	Q ₁₄	JOSEPH, 1970
Weibull 38 rivières canadiennes	Minimum annuel	CONDIE et NIX, 1975
LP3 ² 103 stations québécoises	Minimum annuel	HOANG, 1978
Weibull 4 rivières pérennes et 4 intermittentes	Minimum annuel (série partielle)	LOGANATHAN <i>et al.</i> , 1986
LP3 ² , Weibull 20 rivières en Virginie	Q ₇	TASKER, 1987
GEV ³ 3 rivières au nord-ouest du Mexique	Minimum annuel	RAYNAL-VILLASENOR et DOURIET, 1987
Weibull 134 stations dans le sud-est de l'Australie	Q _m , m = 10,30,60,90,120	NATHAN et MCMAHON, 1990
Approche non paramétrique 12 stations en Terre-Neuve, Est du Canada	Q _m , m = 3,14,21,28	ADAMCZYK, 1992

1. LN2 : Log-Normale 2 paramètres

2. LP3 : Log-Pearson 3

3. GEV : Loi généralisée des valeurs extrêmes (Generalized Extreme Values)

Une autre approche à l'analyse des durées des bas débits est basée sur les processus stochastiques. Dans le cadre des processus stochastiques, on peut parler d'approche directe (analytique) et d'approche indirecte (expérimentale) (YEVJEVICH *et al.*, 1983). L'approche indirecte (qui n'est pas décrite en détail dans cette revue bibliographique) consiste à obtenir un modèle des débits, à générer des données synthétiques et à étudier d'une façon empirique certaines variables d'intérêt à partir des données synthétiques générées. L'approche directe consiste à modéliser les événements de déficit ou les variables d'intérêt sans utiliser de modèles de débit. Les processus aléatoires utilisés dans l'approche directe peuvent être classés en deux grandes catégories basées sur une approche par seuil, selon la façon d'introduire la composante aléatoire dans le modèle :

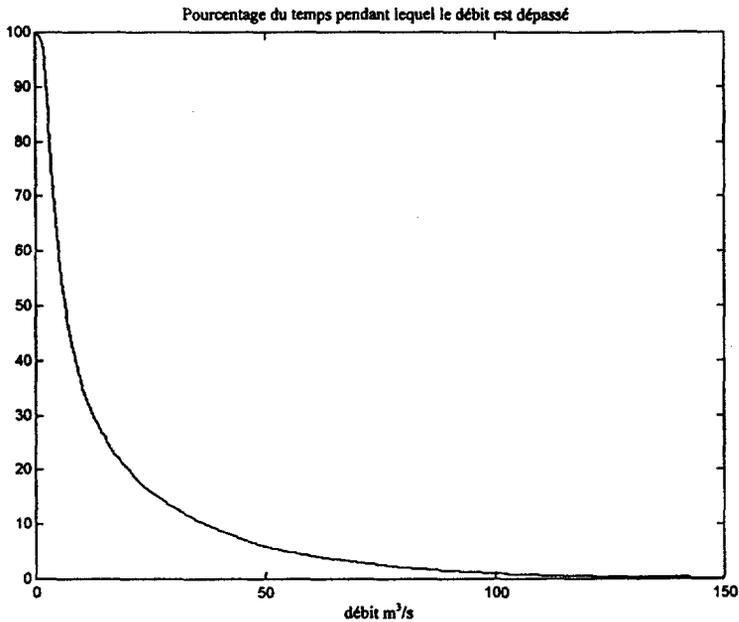


Figure 2 Exemple d'une courbe débit-durée.

Example of a flow-duration curve.

– le concept d'essai aléatoire est assigné à chaque intervalle unitaire de temps Δt , et la modélisation est alors dite par états. Le résultat de l'essai correspond à un des états du processus stochastique $\{X_t\}$ défini à partir des observations hydrologiques $\{Y_t\}$ par le biais de seuils et d'intervalles. Le nombre des états de $\{X_t\}$ est fini et la théorie des séquences est souvent utilisée pour analyser les paramètres de sécheresses lorsque $\{X_t\}$ est à deux états, surplus ou déficit ; ou

– le concept d'essai aléatoire est assigné à l'occurrence de chaque événement de sécheresse. On applique alors la théorie des processus stochastiques ponctuels, dans laquelle la sécheresse est considérée comme un événement rare, caractérisé par son temps d'occurrence.

4.1 La théorie des séquences

Plusieurs définitions d'une séquence ont été proposées, mais la définition de MOOD (1940) est la plus utilisée et semble la plus appropriée : une séquence est une suite d'événements du même type précédée et suivie par des événements différents (GUERRERO-SALAZAR et YEVJEVICH, 1975). À partir d'un seuil x_0 qui peut être fixe ou variable, une séquence négative (positive) est une séquence d'observations en dessous (au-dessus) du seuil. Un processus à deux états $\{X_t\}$ peut ainsi être défini par une variable de Bernoulli, où l'état 1 correspond au surplus, et l'état 0 au déficit. La figure 3 illustre la définition de $\{X_t\}$ à partir de $\{Y_t\}$. Lorsque le processus $\{Y_t\}$ est indépendant, il en résulte que le processus des états $\{X_t\}$ est aussi indépendant. Lorsque $\{Y_t\}$ n'est pas indépendant, on fait souvent l'hypothèse que $\{X_t\}$ est un processus markovien d'ordre 1.

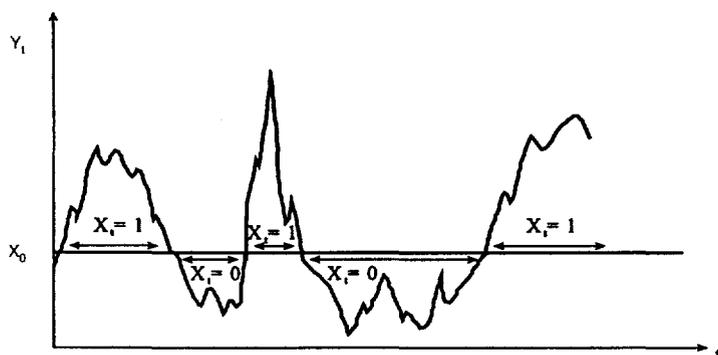


Figure 3 La définition de $\{X_t\}$ à partir de $\{Y_t\}$.
 The definition of $\{X_t\}$ from $\{Y_t\}$.

Trois variables sont importantes pour décrire les sécheresses (figure 4) :

- la durée définie par la longueur d'une séquence négative RL (variable discrète) ;
- la sévérité qui est la somme des déviations du seuil correspondant à une séquence négative de longueur n, RS_n (variable continue) ; et
- l'intensité I_n qui est le rapport RS_n/RL .

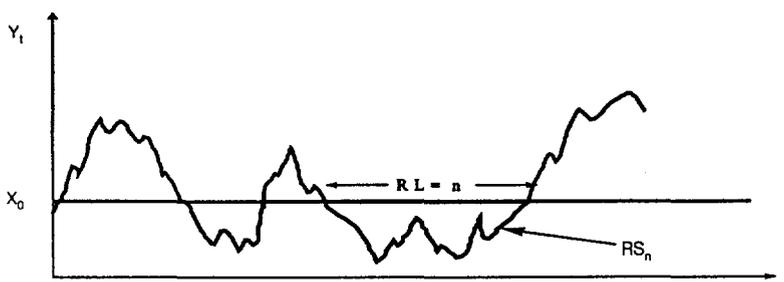


Figure 4 La définition des variables décrivant la sécheresse.
 Definition of variables describing a drought.

L'objectif de l'analyse des séquences est de déterminer les distributions des variables RL , RS_n , et I_n et celles de leurs valeurs extrêmes. Le calcul analytique est possible uniquement pour des modèles de débits $\{Y_t\}$ simples stationnaires supposés indépendants ou autorégressifs d'ordre 1. La chaîne de Markov à temps discret et à deux états a souvent été choisie pour représenter le processus $\{X_t\}$ des états de déficit ou de surplus hydrologique, définis à partir de la série continue de débits $\{Y_t\}$ à l'aide d'un seuil. D'après MILLAN (1973), l'application de la chaîne de Markov discrète à deux états est acceptable pour des débits générés par un processus autorégressif d'ordre 1 qui a un coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 inférieur à 0.5.

MATHIER *et al.* (1992) ont étudié les débits mensuels en définissant les états de déficit et de surplus à partir d'un seuil qui varie en fonction des mois. Le processus des états est une chaîne de Markov homogène discrète à deux états, les durées sont distribuées selon une loi géométrique, et la sévérité du déficit suit une loi exponentielle. Les auteurs ont estimé les quantiles et obtenu des intervalles de confiance pour la durée du déficit et pour sa sévérité.

DRACUP *et al.* (1980b) ont étudié les caractéristiques statistiques des paramètres d'intensité, de sévérité et de durée. Ils ont examiné la stationnarité, l'autocorrélation, la corrélation entre les paramètres d'un même événement, et la corrélation croisée entre les paramètres de déficit et les paramètres de surplus. Les données annuelles proviennent de sept cours d'eau californiens aux climats semi-aride à humide, et le seuil de dépassement est le débit moyen. Qualitativement, ils ont observé qu'une sévérité qui augmente implique une durée qui diminue, qu'il n'y a pas de non-stationnarité (tendance linéaire) significative dans la sévérité, et que l'intensité et la durée semblent non stationnaires. Ils ont étudié les corrélations entre la durée et l'intensité et la durée et la sévérité. Ces caractéristiques de dépendance offrent un choix de méthodes de modélisation, soit en utilisant l'hypothèse d'indépendance de la durée et de l'intensité, soit en utilisant l'hypothèse de dépendance de la durée et de la sévérité. La première approche fut utilisée par JACKSON (1975) qui appliqua une chaîne de Markov à la durée et un modèle autorégressif à l'intensité. CHANG et STENSON (1990) ont montré qu'il existe une forte corrélation entre la durée RL et la sévérité RS_n .

Deux approches sont utilisées lors de l'application de la théorie des séquences aux problèmes hydrologiques, l'approche d'intégration et l'approche combinatoire. L'approche d'intégration est reliée à des séquences d'une population infinie. L'approche combinatoire traite les séquences dans un échantillon de longueur finie. Les solutions analytiques exactes sont possibles lorsque les processus sont simples, et des approximations sont obtenues lorsque les processus sont complexes. La distribution des durées est facile à obtenir lorsque le processus de débits $\{Y_t\}$ est stationnaire, indépendant ou lorsque la structure de dépendance est simple. Les durées ne dépendent pas de la distribution de $\{Y_t\}$ lorsque les $\{Y_t\}$ sont indépendants. La distribution des déficits dépend de la distribution de $\{Y_t\}$ et elle n'a pas de solution analytique générale.

4.1.1 L'approche d'intégration

SALDARRIGA et YEVJEVICH (1970) ont étudié la distribution du nombre de séquences, et la probabilité qu'une séquence soit d'une longueur donnée pour un processus de débit indépendant. La contribution principale de leur étude est l'expression générale de $P(k^-, j^+)$ la probabilité des k premières séquences négatives et des j premières séquences positives, exprimée par une intégrale multinormale, lorsque la série hydrologique $\{Y_t\}$ est stationnaire, indépendante, ou autorégressive normale d'ordre 1 avec un coefficient d'autocorrélation inférieur à 0.4. Cette intégrale n'a pas de solution explicite dans le cas dépendant, mais des approximations ont été obtenues par CHANDER *et al.* (1981), dans le cas où Y_t et Y_{t+1} suivent une loi normale bivariable.

SEN (1977) a obtenu, par une approche différente de celle de DOWNER *et al.* (1967), les deux premiers moments de RS_n pour un processus $\{Y_t\}$ indépendant, normal et log normal, ainsi que pour un processus $\{Y_t\}$ normal autorégressif

d'ordre 1. Il a constaté que la corrélation entre les observations successives augmente la moyenne et la variance des volumes de surplus et de déficit.

4.1.2 L'approche combinatoire

Les distributions de la plus longue séquence RL_{\max} (la période de sécheresse critique) et du plus gros déficit correspondant RS_{\max} dans un échantillon de taille N sont difficiles à obtenir. MILLAN et YEVJEVICH (1971) ont obtenu les distributions de ces deux paramètres par la simulation de processus de débits annuels $\{Y_t\}$ stationnaires indépendants, et autorégressifs d'ordre 1 normaux et non normaux, pour des coefficients de corrélation de premier ordre égaux à 0.1, 0.2, 0.3, et 0.7. Les propriétés statistiques de la longueur des séquences des processus stationnaires sont indépendantes de la moyenne et de l'écart type, mais elles dépendent du seuil x_0 et de l'asymétrie de la distribution des débits. Dans le cas des déficits, leur ordre de grandeur est directement proportionnel à l'écart type des débits. La loi log normale s'applique le mieux aux fréquences empiriques de ces deux paramètres, obtenues par simulation.

MILLAN (1972) a obtenu la distribution exacte de la plus longue séquence dans un échantillon de taille N , lorsque le processus des états $\{X_t\}$ suit une chaîne de Markov stationnaire.

SEN (1980a) a obtenu par énumération directe la probabilité de la plus longue durée L dans le cas stationnaire, ce qui donne une expression exacte pour un processus d'états $\{X_t\}$ indépendant et une expression approximative pour un processus d'états markovien d'ordre 1. Procéder par énumération signifie qu'on obtient $P(L = n)$ à partir de $P = L(n - 1)$, $n \geq 1$. SEN (1980c) a obtenu cette même expression selon une approche basée sur la théorie des extrêmes d'un nombre aléatoire de variables aléatoires. Il a aussi présenté une expression approximative pour la fonction de densité du déficit maximum basé sur les débits annuels, où les durées et les déficits sont supposés indépendants.

SEN (1980b) a obtenu par énumération la distribution exacte de la plus longue durée dans un échantillon de taille N , lorsque le processus de débits $\{Y_t\}$ est périodique, et lorsqu'il correspond à un processus d'états $\{X_t\}$ markovien d'ordre 1 non homogène périodique.

GÜVEN (1983) a présenté une approche relativement simple pour l'estimation des probabilités de la plus longue durée de sécheresse et du maximum de la somme des déficits sur une période de longueur m . Des débits annuels sont utilisés pour définir une chaîne de Markov discrète stationnaire $\{X_t\}$ à deux états. L'auteur a fait l'hypothèse que la somme des déficits suit une loi Gamma à deux paramètres.

MOYÉ et al. (1988) ont appliqué la théorie des séquences à la prédiction des événements de sécheresse pour un processus indépendant. Ils ont obtenu la probabilité d'avoir exactement i séquences négatives de longueur k dans un échantillon de taille N , et pour une probabilité de sécheresse q , ils ont obtenu la moyenne du nombre de ces séquences et leur variance, ainsi que l'estimation de la longueur moyenne d'une séquence. Ainsi, il est possible de déterminer l'espérance du nombre de sécheresses et l'espérance de la durée d'une sécheresse dans les N prochaines années.

SEN (1990) a obtenu par énumération l'expression analytique de la probabilité de la plus longue durée de sécheresse pour un nombre d'années, pour un

seuil et pour des probabilités de transition entre les deux états d'une chaîne de Markov $\{X_t\}$ homogène d'ordre 2 à deux états. La plus longue durée de déficit et le plus grand déficit d'une sécheresse historique pour une probabilité q que la demande dépasse l'offre, dépendent de la distribution de Y_t , de la taille de l'échantillon N , et de la variation de l'échantillon des valeurs extrêmes des variables décrivant la sécheresse.

Récemment, MOYÉ et KAPADIA (1995) ont déterminé la probabilité que les séquences négatives soient de longueur comprise entre K et L , pour un échantillon de longueur N , et pour une probabilité q de ressources inadéquates. Ils ont obtenu la loi des durées des sécheresses extrêmes sur une échelle annuelle pour un processus stationnaire indépendant.

Les études par l'approche de la théorie des séquences présentées ci-dessus mettent l'accent sur les paramètres de sécheresse extrême, et elles supposent que q , la probabilité d'être dans un état déficitaire est connue. Elles font souvent intervenir des processus stationnaires valables surtout pour des données annuelles, négligeant ainsi la modélisation des données journalières. Le tableau 4 présente un résumé des études des paramètres de sécheresse par l'analyse des séquences.

Tableau 4 Résumé des travaux d'analyse de séquences.

Table 4 A summary of series analysis related studies.

Processus	Variable	Référence
$\{Y_t\}$ Stationnaire, indép., AR(1)	$P(k^- j^+)$ (EF)	SALDARRIGA et YEVJEVICH, 1970
$\{Y_t\}$ Stationnaire, indép., AR(1)	Moments RS_n (EF)	SEN, 1977
$\{Y_t\}$ Stationnaire, indép., AR(1)	RL_{max}, RS_{max} (PI)	MILLAN et YEVJEVICH, 1971
$\{X_t\}$ Stationnaire, Markov 1	RL_{max} (PI)	MILLAN, 1972
$\{X_t\}$ Périodique, Markov 1	RL_{max} (PI)	SEN, 1980A
$\{X_t\}$ Stationn., indép, Markov 1	RL_{max}, RS_{max} appr. (PI)	SEN, 1980B
$\{X_t\}$ Stationn., indép, Markov 1	RL_{max} (PI)	SEN, 1980C
$\{X_t\}$ Stationnaire, Markov 1	RL_{max}, RS_{max} (PI)	GÜVEN, 1983
$\{X_t\}$ Stationnaire, indép.	nbr séq. de longueur K (PI)	MOYÉ <i>et al.</i> , 1988
$\{X_t\}$ Stationnaire, Markov 2	RL_{max} (PI)	SEN, 1990
$\{X_t\}$ Stationnaire, Markov 1	RL, RS_n (EF)	MATHIER <i>et al.</i> , 1992
$\{X_t\}$ Stationnaire, indép.	RL (PI)	MOYÉ et KAPADIA., 1995

EF : Échantillon Fini, approche d'intégration

PI : Population Infinie, approche combinatoire

4.2 Les processus ponctuels

Les processus ponctuels sont basés sur la notion d'occurrence d'un événement. Un processus ponctuel est défini par les temps d'occurrence t_j d'un événement e_j (figure 5).

Nous présentons ci-dessous quelques processus ponctuels : le processus de Poisson homogène (PH), le processus de Poisson non homogène (PNH), le processus de renouvellement homogène (RH), le processus de Poisson doublement stochastique (PDS), et le processus autoexcité (AE).

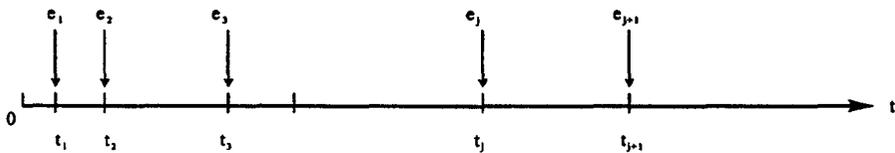


Figure 5 Schéma d'un processus ponctuel.
Illustration of a point process.

4.2.1 Le processus de Poisson homogène

Le processus de Poisson homogène (PH) est un choix classique en raison de sa simplicité. Il est caractérisé par une fonction d'intensité constante ρ , où $\rho\Delta t$ est la probabilité instantanée d'occurrence d'un événement dans l'intervalle Δt petit, et par les hypothèses de stationnarité, de non-multiplicité, et d'indépendance suivantes :

- la stationnarité implique que la probabilité d'occurrence d'un événement est proportionnelle à la longueur d'un petit intervalle et indépendante du temps d'occurrence de l'événement lui-même ;
- la non-multiplicité implique que la probabilité d'occurrence de deux ou plusieurs événements dans un petit intervalle $(t, t + \Delta t)$ est négligeable ;
- l'indépendance implique que le nombre d'événements dans un intervalle donné est indépendant du nombre d'événements dans d'autres intervalles disjoints. Ainsi, les probabilités ne dépendent pas de H_t , c'est-à-dire que la probabilité de trouver un point dans l'intervalle $(t, t + \Delta t)$ ne dépend pas du nombre de points avant t ni du fait qu'il y ait eu ou non un point à t .

Le nombre de points dans un intervalle de longueur t est distribué selon une loi de Poisson de moyenne ρt . Les intervalles X_1, X_2, \dots, X_j entre les points successifs sont indépendants et distribués selon une loi exponentielle $f_X(x) = \rho e^{-\rho x}$.

4.2.2 Le processus de Poisson non homogène

Le processus de Poisson non homogène (PNH) est une extension du processus de Poisson homogène, où la fonction d'intensité $\rho(t)$ est une fonction du temps. Les hypothèses d'indépendance et de non-multiplicité des événements sont maintenues tandis que l'hypothèse de stationnarité ne l'est plus. Le nombre d'événements N_t est distribué selon une loi de Poisson de paramètre

$\int_0^x \rho(u)du$. Les intervalles X_j entre les points du PNH ne sont plus indépendants,

l'indépendance est plutôt conditionnelle à t_j .

4.2.3 Le processus de renouvellement homogène

Un processus de Poisson dont les intervalles sont indépendants et distribués selon une loi exponentielle, est généralisé à un processus de renouvellement homogène (RH) lorsque les intervalles $\{X_1, X_2, \dots, X_j\}$ sont indépendants et distribués selon une loi commune arbitraire f . L'intensité $\rho(t, H_j)$ d'un RH dépend uniquement de l'instant d'occurrence du dernier événement, donc $\rho(t, H_j) = \rho(t, t_{NH})$. Une quantité importante pour le RH est le taux d'avarie (de rupture) (*hazard rate*) $\varphi(x)$. $\varphi(x)\Delta t$ est la probabilité d'occurrence d'un événement sur Δt étant donné que le temps écoulé depuis le dernier événement est x :

$$\varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x | x < X)}{\Delta x} \tag{3}$$

$\varphi(x)$ est défini à partir de la densité des intervalles f comme suit :

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \tag{4}$$

où $F(x) = \int_0^x f(a)da$. Le produit $\varphi(t - t_{NH})\Delta t$ est la probabilité conditionnelle

qu'un événement survienne dans l'intervalle $(t, t + \Delta t]$ étant donné que le dernier événement est survenu à l'instant t_{NH} . La relation entre l'intensité et le taux d'avarie est : $\rho(t, t_{NH}) = \varphi(t - t_{NH})$. Le taux d'avarie d'un PH, est égal à l'intensité ρ

4.2.4 Le processus de Poisson doublement stochastique

Le processus de Poisson doublement stochastique (PDS) est un processus dont l'intensité est un processus aléatoire qui peut dépendre d'un processus d'information externe, lui-même aléatoire, $\{Y_t\}$. Étant donné le processus ponctuel, le processus d'intensité $\rho(t, Y_t)$ n'est pas connu exactement. Toutefois, étant donné le processus externe $\{Y_t = y_t ; t \geq 0\}$, le PDS devient un processus de Poisson non homogène conditionnel (PNHC) de fonction d'intensité $\rho(t, y_t)$. On définit :

$$\hat{\lambda}_t = E(\rho(t, Y_t) | N_t; t_1, t_2, \dots, t_{NH}), N_t \geq 1 \text{ et } \hat{\lambda}_t(n) = E(\hat{\lambda}_t | N_t = n) \tag{5}$$

Il est en général très difficile, voire impossible de calculer $\hat{\lambda}_t(n)$ et $\hat{\lambda}_t$.

4.2.5 Le processus autoexcité

Le processus autoexcité (AE) est le processus le plus général. Il est obtenu à partir d'un processus de Poisson en permettant à l'intensité de dépendre du

processus ponctuel lui-même. Ainsi, le nombre d'événements N_t passés et leurs temps d'occurrence $(t_1, t_2, \dots, t_{N_t})$ peuvent influencer le nombre d'événements futurs et leurs temps d'occurrence.

L'intensité d'un AE $\rho(t, N_t; (t_1, t_2, \dots, t_{N_t}), t_{N_t} < t \leq t_{N_t+1})$, est un processus aléatoire ayant des chemins connus, étant donnée l'historique du processus ponctuel H_t . Le processus a une mémoire m si le processus d'intensité dépend des m derniers événements. On définit $\rho(N_t; t_1, t_2, \dots, t_{N_t}) = E(\rho(t, N_t; t_1, t_2, \dots, t_{N_t}) | N_t)$.

Un processus a une mémoire d'ordre m si et seulement si les temps d'occurrence des événements forment une chaîne de Markov d'ordre m . Un PH a une mémoire d'ordre 0 et un RH a une mémoire d'ordre 1. Un PDS est un processus autoexcité dont le processus d'intensité est $\{\hat{\lambda}_t; t \geq t_0\}$, tel que défini par l'équation 5. Le RNH est un AE non homogène de mémoire d'ordre 1, et dont l'intensité dépend uniquement de l'instant t et de l'instant d'occurrence du dernier événement, tel que $\rho(t, N_t; t_1, t_2, \dots, t_{N_t}) = \rho(t, N_t), t_{N_t} < t \leq t_{N_t+1}$. La figure 6 résume les relations entre ces processus.

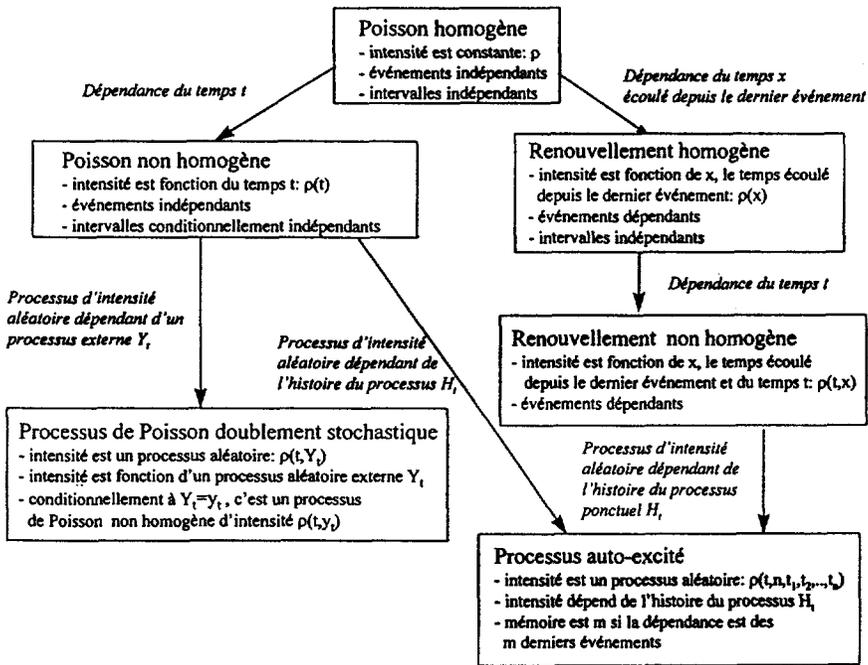
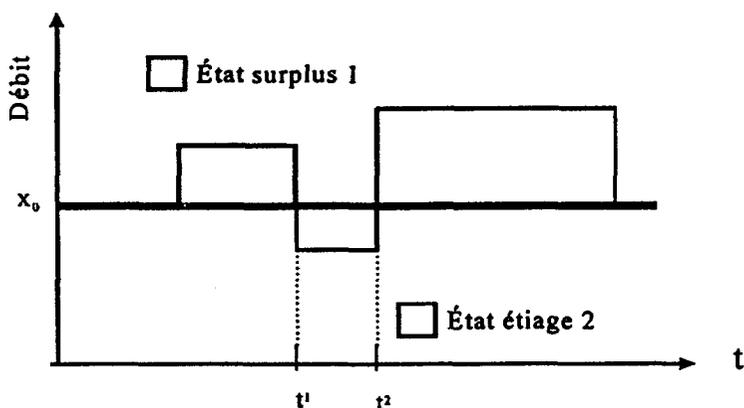


Figure 6 Schéma illustrant les relations entre certains processus ponctuels.
Illustration of the relationships between various point processes.

4.3 L'application des processus ponctuels aux étiages

La plupart des méthodes statistiques proposées pour l'analyse des durées sont purement empiriques, et NORTH (1981) a été le premier à effectuer une analyse théorique des durées d'étiage à partir de données journalières. Son

approche pour modéliser les étiages sous forme de processus intermittents tient compte de façon continue de l'effet saisonnier et de la dépendance du temps (mémoire). L'étiage est défini comme un débit en dessous d'un seuil fixe $x_0 = S_{95}$ (le débit dépassé 95 % du temps), et les modèles sont à deux états, étiage et surplus. Le processus ponctuel alterné de surplus (type 1) et d'étiage (type 2) est défini par les temps d'occurrence des deux événements (figure 7). Pour reprendre la notation de NORTH (1981), un événement de type i correspond à la rupture de l'état i .



t^1 : temps d'occurrence de l'événement 1

t^2 : temps d'occurrence de l'événement 2

Événement i : rupture de l'état i ; $i = 1, 2$

Figure 7 Définition du processus ponctuel alterné de surplus et d'étiage.

Definition of an alternating deficit-surplus point process.

Deux modèles de ce processus alterné sont proposés par NORTH (1981) : le premier correspond à deux processus de Poisson non homogènes sans mémoire obtenus lorsque l'intensité $\lambda^i(t)$ est une fonction périodique, c'est-à-dire lorsque les taux d'occurrence d'événement dépendent uniquement du temps. Cette forme de $\lambda^i(t)$ est un exemple simple de prise en compte des variations saisonnières, elle n'est aucunement une formule universelle :

$$\lambda^i(t) = \lambda_i \exp \left[K_i \sin (\omega t + \theta_i) \right], \quad \omega = \frac{2\pi}{365}, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

Le deuxième modèle est composé de deux processus de renouvellement non homogènes avec mémoire limitée, où l'occurrence d'un événement à l'instant t dépend du temps écoulé depuis le dernier événement qui eut lieu à l'instant u . L'intensité est $\varphi^i(t - u, t)$ donnée par l'équation 7, où $\lambda^i(t)$ est la fonction périodique de l'équation 6, et $\varphi^i(t - u)$ est l'intensité d'un processus de renouvellement homogène définie par :

$$\varphi^i(t - u, t) = \varphi^i(t - u)\lambda^i(t), i = 1, 2 \quad (7)$$

Après avoir estimé les fonctions d'intensité pour les deux types de modèles, l'auteur a obtenu la loi des durées dans un état, la loi conjointe de la durée et du temps de déclenchement, ainsi que la loi de la durée sur un intervalle donné.

LEE *et al.* (1986) ont effectué une analyse de fréquence des durées des sécheresses multiannuelles à l'aide des processus ponctuels de renouvellement. Une sécheresse a lieu lorsque le débit moyen annuel est inférieur à un seuil égal à la moyenne des débits moyens annuels. Ces auteurs avaient pour but de trouver la loi de la durée de la sécheresse multiannuelle $f(t)$. Considérant ces événements de sécheresse comme un processus de renouvellement, ils ont utilisé les notions suivantes : t est la durée, $f(t)$ est la fonction de densité de la durée, $R(t)$ est la probabilité que la durée dépasse t , et $h(t) = f(t)/R(t)$ est le taux de rupture. On a alors :

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right] = 1 - F(t) \quad (8)$$

$$f(t) = h(t)\exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right] \quad (9)$$

Ils ont cherché à ajuster une fonction $h(t)$ à la probabilité $P[D = t | d \geq t]$ qu'une sécheresse se termine après t années étant donné qu'elle a déjà duré au moins t années, (i.e. le taux de rupture d'une sécheresse de t années). Ce taux empirique est estimé à partir des données par le nombre de sécheresses qui durent t années divisé par le nombre de sécheresses qui durent plus de t années. Les auteurs ont conclu que la forme la plus adéquate pour représenter le taux de rupture des sécheresses est la fonction logistique : $h(t) = \frac{1}{1 + p \exp(-qt)}$.

ZELENHASIC et SALVAI (1987) ont analysé le processus intermittent des sécheresses de durée inférieure à un an, à partir des débits journaliers et selon la théorie des valeurs extrêmes d'un nombre aléatoire de variables aléatoires présentées par TODOROVIC (1970). Un événement de sécheresse est défini pour chaque année à partir des débits journaliers et d'un seuil. Une sécheresse qui débute une année et se termine l'année suivante est associée à la première année. Afin d'assurer l'indépendance des événements, des conditions d'écart au seuil et de durée minimale entre événements sont imposées. Ces auteurs ont appliqué ainsi un processus de Poisson non homogène à l'occurrence des événements de sécheresse. La loi Gamma est alors la loi du temps d'occurrence de la i^e sécheresse par rapport à un temps d'origine arbitraire t_0 , et la loi de Poisson est la loi du nombre de sécheresses dans un intervalle de temps $[0, t]$. Les auteurs ont aussi déduit la distribution du plus gros déficit sur un intervalle de temps lorsque les volumes de déficit sont indépendants et distribués selon une loi de la famille Gamma. Ces résultats ont été obtenus pour des seuils correspondant aux 90^e et 95^e quantiles (S_{90} , S_{95}).

CHANG (1989) a émis l'hypothèse que les sécheresses définies par le biais d'un seuil ont lieu selon un processus de Poisson non homogène, et il a estimé une fonction d'intensité ayant une forme périodique. L'auteur a constaté que les

durées et les déficits sont fortement corrélés pour tous les seuils de dépassement (S_{10} , S_{30} , S_{50} , S_{70} , S_{80} , S_{90}), cette corrélation étant plus forte pour les faibles seuils.

MADSEN et ROSBJERG (1995) ont utilisé un processus de Poisson homogène pour modéliser trois processus d'occurrence d'étiage. Le premier est défini à partir des débits journaliers et d'un seuil correspondant au 90^{ème} quantile ; le deuxième est défini à partir des débits mensuels et d'un seuil variable correspondant au débit mensuel moyen ; et le troisième est défini à partir des débits annuels et d'un seuil correspondant au débit annuel médian. Dans le cas journalier, un événement est défini (comme par ZELENHASIC et SALVAI (1987)) de façon à assurer l'indépendance de ces événements. La loi géométrique est ajustée aux durées.

Tableau 5 Résumé des processus ponctuels appliqués aux sécheresses et aux étiages.

Table 5 A summary of the point processes applied to low-flows.

Processus	Variables	Référence Débits, seuils = S^*_k
Poisson alterné, et renouvellement alterné non homogènes	Durée, durée et temps de déclenchement, durée à l'intérieur d'un intervalle	NORTH, 1981 débits journaliers, seuil = S_{95}
Renouvellement homogène	Durée	LEE <i>et al.</i> , 1986 débit annuel moyen, seuil = moyenne des débits annuels moyens
Poisson non homogène	Nombre de sécheresses, plus gros déficit, et temps d'occurrence de la $j^{\text{ème}}$ sécheresse dans $[0, t]$	ZELENHASIC et SALVAI, 1987 débits journaliers, seuils = S_{95} , S_{90}
Poisson non homogène	—	CHANG, 1989 débits journaliers, seuils = S_{10} , S_{30} , S_{50} , S_{70} , S_{80} , S_{90}
Poisson homogène	Durée, volume de déficit	MADSEN et ROSBJERG, 1995 débits journaliers, seuil = S_{90}
Poisson alterné, et renouvellement alterné non homogènes, et Poisson Conditionnel alterné non homogène	Indices de risque reliés aux durées d'étiage	ABI-ZEID, 1997 débits journaliers, seuils = S_{90} , S_{75}

S_k : débit dépassé k % du temps

Récemment, ABI-ZEID (1997) a appliqué aux séries nonstationnaires de déficit et de surplus de 11 rivières canadiennes des processus de Poisson non homogènes, des processus de renouvellement non homogènes, ainsi que des processus de Poisson non homogènes conditionnels. Ces derniers incorporent des variables explicatives telles que la température et les précipitations

dans la formulation des fonctions d'intensité. Ces processus furent utilisés afin de définir des indices de risque reliés aux durées de déficits. Les débits journaliers sont utilisés et les seuils correspondent à S_{75} , et S_{90} . De plus, ABI-ZEID *et al.* (1998) ont quantifié ces indices de risque et leurs intervalles de confiance dans un contexte d'application à une rivière canadienne.

Le *tableau 5* résume l'application des processus ponctuels aux étiages et sécheresses.

5 - CONCLUSION

Nous avons présenté une revue bibliographique des différentes approches utilisées pour la modélisation stochastique des étiages. À l'inverse d'une crue, qui est un phénomène spectaculaire de durée souvent négligeable et dont l'impact est dû surtout à son intensité, un étiage constitue un phénomène qui perdure et dont l'impact est dû surtout à la **durée** des faibles débits. Il s'avère alors impératif de développer des modèles d'étiages dont la variable principale est la durée du déficit.

La plupart des approches telles que l'analyse de fréquence des débits ne tiennent pas compte des durées et émettent des hypothèses trop simplistes de stationnarité. L'analyse des séquences permet l'obtention des lois de durées uniquement pour des processus de débits très simples. Les processus de Markov sont couramment utilisés pour modéliser les précipitations mais la prise en compte de l'effet saisonnier passe par une subdivision de l'année qui augmente le nombre des paramètres à estimer et qui contient un certain arbitraire dans la division. L'avantage de l'approche des processus ponctuels par rapport à l'analyse des séquences est qu'elle permet d'étudier des processus complexes, dépendants et non stationnaires. De plus, les processus ponctuels alternés permettent la modélisation des durée et la génération synthétique des temps d'occurrence des séries de surplus et de déficit.

REMERCIEMENTS

Les auteurs désirent remercier le CRSNG, Hydro-Québec, FCAR, et le gouvernement français qui ont financé en partie les travaux dont les résultats sont présentés ici. Ils désirent aussi remercier M. Éric Parent ainsi que les réviseurs anonymes pour leurs commentaires et suggestions.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABI-ZEID I., 1997. La modélisation stochastique des étiages et de leurs durées en vue de l'analyse du risque. Th. Doct. INRS-Eau/ENGREF, 278 p.
- ABI-ZEID I., PARENT E., BOBÉE B., 1998. Computing risk indices based on drought durations. *Proceedings of the International Symposium on Water Supply and Treatment*, Istanbul, Turkey, pp. 175-184.
- ADAMCZYK M., 1992. Nonparametric low flow frequency analysis. *Report M. Sc. Civil Engineering Degree*, Univ. of Ottawa, 145 p.
- BERAN, M.A., J.A. RODIER (1985), Hydrological aspects of drought, Rapport UNESCO-WMO.
- BERNIER J., 1964. La prévision statistique des bas débits. Association Internationale d'Hydrologie, no 63.
- CHANDER S., KAMBO N.S., SPOLIA S.K., KUMAR A., 1981. Analysis of surplus and deficit -using runs. *J. Hydrology*, 49, 93-208.
- CHANG T.J., 1989. Characteristics of streamflow drought. *Proceedings of the Baltimore Symposium on New Directions for Surface Water Modeling*, IAHS Publ. no. 181, 333-341.
- CHANG T.J., STENSON J.R., 1990. Is it realistic to define a 100-year drought for water management? *Water Resources Bulletin*, 26(5), pp. 823-829.
- CONDIE R., NIX G.A., 1975. Modelling of low flow frequency distributions and parameter estimation. *Proceedings of the International Water Resources Symposium, Water for Arid Lands*, Iran.
- CORREIA F.N., SANTOS M.A., RODRIGUES R.R., 1991. Reliability in regional drought studies. *Water Resources Engineering Risk Assessment*, GANOULIS J. [Ed.], SPRINGER-VERLAG, pp. 43-62.
- CTGREF, 1979. Étude fréquentielle des étiages. Informations Techniques, cahier no 33.
- DOWNER R.N., SIDDIQI M.M., YEVJEVICH V., 1967. Applications of runs to hydrologic droughts. *Proceedings of the International Hydrology Symposium*, Fort Collins, Colorado, pp. 496-505.
- DRACUP J.A., LEE K.S., PAULSON Jr. E.G., 1980a. On the definitions of droughts. *Water Resources Research*, 16(2), 297-302.
- DRACUP J.A., LEE K.S., PAULSON Jr. E.G., 1980b. On the statistical characteristics of drought events. *Water Resources Research*, 16(2), 289-296.
- GAREN D.C., 1993. Revised surface-water supply index for western United States. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 119(4), 437-454.
- GUERRERO-SALAZAR P., YEVJEVICH V., 1975. Analysis of drought characteristics by the theory of runs. *Colorado State University Hydrology Paper*, no. 80.
- GUMBEL E.J., 1954. Statistical theory of droughts. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, vol. 80, separate 439.
- GÜVEN O., 1983. A simplified semiempirical approach to probabilities of extreme hydrologic droughts. *Water Resources Research*, 19(2), 441-453.
- HOANG V.D., 1978. Meilleur ajustement statistique aux débits journaliers de crue et d'étiage des rivières du Québec. *Ministère des Richesses naturelles, Direction générale des eaux*, H.P.-47.
- JACKSON B.B., 1975. Markov mixture models for drought lengths. *Water Resources Research*, 11(1).
- JOSEPH E.S., 1970. Probability distribution of annual droughts. *Journal of the irrigation and drainage division, Proceedings of the ASCE*, 96 (IR4), 461-474.
- KENDALL D.R., DRACUP J.A., 1990. The development of a hydrologic drought index and termination rate probabilities. *Hydraulics/Hydrology of arid lands*, 323-328.
- LEE K.S., SADEGHIPOUR J., DRACUP J.A., 1986. An approach for frequency analysis of multiyear drought durations. *Water Resources Research*, 22(5), 655-662.
- LOGANATHAN G.V., MATTEJAT P., KUO C.Y., DISKIN M.H., 1986. Frequency analysis of low flows: Hypothetical distribution methods and a physically based

- approach. *Nordic Hydrology*, 17, 129-150.
- MADSEN H., ROSBJERG D., 1995. On the modelling of extreme droughts. *IAHS Publ.*, no. 231, pp. 377-385.
- MATALAS N.C., 1963. Probability distribution of low flows. *U.S. Geological survey, professional, report no. 434 A.*
- MATHIER L., PERREAULT L., BOBÉE B., ASHKAR F., 1992. The use of Geometric and Gamma-related distributions for frequency analysis of water deficit. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, 6, 239-254.
- MILLAN J., YEVJEVICH V., 1971. Probabilities of observed droughts. *Colorado State University Hydrology*, Paper no. 50.
- MILLAN J., 1972. Drought impact on regional economy. *Colorado State University Hydrology*, Paper no. 55.
- MILLAN J., 1973. Statistical properties of runs as applied to hydrologic droughts. *Proceedings of the 2nd International Symposium on Hydrology, Floods and Droughts*, pp. 627-636.
- MIQUEL J., PHIEU BOU PHA B., 1979. Évaluation des ressources en eau : définition des étiages et estimation de leurs probabilités d'occurrence. *Association Internationale de Recherches Hydrauliques*, A.B.5, pp. 287-294.
- MOOD A. M., 1940. The distribution theory of runs. *Annals of Mathematical Statistics*, 11, 367-392.
- MOYÉ L.A., KAPADIA A.S., CECH J.M., HARDY R.J., 1988. The theory of runs with applications to drought prediction. *Journal of Hydrology*, 103, 127-137.
- MOYÉ L.A., KAPADIA A.S., 1995. Predictions of drought length extreme order statistics using run theory. *Journal of Hydrology*, 169, 95-110.
- NATHAN R.J., McMAHON T.A., 1990. Practical aspects of low-flow frequency analysis. *Water Resources Research*, 26(9), 2135-2141.
- NORTH M., 1981. Processus Hydrologiques Intermittents : Étude de modélisations stochastiques et applications. Th. Doct., no. 419, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- PALMER W.C., 1965. Meteorological drought. *U.S. Department of Commerce, Weather Bureau, Research, Paper no. 45*, 58 pages.
- RAYNAL-VILLASENOR J.A., DOURIET-CARDENAS J.C., 1987. The GEV distribution in drought frequency analysis. In *Engineering hydrology*, FELDMAN A.D.[Ed.], pp. 532-537.
- RIGGS H.C., 1972. Low-flow investigations. Techniques of Water Resources Investigations of the United States Geological Survey.
- RIGGS H.C., 1979. Characterizing streamflow droughts. *Proceedings of the International Symposium on Hydrological Aspect of Drought*, New Delhi, vol. 2, pp. 331-338.
- SALDARRIAGA J., YEVJEVICH V., 1970. Application of run-lengths to hydrologic series. *Colorado State University, Hydrology Paper no. 40.*
- SEN Z., 1977. Run-Sums of annual flow series. *Journal of Hydrology*, 35, 311-324.
- SEN Z., 1980A. The numerical calculation of extreme wet and dry Periods in hydrological time series. *Hydrological Sciences Bulletin*, 25(2), 135-142.
- SEN Z., 1980B. Critical drought analysis of periodic-stochastic processes. *Journal of Hydrology*, 46, 251-263.
- SEN Z., 1980C. Statistical analysis of hydrologic critical droughts. *Proceedings of the ASCE, Journal of the Hydraulics Division*, 106(HY1), 99-115.
- SEN Z., 1990. Critical drought analysis by second-order Markov chain. *Journal of Hydrology*, 120, 183-202.
- TALLAKSEN, L.M., MADSEN, H., CLAUSEN, B., 1997. On the definition and modelling of streamflow drought duration and deficit volume. *Hydrological Sciences Journal*, 42(1), 15-34
- TASKER G.D., 1987. A comparison of methods for estimating low flow characteristics of streams. *Water Resources Publications*, 23(6), 1077-1083.
- TODOROVIC P., 1970. On some problems involving random number of random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, 41(3), 1059-1063.

YEVJEVICH V., 1967. An objective approach to definitions and investigations of continental hydrologic droughts. *Colorado State University*, Hydrology Paper no. 23.

YEVJEVICH V., DA CUNHA L., VLACHOS E., [Eds.] 1983. *Coping with Droughts*. Water Resources Publications.

ZELENHASIC E., SALVAI A., 1987. A method of streamflow drought analysis. *Water Resources Research*, 23(1), 156-168.