L'Actualité économique

Recherche opérationnelle - 3
Files d’attente : problèmes concrets

Claude Tricot

Volume 39, Number 1, April–June 1963

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1001891ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1001891ar

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Cite this article

Tricot, C. (1963). Recherche opérationnelle - 3 : files d’attente : problèmes concrets. *L'Actualité économique*, *39*(1), 108–117. https://doi.org/10.7202/1001891ar

Analyses

Recherche opérationnelle - 3

Files d'attente : problèmes concrets

Dans un précédent article[1], nous avons analysé deux ouvrages généraux concernant les problèmes d'attente. Nous avons vu que l'étude de ces phénomènes est double : il faut étudier la façon d'arriver des clients, puis, l'évolution du système. En ce qui concerne les arrivées, des hypothèses très générales en font fréquemment un processus de Poisson, uniforme ou pas ; mais la nature des choses ne permet pas toujours d'admettre le bien fondé de ces hypothèses. Un article de M. Girault paru dans les Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle[2], nous donne l'exemple d'arrivées obéissant à des hypothèses plus particulières.

L'article est intitulé «Stockage régulateur d'un écoulement continu». L'auteur se préoccupe de problèmes particuliers posés à une usine fonctionnant de façon régulière et approvisionnée de façon irrégulière : la matière première arrive de loin et par chargements importants. Il s'agit donc de constituer un stock qui joue le rôle du volant d'une machine, c'est-à-dire qui restitue l'énergie emmagasinée lorsque la source énergétique s'interrompt. Il faut remarquer que la production étant supposée régulière, on exclut donc des variations du genre saisonnier. Il faudra prévoir une adaptation du modèle choisi si une irrégularité systématique est constatée dans la production ; de plus, par irrégularité des arrivées, on sous-entend que l'irrégularité vient de légers retards dus à des petits ennuis comme l'éloignement peut en causer. On aura cepen-

1. « Files d'attente », *L'Actualité Économique*, janvier-mars 1963, pp. 626 à 642.
2. Cahier no 4, 1962.

dant des commandes systématiques et régulières, ce qui causera à la fois une régularité globale sur un temps assez long et une irrégularité locale sur un temps assez court. Enfin, l'auteur élimine les possibilités de gros ennuis comme les grèves, les guerres ou autres catastrophes graves qui mettraient le modèle en défaut puisque, comme dans tout modèle probabiliste, une loi régulière sera dégagée, conséquence d'irrégularités *petites* mais *nombreuses*.

L'importance du stock-tampon, inconnue du problème, sera déterminée par l'optimisation d'une fonction économique qui tiendra compte, d'un côté, des frais de stockage et, de l'autre, des risques dus à un stockage insuffisant. Mais le stock total est une quantité variable au cours du temps par suite de l'écoulement et des arrivées; l'écoulement étant continu, il s'agit donc de créer un modèle mathématique convenable pour représenter les arrivées.

L'idée première serait de recourir à un processus de Poisson, par la considération du fait que les nombreuses causes diverses de retard introduisent une certaine indépendance entre les diverses arrivées; et, de fait, une analyse statistique des arrivées, durant 730 jours consécutifs, donne des résultats qui concordent fort bien avec une telle hypothèse.

Cependant, il est, d'un autre point de vue, absurde de supposer que les arrivées constituent un processus de Poisson. M. Girault en donne la raison suivante: si le nombre des arrivées au cours d'un intervalle de temps t suit une loi de Poisson de paramètre λ, la variance de ce nombre est λt, ce qui est choquant car, si t est grand, plusieurs commandes suivies de livraisons auront été passées, les arrivées des 1ère, 2ième, etc., commandes se seront toutes produites. L'existence d'une variance non nulle sera donc provoquée uniquement par les retards dans la ou les quelques dernières commandes; cette variance est donc un nombre borné, qui ne saurait être proportionnel à t.

Pourquoi les arrivées, globalement, paraissent-elles poissonniennes ? La réponse est dans le mot «paraissent». Elles le paraissent parce qu'on analyse globalement un échantillon:

tant de jours il n'est arrivé aucun chargement;
tant de jours il en est arrivé un;
tant de jours il en est arrivé deux, etc.

On assiste, ici, au phénomène signalé à propos de la roulette de Monte Carlo[3]: on a bien un échantillon poissonnien mais la suite des arrivées ne constitue pas un processus de Poisson.

Le problème posé nécessite donc la création d'un modèle particulier; l'auteur propose le suivant, qui est mi-déterministe mi-aléatoire.

Les commandes étant passées régulièrement à des époques en progression arithmétique de raison λ, les arrivées devraient se produire aux temps $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}, \ldots$, ces époques formant elles-mêmes une progression arithmétique de raison λ. L'irrégularité sera obtenue en ajoutant un élément aléatoire à chacune des dates précédentes, ce qui donnera la suite: $\theta_0 + \epsilon_0, \theta_1 + \epsilon_1, \ldots, \theta_n + \epsilon_n, \theta_{n+1} + \epsilon_{n+1}, \ldots$ On supposera que les ϵ_i sont des variables aléatoires ayant même loi de probabilité, indépendantes en probabilité, de moyenne nulle, et bornées, pour rester près de la nature des choses. On aura par exemple:

$$-l < \epsilon_i < l,$$

l pouvant être grand par rapport à λ.

Cela étant, pour qu'une arrivée soit possible à une certaine époque t, il faut:

$$t = \theta_n + \epsilon_n,$$

donc:

$$\theta_n - l < t < \theta_n + l,$$

ce qui s'écrit:

$$t - l < \theta_n < t + l.$$

Cette double inégalité permet de déterminer le nombre d'arrivées possibles à l'époque t; c'est le nombre de termes de la suite $\{\theta_i\}$ compris entre $t - l$ et $t + l$, soit:

$$\frac{(t + l) - (t - l)}{\lambda} = \frac{2l}{\lambda}$$

ou, plus précisément, la partie entière de ce nombre ou le nombre entier suivant; cette quantité est désignée par k.

k arrivées sont ainsi possibles à l'époque t. Si Δt est suffisamment petit, le même nombre d'arrivées est possible entre les instants t et $t + \Delta t$. Désignons par $\theta_{t1} + \epsilon_{t1}, \theta_{t2} + \epsilon_{t2}, \ldots$ $\theta_{tk} + \epsilon_{tk}$, les instants de ces arrivées. Pour que l'une quelconque

3. *L'Actualité Économique*, octobre-décembre 1962, p. 437.

d'entre elles, $\theta_{ti} + \epsilon_{ti}$ par exemple, ait lieu dans l'intervalle $(t, t + \Delta t)$, il faut:

$$t - \theta_{ti} < \epsilon_{ti} < t + \Delta t - \theta_{ti}.$$

La probabilité de cet événement est donnée par la loi de probabilité des ϵ. Désignons-la par p_i, et désignons par x_i une variable aléatoire qui prend la valeur 1 avec la probabilité p_i et 0 avec la probabilité $1 - p_i$.

Le nombre d'arrivées, aléatoire, dans l'intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$ est alors:

$$\mathcal{X} = x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

Pour trouver une loi de probabilité approchée de ce nombre, supposons Δt assez petit, ce qui entraîne des p_i eux-mêmes petits.

La fonction caractéristique de x_i est:

$$\varphi_i(t) = p_i e^{it} + 1 - p_i$$

et, par suite de l'indépendance, celle de $\mathcal{X}$ est:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \Pi\varphi_i(t)\\ &= \Pi\left[p_i(e^{it} - 1) + 1\right].\end{aligned}$$

Sa seconde fonction caractéristique est alors:

$$\psi(t) = \sum \log\left[p_i(e^{it} - 1) + 1\right].$$

Les p_i étant petits, chaque logarithme se réduit à sa partie principale:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \sum p_i(e^{it} - 1)\\ &= (e^{it} - 1)\sum p_i\end{aligned}$$

d'où:

$$\varphi(t) = \exp\left[(e^{it} - 1)\sum p_i\right],$$

ce qui est la fonction caractéristique d'une loi de Poisson.

Les arrivées peuvent donc être considérées comme *localement* poissonniennes, le paramètre de la loi étant d'ailleurs variable avec le temps et même périodique de période λ. Or, on sait que la somme de deux variables aléatoires poissonniennes est également poissonnienne. Ceci permet d'expliquer que le nombre total d'arrivées, au cours d'un temps assez long, puisse être considéré comme poissonnien tel qu'indiqué par l'étude statistique.

Enfin, si on considère un intervalle de temps (t_1, t_2) d'amplitude supérieure à $2l$, le nombre maximum d'arrivées possibles dans cet intervalle de temps est égal au nombre de θ_i se trouvant sur l'intervalle $(t_1 - l, t_2 + l)$; il vaut:

$$\frac{t_2 + l - (t_1 - l)}{\lambda} = \frac{t_2 - t_1 + 2l}{\lambda}.$$

Mais, parmi ces θ_i, plusieurs donnent une arrivée certaine dans l'intervalle (t_1, t_2): ce sont ceux qui appartiennent à l'intervalle $(t_1 + l, t_2 - l)$.

Leur nombre est:

$$\frac{t_2 - l - (t_1 + l)}{\lambda} = \frac{t_2 - t_1 - 2l}{\lambda}.$$

On voit que le nombre d'arrivées sur le segment (t_1, t_2) est la somme d'un nombre aléatoire et d'un nombre certain. Le nombre aléatoire a pour maximum:

$$\frac{t_2 - t_1 + 2l}{\lambda} - \frac{t_2 - t_1 - 2l}{\lambda} = \frac{4l}{\lambda}.$$

Sa variance est évidemment égale à celle du nombre total d'arrivées sur (t_1, t_2); cette dernière est donc bornée et le modèle choisi satisfait aux exigences voulues au départ. En supposant, implicitement, que $t_1 = \theta_j$ et que $t_2 - t_1$ et l sont des multiples de λ, l'auteur de l'article montre que la variance précédente est même constante; ces hypothèses implicites n'ont d'ailleurs rien de choquant si λ est petit par rapport à l et à $t_2 - t_1$.

Le modèle convenant théoriquement, l'auteur le confronte avec deux échantillons réels pour vérifier qu'il est satisfaisant.

Cette loi de probabilité des arrivées forme la base sur laquelle pourra être construite la loi de probabilité du stock à un instant t quelconque, d'où un calcul économique intéressant concernant le volume du stockage à prévoir.

*

* *

La solution du problème précédent fournit donc un modèle mathématique plus adapté à la réalité étudiée que le processus d'arrivées de Poisson. Dans le même ordre d'idées, en ce qui concerne l'évolution des systèmes d'attente, on a vu que l'on choisissait souvent comme loi des durées des services (ou conversations) la loi exponentielle (la fonction de densité d'une telle durée est alors de la forme $\lambda e^{-\lambda t}$) non pas parce que cette loi s'adapte toujours bien à la réalité, mais parce qu'elle fournit des résultats simples. Ce qui la rend cependant difficilement applicable, c'est que sa moyenne $\frac{1}{\lambda}$ est égale à son écart-type; la loi ne s'applique donc que dans le cas où les durées de conversation sont très dispersées. Si un échantillon des durées de conversation n'a pas un écart-type voisin de la moyenne, la loi s'ajuste mal.

La loi d'Erlang, en introduisant un nouveau paramètre, permet l'ajustement de l'écart-type et conserve, au moins partiellement, les avantages de la loi exponentielle.

Exposons brièvement le procédé qui conduit à la loi d'Erlang. On décompose, par la pensée, le service en n phases exponentielles indépendantes du même paramètre μ; le client qui se fait servir est censé recevoir le service S_n (durée aléatoire de densité $\mu e^{-\mu t}$), puis le service S_{n-1} (durée aléatoire de densité $\mu e^{-\mu t}$), etc. Naturellement, tant qu'il se fait servir il est seul à parcourir les n phases puisque celles-ci sont fictives et ne représentent pas n serveurs en cascade. La durée moyenne d'occupation du service est alors $\frac{n}{\mu}$ (puisque la durée moyenne de chaque phase est $\frac{1}{\mu}$), sa variance $\frac{n}{\mu^2}$, et son écart-type $\frac{\sqrt{n}}{\mu}$. On voit que le rapport de l'écart-type à la moyenne est $\frac{1}{\sqrt{n}}$; la loi s'ajuste donc à des services peu dispersés et même pas dispersés du tout (services constants) pour n infini.

L'inconvénient de ce procédé est qu'il multiplie les inconnues, et, par suite, rend compliqué le calcul des probabilités d'état. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un système où un nombre fini de clients vient se présenter: un certain nombre de machines confiées à un ouvrier qui les répare au fur et à mesure qu'une panne se déclare, si l'on veut. L'état du système en régime permanent peut être défini par le nombre de machines en marche: état Ei, de probabilité Pi si i machines fonctionnent. Si l'on imagine que le service s'effectue en n phases, l'état du système à un instant donné sera E_i^j, ce symbole représentant le fait que i machines fonctionnent, la machine en réparation se trouvant dans la phase j: cet état a pour probabilité P_i^j et on a, évidemment:

$$\sum_j P_i^j = P_i.$$

Les P_i^j apparaissent comme des inconnues auxiliaires, puisque l'état E_i a seul une existence réelle; cependant elles interviennent dans le calcul où le nombre d'inconnues est alors multiplié par le nombre de phases. Il s'agit de trouver une méthode d'élimination de ces inconnues auxiliaires qui fournisse un calcul simple des seules inconnues intéressantes qui sont les P_i. C'est le but d'un article de E. Daru[4].

Le raisonnement porte sur l'exemple des machines réparées par un ouvrier. On suppose que 3 machines lui sont confiées: il s'agit donc, avec les notations précédentes, de calculer P_0 P_1 P_2 P_3.

La durée de fonctionnement sans interruption d'une machine est supposée exponentielle de paramètre λ et les services s'effectuant suivant une loi d'Erlang de paramètres μ et n.

On établit les équations en régime permanent. Par exemple, on se trouve dans l'état E_1^j $(j < n)$ — ce qui signifie: une machine est en marche, une attend, la troisième en est à la phase j de sa réparation — à l'instant $t + dt$, si l'une des 3 conditions suivantes est réalisée:

a) le système était dans l'état E_1^j à l'instant t, aucune machine n'est tombée en panne, la machine en réparation n'a pas changé de phase:

$$\text{probabilité: } P_1^j\,[1 - (\lambda + \mu)\,dt];$$

b) le système se trouvait dans l'état E_2^j à l'instant t, l'une des deux machines en fonctionnement est tombée en panne:

$$\text{probabilité: } P_2^j \times 2\lambda\,dt;$$

c) le système se trouvait dans l'état E_1^{j+1} et la machine en réparation a changé de phase:

$$\text{probabilité: } P_1^{j+1}\,\mu\,dt.$$

Le régime étant permanent on en déduit deux expressions de la probabilité de l'état E_1^j:

4. « Un problème de file d'attente », *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, 4e trimestre 1961, no 21.

$$P_1^j = P_1^j[1 - (\lambda + \mu)\,dt] + P_2^j\, 2\lambda\, dt + P_1^{j+1}\,\mu\, dt,$$

d'où: $P_1^{j+1} = P_1^j (1 + \epsilon) - 2\, P_2^j \epsilon$

en posant $\frac{\lambda}{\mu} = \epsilon.$

On obtient de même les expressions de P_0^{j+1} et P_2^{j+1} en fonction de P_0^j P_1^j et P_2^j,

d'où l'égalité matricielle

$$(1) \quad \boxed{P^{j+1} = AP^j}$$

avec

$$P^{j+1} = \begin{bmatrix} P_0^{j+1} \\ P_1^{j+1} \\ P_2^{j+1} \end{bmatrix} ; \; P^j = \begin{bmatrix} P_0^j \\ P_1^j \\ P_2^j \end{bmatrix}$$

et

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 1+\epsilon & -2\epsilon \\ 0 & 0 & 1+2\epsilon \end{bmatrix}$$

En appliquant l'égalité (1) $n - 1$ fois on en déduit:

$$(2) \quad P^n = A^{n-1} P^1,$$

et

$$(3) \quad P^1 + P^2 + \ldots + P^n = (I + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}) P^1.$$

En tenant compte du fait que:

$$\begin{aligned} P_0^1 + P_0^2 + \ldots + P_0^n &= P_0 \\ P_1^1 + P_1^2 + \ldots + P_1^n &= P_1 \\ P_2^1 + P_2^2 + \ldots + P_2^n &= P_2 \end{aligned}$$

l'égalité (3) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = (I + A + \ldots + A^{n-1}) \begin{bmatrix} P_0^1 \\ P_1^1 \\ P_2^1 \end{bmatrix}$$

ou encore:

$$(4) \quad \begin{bmatrix} P_0^1 \\ P_1^1 \\ P_2^1 \end{bmatrix} = \left(I + A + \ldots + A^{n-1}\right)^{-1} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

et, en tenant compte de (2):

$$(5) \quad \begin{bmatrix} P_0^n \\ P_1^n \\ P_2^n \end{bmatrix} = A^{n-1} \left(I + A + \ldots + A^{n-1}\right)^{-1} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

On obtiendra de plus une relation directe entre P^n et P^1 en s'intéressant aux conditions nécessaires pour que le service en soit à la phase n à l'époque $t + dt$.

Supposons donc, par exemple, qu'à l'instant $t + dt$ le système soit dans l'état E_0^n. Cela résulte ou bien du fait d'un état E_0^n à l'instant t, la réparation n'ayant pas changé de phase dans l'intervalle de temps $(t, t + dt)$, ou bien du fait que le système, dans l'état E_1^n à l'instant t a vu se produire la panne du seul appareil restant en marche. On en déduit, comme précédemment:

$$P_0^n = P_0^n (1 - \mu dt) + P_1^n \lambda\, dt,$$

ou:

$$P_0^n = P_1^n \epsilon,$$

et, par un raisonnement analogue:

$$\begin{aligned} P_1^n (1 + \epsilon) &= P_2^n 2\epsilon + P_0^1 \\ P_2^n (1 + 2\epsilon) &= P_3\ 3\epsilon + P_1^1 \\ P_3\ 3\epsilon &= P_2^1. \end{aligned}$$

Les quatre équations précédentes forment le système suivant:

$$(6) \quad \begin{cases} P_0^n = P_1^n \epsilon \\ P_1^n (1 + \epsilon) = P_2^n 2\epsilon + P_0^1 \\ P_2^n (1 + 2\epsilon) = P_3\ 3\epsilon + P_1^1 \\ P_3\ 3\epsilon = P_2^1. \end{cases}$$

ou apparaissent comme seules inconnues, outre P_3, les composantes des deux vecteurs colonnes:

$$\begin{bmatrix} P_0^1 \\ P_1^1 \\ P_2^1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} P_0^n \\ P_1^n \\ P_2^n \end{bmatrix}$$

dont les équations (4) et (5) donnent les expressions en fonction de $P_0\, P_1\, P_2$. En substituant on obtient donc un système homogène de quatre équations à quatre inconnues, $P_0\, P_1\, P_2\, P_3$, qui détermine ces inconnues à un facteur près. Ce facteur sera évidemment déterminé lui-même par la condition:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1$$

*

* *

Les deux articles analysés ont, d'un certain point de vue, le même objet: déterminer un modèle mathématique d'attente épousant le phénomène concret. D'autres articles récents que nous avons reçus ont des préoccupations différentes.

La revue *Operation Research*[5] publie une étude intéressante de Lajos Takacs sur la durée d'attente dans un système à un poste de service; les arrivées forment un processus de Poisson et la loi de distribution des durées de service est quelconque; la durée d'attente η (t) d'un client arrivant dans le système à l'instant t est une variable aléatoire, pour t donné, dont l'auteur détermine la loi de distribution. Il s'agit donc là d'un enrichissement d'une théorie mathématique considérée en soi.

En revanche, la *Revue Française de Recherche Opérationnelle* (4ième trimestre 1962) publie une extention de résultats déjà connus. Il s'agit encore de la durée d'attente, mais dans des conditions étudiées depuis longtemps: arrivées poissonniennes, services exponentiels, plusieurs postes de service. Ce qui fait l'originalité de l'étude, c'est la construction d'abaques et de tables utilisables lorsque le nombre de postes de service est grand (plus de 50 par exemple.) Le problème s'est posé pour déterminer le nombre d'agents nécessaires pour répondre au téléphone dans un service de réservation d'une compagnie aérienne; il s'agit donc là d'une application directe d'une théorie déjà connue.

C'est a ces 3 types qu'appartiennent les études récentes sur les phénomènes d'attente: approfondissement de la théorie, construction de modèles nouveaux ou exemples d'applications de résultats déjà anciens.

Claude TRICOT,
professeur à l'École des Hautes Études commerciales (Montréal).

5. Mars-avril 1963.