L'Actualité économique

Négociation collective et théorie des jeux : le rôle du temps dans la littérature récente

Edouard Wagneur

Volume 64, Number 1, mars 1988

URI: https://id.erudit.org/iderudit/601437ar
DOI: https://doi.org/10.7202/601437ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 64, n° 1, mars 1988

Négociation collective et théorie des jeux : le rôle du temps dans la littérature récente

Edouard WAGNEUR
École des Hautes Études Commerciales de Montréal *

1. INTRODUCTION

L'objet de ce rapport est de passer en revue quelques développements récents de la théorie mathématique des jeux et d'évaluer leur pertinence en tant que « paradigme » pour l'étude du phénomène de la négociation collective.

On peut considérer la négociation collective selon deux points de vue différents, tous les deux conduisant à une forme de jeu. Tout d'abord la négociation collective est une manifestation d'une situation de conflit : le produit d'une activité économique doit être partagé entre divers intervenants ; chaque intervenant élabore une *stratégie* en vue d'augmenter la part qui lui reviendra. En second lieu la négociation collective est un moyen particulier de procéder à une *résolution* du conflit ; un arbitre peut être éventuellement appelé à indiquer le partage qui semble équitable. Cette double interprétation du phénomène de négociation collective a son correspondant dans la théorie mathématique des jeux : les jeux *non coopératifs* concernant les situations de conflit où les joueurs cherchent à établir un équilibre à partir de leurs forces respectives et les jeux coopératifs visant plus particulièrement au partage équitable des gains entre les différents joueurs, selon leurs rapports respectifs. Un des développements récents particulièrement attrayant de la théorie des jeux est la notion d'*équilibre coopératif*, qui établit un lien logique entre ces deux types de situation de jeu. Cette notion d'équilibre nécessite une prise en compte explicite de la structure *dynamique* du jeu, avec, en particulier, une utilisation de stratégies ayant de la *mémoire*. Notre recherche a donc consisté à mettre en évidence le rôle du temps dans les modèles ludiques de négociation collective et à explorer la portée de ces nouvelles notions d'équilibre coopératif dans ce champ d'analyse.

---

* Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions (GERAD).

L'auteur tient à remercier particulièrement M. Alain Haurie, qui a bien voulu commenter et corriger ce travail au cours des étapes de son élaboration et demeure néanmoins seul responsable des erreurs qui pourraient encore subsister.

Ce travail a pu être accompli grâce au soutien financier de la fondation Mercure.

Ce travail se présente comme suit :

Dans la seconde partie nous relevons quelques-unes des difficultés liées à la modélisation mathématique des processus entourant la négociation d'un contrat.

La troisième partie est consacrée aux principales idées et résultats fondamentaux de la théorie des jeux : notion de stratégie, équilibre de Cournot-Nash, optimum parétien, solution de Nash.

Le célèbre dilemme du prisonnier est ensuite introduit comme exemple générique permettant d'illustrer le passage du jeu simple aux jeux répétés et aux jeux séquentiels. Ceci permet de voir aussi comment les notions de stratégie avec mémoire et de négociation, s'introduisent de manière naturelle. Après le rappel de quelques résultats fondamentaux (en particulier ceux de l'école de la London School of Economics), nous examinons l'influence sur l'issue du jeu, de l'existence d'alternatives (comme par exemple, pour un travailleur, la possibilité d'exercer un autre emploi moins bien rémunéré).

Dans la cinquième partie, nous abordons les jeux à information imparfaite, où l'approche axiomatique est étendue au cas où les joueurs n'ont pas une connaissance certaine des stratégies de leurs adversaires. Cette incertitude est traduite par un nouveau concept de jeu, celui de jeu bayesien (répété) et une nouvelle notion d'équilibre, l'équilibre bayesien parfait.

Enfin, dans une dernière partie, nous changerons d'approche pour examiner la théorie du point de vue de la négociation, de la médiation et de l'arbitrage.

2. Négociation et modélisation mathématique

La négociation d'une convention collective est un processus complexe faisant intervenir un très grand nombre de paramètres et d'agents. En première approximation, on peut distinguer quatre types d'agents :

- la partie patronale
- la partie syndicale
- les négociateurs de chacune de ces parties

dont les intérêts à court ou long terme s'opposent, voire peuvent être en contradiction avec une solution efficace.

Parmi les paramètres importants qui interviennent, on peut mentionner :

- les objectifs des agents,
- les solutions antérieures du jeu (conventions collectives précédentes),
- les solutions récentes pour des situations analogues (conventions signées dans des entreprises du même secteur ou dans des secteurs voisins),
- la conjoncture économique (état et perspective d'évolution des principales variables économiques globales et sectorielles),
- l'histoire des négociations précédentes (attitude des parties, grêve, lock-out, menaces, etc.),
- les règles du jeu (législation).

L'étude d'une situation aussi complexe à l'aide d'un modèle pose deux problèmes complémentaires : la modélisation proprement dite (*i.e* le passage de la réalité à une version idéalisée de cette réalité) et l'interprétation (démarche inverse).

1. *La modélisation*

Comment modéliser les influences respectives des paramètres (dépendance fonctionnelle, c'est-à-dire comment savoir si tel ou tel paramètre exerce une influence prépondérante ou au contraire, négligeable en première approximation, etc.), comment mesurer les valeurs des paramètres (variables de conjoncture ou historique des négociations précédentes par exemple) et comment tirer d'un tel modèle des résultats théoriques (ou de simulation expérimentale).

2. *L'interprétation*

Comment interpréter les résultats fournis par le modèle, à supposer qu'il y en ait (problème d'adéquation du modèle à la réalité). Tel résultat du modèle exprime-t-il convenablement la situation réelle, en dépit des simplifications et des paramètres négligés ?

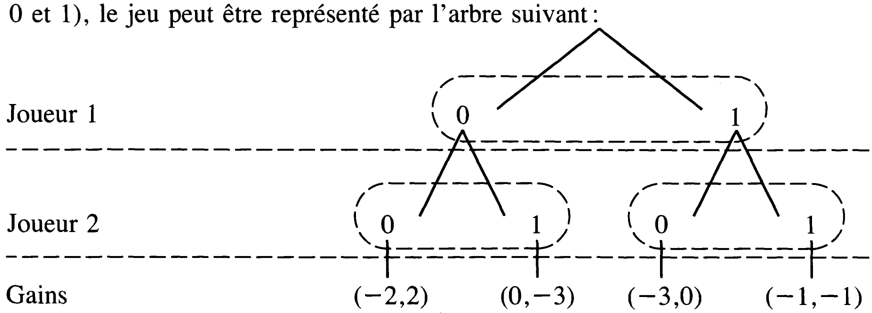
Dans un premier temps, il s'agira d'élaborer des *modèles simples* qui devront permettre, à partir d'un choix limité de paramètres considérés comme prépondérants :

i) de représenter les dépendances fonctionnelles entre ces paramètres,
ii) d'énoncer un certain nombre de propriétés du modèle,
iii) d'interpréter ces propriétés.

Une étude relativement succincte de la littérature portant sur la théorie des jeux et la négociation permet de constater une évolution vers des modèles de plus en plus élaborés qui rendent de mieux en mieux compte des phénomènes réels associés au processus de négociation.

3. Brefs rappels sur la théorie des jeux

Un jeu est dit *sous forme extensive* lorsqu'il est représenté sous la forme d'un arbre de décision dont les arcs représentent les diverses actions possibles. Un jeu où très peu d'actions sont possibles se laisse aisément représenter sous cette forme. Par exemple, si deux joueurs ont le choix entre deux actions (notées 0 et 1), le jeu peut être représenté par l'arbre suivant :



Remarquons que le joueur 2 ne connaît pas l'action du joueur 1 lorsqu'il choisit sa propre action. Ceci est représenté par les ensembles d'informations encadrés en lignes pointillées.

Les actions des joueurs ainsi que les gains correspondants peuvent être représentés sous forme de la matrice :

1 \ 2	0	1
0	$(-2,-2)$	$(0,-3)$
1	$(-3,0)$	$(-1,-1)$

où le couple $(-3,0)$ par exemple représente les gains associés à l'action 1 du premier joueur et 0 du second. Le gain du joueur 1 est -3 et celui du joueur 2 est 0.

Les actions des joueurs sont conditionnelles à l'information dont ils disposent. On appelle *stratégie* une règle de décision permettant à un joueur de choisir une action déterminée en fonction de l'information dont il dispose.

Un jeu est dit *sous forme normale* lorsque sont précisés :

i) l'ensemble des joueurs,
ii) l'ensemble des stratégies de chacun des joueurs,
iii) les vecteurs gains associés à toutes les stratégies possibles de chacun des joueurs.

Ainsi la matrice ci-dessus fournit la représentation sous forme normale du jeu mentionné.

À la forme normale d'un jeu est associée, pour chaque joueur, sa *fonction de gain*. C'est une fonction qui, à tout choix de stratégie de tous les joueurs, associe le gain obtenu par le joueur en question.

Par exemple la fonction de gain du joueur 1 ci-dessus et donnée par le premier élément de chaque couple de la matrice : $f(0,0) = -2$ (c'est-à-dire f(stratégie de 1, stratégie de 2) $= -2$), $f(0,1) = 0$, $f(1,0) = -3$, $f(1,1) = -1$. Cette représentation des résultats du jeu peut aussi bien être associée à des coûts qu'à des gains.

Bien que parfaitement adéquate pour l'étude des jeux dont l'issue est directement mesurable (en dollars par exemple), la notion de fonction de gain se prête mal à certaines généralisations essentielles. Par exemple, la valeur qu'un travailleur attribue à une pause-café de ½ heure peut non seulement différer de sa valeur monétaire (par rapport au salaire horaire) mais encore varier considérablement selon qu'elle peut être prise vers le début, le milieu ou près de la fin de la période de travail. Ainsi, à la notion de fonction de gain, on substitue celle de « préférences », bien connue des économistes, que l'on peut représenter par une fonction d'utilité. Pour Von Newmann & Morgenstern [1947] une telle fonction d'utilité est une fonction linéaire de son argument, définie à une transformation affine près. Nous verrons ci-dessous comment ces propriétés sont précisées dans les célèbres axiomes de Nash.

Le choix d'une stratégie par chacun des joueurs définit un vecteur de stratégies ou multistratégie. On dit alors qu'une multistratégie est un *équilibre de Nash* (ou de Cournot-Nash) du jeu sous forme normale lorsque aucun des joueurs n'a avantage à modifier sa stratégie s'il est le seul à la faire.

Par exemple, la multistratégie (0,0) est un équilibre de Nash du jeu considéré ci-dessus.

Un *optimum de Pareto* d'un jeu à n joueurs est un optimum vectoriel de la fonction vectorielle des utilités de tous les joueurs. C'est un point p_o de l'espace R^n des n utilités des joueurs, tel qu'aucun autre vecteur d'utilités n'a toutes ses composantes supérieures ou égales à celles de p_o, avec inégalité stricte pour une composante au moins.

Dans le jeu précédent, le vecteur de gains $(-1,-1)$ est un optimum de Pareto. Ce n'est pas un équilibre de Nash, car les stratégies associées à ce gain sont (1,1). Or si le joueur 2 ne modifie pas sa stratégie, le joueur 1 a avantage à jouer 0.

Le fait que l'équilibre de Nash ne soit pas, en général, un optimum de Pareto ouvre la voie à la recherche, par voie de négociations, d'un tel optimum, qui ne pourra être obtenu que si les joueurs coopèrent en acceptant de jouer chacun la stratégie qui correspond à cet équilibre coopératif.

En général, l'équilibre coopératif n'est pas unique, phénomène dont la problématique de la négociation est issue. C'est à J. Nash [1950] que l'on doit la première tentative de régler ce prolème par une approche axiomatique spécifiant un certain nombre de conditions que la solution négociée devra satisfaire (dont un certain degré d'équité).

Avant de préciser cette notion, montrons tout d'abord comment les utilités des joueurs permettent de définir un sous-ensemble continu de l'espace R^n des utilités de n joueurs. Nous supposerons $n = 2$ pour simplifier et u (resp. v) désignera l'utilité du joueur 1 (resp. 2). Plaçons-nous dans le cas le plus simple où, comme dans le jeu précédent, le choix de chacun des joueurs est limité à deux alternatives : a_1, a_2 et introduisons la notion de *stratégie mixte*.

Si l'on convient d'appeler *stratégie pure* une stratégie pour laquelle le choix des actions a_1 ou a_2 s'effectue de manière exclusive, on peut, par opposition, considérer une stratégie pour laquelle le joueur 1 (resp. le joueur 2) choisit l'action a_1 avec une probabilité p (resp. q) et l'action a_2 avec une probabilité $1-p$ (resp. $1-q$). Ainsi, une stratégie mixte pour le joueur 1 est de la forme: $s_1(p) = pa_1 + (1-p)a_2$.

Si l'on désigne par $u(a_i, a_j) = u_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$ l'utilité du joueur 1 associée au couple (a_i, a_j) de stratégies pures, on pourra calculer *l'utilité espérée* du joueur 1 associée aux stratégies mixtes $s_1(p) = pa_1 + (1-p)a_2$ et $s_2(q) = qa_1 + (1-q)a_2$, en utilisant les propriétés de linéarité de la fonction u. En effet, sous l'hypothèse probabiliste, le couple d'actions (a_i, a_j) est choisi par les deux joueurs avec une probabilité

$$\begin{array}{ll} pq & \text{si } i=j=1 \\ p(1-q) & \text{si } i=1, j=2 \\ (1-p)q & \text{si } i=2, j=1 \\ (1-p)\ (1-q) & \text{si } i=2, j=2 \end{array}$$

d'où:

$$\begin{aligned} u(s_1(p), s_2(q)) &= u(pq(a_1, a_1) + p(1-q)(a_1, a_2) + (1-p)q(a_2, a_1) \\ &\quad + (1-p)(1-q)(a_2, a_2)) \\ &= pqu(a_1, a_1) + p(1-q)u(a_1, a_2) + \\ &\quad (1-p)q\ u(a_2, a_1) + (1-p)(1-q)u(a_2, a_2) \\ &= pqu_{11} + p(1-q)u_{12} + (1-p)qu_{21} + \\ &\quad (1-p)(1-q)u_{22} \end{aligned}$$

L'utilité espérée du joueur 2 s'exprime de manière analogue. Il est clair ici que, pour p et q variant entre 0 et 1, l'ensemble initial des actions possibles $\{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$ a été prolongé au carré de sommets (a_i, a_j), $1 \leq i, j \leq 2$. Aussi, l'application vectorielle $u \times v$ a maintenant pour image le carré de sommets (u_{ij}, v_{ij}), $1 \leq i, j \leq 2$.

La notion de stratégie mixte permet donc de supposer que, dans le cas d'un jeu à n joueurs, les utilités des joueurs déterminent un sous-ensemble convexe, fermé et borné de R^n.

Pour simplifier l'écriture, on écrira (u, v) pour $(u(s_1, s_2), v(s_1, s_2))$ et u^* pour $u(s_1^*, s_2^*)$, etc.

La *solution négociée* de Nash a été introduite pour résoudre le problème de la négociation d'un duopole. Bien qu'elle se généralise facilement au cas d'un jeu à n joueurs, nous supposerons encore $n = 2$ avec les notations précédentes. On suppose qu'il existe un équilibre de Cournot-Nash et soit (u_o, v_o) le vecteur d'utilités associé à cet équilibre. Pour toute solution réalisable (u, v), le joueur 1 (resp. 2) réalise un «gain» d'utilité $u - u_o$ (resp. $v - v_o$).

Voici les axiomes que la solution négociée (u^*, v^*) devra satisfaire:

Axiome 1 (Invariance affine)

Si u' (resp. v') est dépendante de u (resp. de v) par une transformation affine ρ_1 (resp. ρ_2) telle que $\rho_1(u_o) = u'_o$, $\rho_2(v_o) = (v'_o)$ alors la solution négociée (u'^*, v'^*) vérifie $\rho_1(u^*) = u'^*$, $\rho_2(v^*) = v'^*$.

Axiome 2 (Optimalité parétienne)

i) $u^* \geq u_o$, $v^* \geq v_o$

ii) (u^*, v^*) est une solution accessible

iii) (u^*, v^*) est un optimum de Pareto de la fonction vectorielle (u, v)

Axiome 3 (Indépendante par rapport aux alternatives non pertinentes)

Supposons qu'il existe un second jeu ayant même équilibre de Cournot-Nash que le premier et admettant pour ensemble de solutions au moins toutes les solutions admissibles du premier jeu. Si la solution négociée du second jeu est admissible pour le premier, elle est nécessairement solution négociée du premier jeu.

Axiome 4 (Symétrie)

Si

i) $u_o = v_o$

ii) (v, u) est admissible chaque fois que (u, v) l'est,

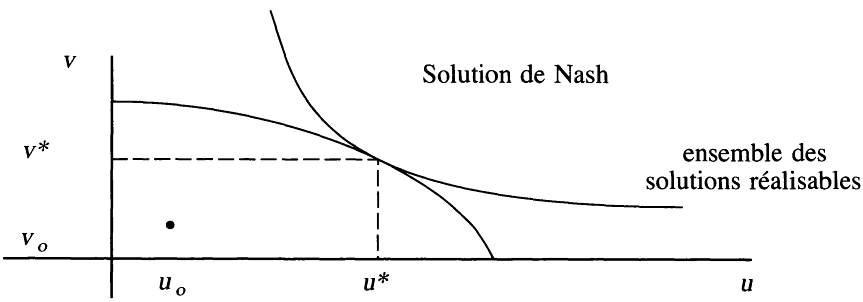
alors $u^* = v^*$

On montre alors le théorème de Nash.

Théorème de Nash

Soit (u^*, v^*) la solution du problème : Max $(u - u_o)(v - v_o)$, on a :

1. (u^*, v^*) vérifie les quatre axiomes de solution négociée
2. (u^*, v^*) est le seul point vérifiant ces quatre axiomes.



4. Le dilemme du prisonnier et les jeux répétés à information parfaite

4.1 *Le dilemme du prisonnier classique*

Le dilemme du prisonnier est un jeu matriciel très simple, analogue à celui que nous avons présenté ci-dessus. Rappelons-le brièvement.

Deux suspects sont accusés d'avoir commis un vol. Chacun deux est informé séparément que

— s'il passe aux aveux, il écope d'une peine de 5 ans ou de 6 mois suivant que son co-accusé avoue ou pas.

— si aucun d'eux n'avoue, leur peine sera de 1 an chacun.

Les peines prévues peuvent être représentées par la matrice

Prisonnier 1	n'avoue pas	(1,1)	(10,1/2)
	avoue	(1/2,10)	(5,5)
		n'avoue pas	avoue
		Prisonnier 2	

Du point de vue de la théorie des jeux, il est équivalent d'étudier une matrice de gains (ou d'utilités), que l'on pourra par exemple représenter sous la forme

Prisonnier 1	n'avoue pas	(2,2)	(0,3)
	avoue	(3,0)	(1,1)
		n'avoue pas	avoue
		Prisonnier 2	

En l'absence de consultation entre les joueurs et dans le cas de stratégies pures, le seul équilibre de Nash consiste pour chacun des joueurs à passer aux aveux. C'est en effet la seule stratégie qu'aucun des prisonniers n'a intérêt à modifier si l'autre ne modifie pas la sienne. L'issue (1,1) associée à cette stratégie n'est optimale pour aucun des joueurs.

4.2 *Principales extensions : jeux répétés et jeux séquentiels, stratégies avec mémoire*

Il est clair que si les joueurs pouvaient se concerter, ils conviendraient tous deux de rejeter les accusations portées contre eux pour accéder à la solution coopérative (2,2). Du point de vue de la théorie, on veut faire apparaître cette solution coopérative comme l'issue naturelle (*i.e.* un équilibre de Cournot-Nash) d'un jeu dont on aurait sensiblement modifié les règles. Une façon de procéder consiste à répéter le jeu ; l'examen par chaque joueur, des issues successives du jeu venant alors se substituer à la négociation. C'est l'approche suivie notamment par Aumann [1978], Brams, Davis et Straffin [1979], Grofman et Pool [1977], Kurz [1978], ainsi que Smale [1980] dont nous présentons brièvement l'essentiel.

Oublions la formulation originale du jeu pour n'en conserver que la structure mathématique représentée par la matrice d'utilités ci-dessus. Une « bonne stratégie » consistera, pour chaque joueur, à jouer à chaque itération en tenant compte des moyennes des issues antérieures. Ainsi, tant que ces moyennes restent voisines l'une de l'autre, chacun choisira, sans consultation avec son partenaire, de jouer de manière « coopérative » (ne pas avouer). Si au contraire la différence entre ces moyennes s'élargit, le joueur pénalisé réalise que son partenaire a opté pour la « non-coopération », attitude qu'il choisit à son tour, forçant ainsi la solution vers l'équilibre de Nash du jeu statique. L'intérêt de cette approche réside dans le fait que, sous forme de jeu répété, le dilemme du prisonnier est un *nouveau jeu*, que l'on peut voir comme un jeu dynamique. Sous cette forme, le point (2,2) correspond à un équilibre de Nash pour une paire de stratégies alliant « coopération » et « non-coopération », suivant le comportement des moyennes des gains. En outre, cet équilibre est une solution de Nash, elle est optimale et globalement stable (quels que soient les comportements initiaux des joueurs, l'itération va conduire à cette solution).

L'intérêt de l'étude d'un jeu répété est double, ainsi que le montre l'exemple précédent. D'une part, la notion de *stratégie avec mémoire* dans un jeu non coopératif (répété) se substitue (et joue un rôle analogue) à celle de *négociation* dans un jeu coopératif. C'est précisément pour cette raison que Aumann (1978) parle de « négociation informelle » dans le contexte des jeux répétés.

D'autre part, la solution négociée de Nash (optimum de Pareto) du jeu unique devient, dans le jeu répété, un équilibre de Cournot-Nash de ce jeu.

La critique la plus sérieuse qu'on a pu faire à cette approche réside dans le fait que la « mémoire » des joueurs est limitée à l'observation des gains (et non des stratégies) dont on ne mesure que la moyenne sur les parties jouées antérieurement. Cette procédure de mémorisation du passé est d'un intérêt limité lorsque le jeu est répété indéfiniment. En effet, il devient impossible, a posteriori de distinguer entre une paire de joueurs qui ont tous deux triché un grand nombre (fini) de fois et une paire de joueurs qui ont constamment joué la stratégie coopérative.

Cette critique vaut encore pour les autres modes de comptabilisation des gains antérieurs introduits dans Smale (1980). Lorsque la solution du jeu répété n'est pas unique, il devient essentiel de préciser, d'une part ce que l'on peut considérer comme une *issue acceptable* du jeu et, d'autre part, les moyens d'assurer son implantation. Par exemple, pour Smale, c'est la stationnarité de l'issue (2,2) du jeu dynamique qui la rend acceptable. Le fait qu'elle soit globalement stable permet d'assurer son implantation. Dans la démarche suivie par Haurie et Tolwinsky (1984) dans le cadre d'un jeu séquentiel[1], la notion de menace

1. La notion de jeu séquentiel est sensiblement différente de celle de jeu répété, en ce sens que, à chaque étape, l'environnement est modifié par l'issue du jeu. Ses analogies avec les jeux répétés sont toutefois suffisantes pour que l'on ne s'étende pas ici sur ce qui l'en distingue.

est introduite conjointement avec celle de stratégie avec mémoire. Les joueurs jouent chaque partie en fonction, non seulement des gains passés, mais aussi de toutes les décisions antérieures de chacun d'eux. Les auteurs énoncent alors un certain nombre de règles raisonnables permettant de définir une nouvelle solution coopérative telle que, chacun des joueurs faisant face, à chaque période, à une menace de représailles pour les périodes futures, aucun d'eux n'a intérêt à dévier de la stratégie correspondant à cette solution. Même si le choix de cette solution peut paraître arbitraire, comme précédemment, elle apparaît comme un équilibre de Cournot-Nash du jeu séquentiel.

Dans leur analyse des jeux séquentiel sur horizon infini, Haurie et Tolwinsky (1985) comptabilisent les gains en en faisant la somme. Les séries obtenues sont alors comparées suivant des critères de dominance et de dominance faible. D'où les notions d'équilibre faible et d'équilibre faible parfait (voir ci-dessous pour une définition précise d'équilibre parfait dans un jeu répété). Les auteurs précisent alors les conditions (stratégies avec menaces) permettant d'implanter, suivant le cas considéré, soit un équilibre faible, soit un équilibre faible parfait.

D'un autre point de vue, la négociation peut être envisagée comme une suite de propositions « à prendre ou à laisser » dans un jeu répété où un joueur A propose à un joueur B une certaine portion de tarte. Dans une forme de ce jeu, le joueur B accepte ou refuse et le joueur A reformule une proposition, etc. Dans une autre forme, le refus de B est immédiatement suivi d'une contre-proposition que A peut accepter ou refuser, etc. Dans les deux cas, on peut décider que le jeu ne s'arrête que s'il y a accord, ou bien que le jeu n'est répété qu'un nombre déterminé de fois (la tarte n'étant pas distribuée en cas de désaccord final).

L'intérêt des joueurs à s'entendre le plus rapidement possible est stimulé par un certain coût associé à l'écoulement du temps. Ce coût peut être représenté par un *facteur d'actualisation* δ_i^t, $i = A, B$ $(0 < \delta_i^t < 1)$. Ainsi $1 = \delta_i^o > \delta_i^1 > \delta_i^2 > \ldots$ et la même portion x de la tarte a une valeur actualisée $\delta_i^t x$ d'autant plus petite que la date t de l'accord est éloignée.

Une stratégie pour chacun des joueurs spécifie sa proposition ou réponse pour chaque valeur de x $(0 \leq x \leq 1)$ en fonction de l'historique du jeu. Il est assez facile de voir que *toute répartition constitue un équilibre de Nash.*

Ainsi l'extension de la notion de jeu simple à celle de jeu répété ne permet pas toujours de garantir l'unicité de l'équilibre. Dans une telle situation, deux attitudes sont possibles :

1. Introduire de manière exogène une certaine notion d'équité et définir un processus extérieur au jeu susceptible d'imposer aux joueurs le (ou l'un des) point(s) d'équilibre arbitrairement choisi.

2. Définir une notion d'équilibre mieux adaptée au jeu considéré.

Remarquons que ces deux attitudes ne sont pas incompatibles. Il est tout à fait possible, ainsi que nous le verrons, que même en restreignant la notion d'équilibre, l'unicité de celui-ci ne soit pas garantie, d'où la nécessité, dans certains cas, de trancher de manière exogène.

C'est le but de *l'approche axiomatique* que de formuler un certain nombre d'axiomes que la solution d'un jeu doit satisfaire, de telle manière que

i) les axiomes soient « naturels »,
ii) ils permettent de dégager une solution,
iii) cette solution soit unique.

La question de savoir si, pour un jeu donné, on opte pour la voie de la médiation ou la voie axiomatique est toujours plus ou moins subjective. Il arrive fréquemment que, après que la seule issue apparente ait été de s'orienter dans la voie de la médiation, des formulations plus fines des axiomes aiguillent les recherches sur la seconde voie.

Dans les jeux indéfiniment répétés, à chaque étape, on fait face au jeu initial répété, on peut donc dire que c'est un sous-jeu du jeu commençant à l'une quelconque des étapes antérieures, en particulier du jeu commençant à l'étape 0. On pourra donc distinguer, parmi les stratégies conduisant à un équilibre de Nash, celles qui induisent sur tout sous-jeu des stratégies conduisant à un équilibre de Nash de ce sous-jeu. Cette distinction permet de dégager une nouvelle notion d'équilibre : on dit qu'un équilibre de jeu répété est *parfait* si c'est un équilibre de Nash tel que toute stratégie associée à cet équilibre induise sur tout sous-jeu des stratégies conduisant à un équilibre de Nash de ce sous-jeu.

Dans le modèle de Rubinstein [1978] où propositions et contre-propositions alternent on a les résultats suivants :

— Il existe une unique partition de la tarte qui peut être soutenue comme un équilibre parfait.

— Pour cet équilibre, l'accord est obtenu immédiatement : le joueur A reçoit $(1 - \delta_B) / (1 - \delta_A \delta_B)$ et le joueur B reçoit $\delta_B (1 - \delta_A) / (1 - \delta_A \delta_B)$.

— La stratégie du joueur A consiste à proposer cette répartition et celle du joueur B à n'accepter une offre que si elle est supérieure ou égale à cette répartition.

Examinons cette répartition :

$$\frac{1 - \delta_B}{1 - \delta_A \delta_B} + \frac{\delta_B (1 - \delta_A)}{1 - \delta_A \delta_B} = 1$$

Si $\delta_A = \delta_B = \delta$, la part du joueur A devient : $\frac{1}{1 + \delta}$ et celle du joueur B : $\frac{\delta}{1 + \delta}$. Par exemple, pour $\delta = 1/2$, les parts des joueurs A et B sont de 2/3 et 1/3 respectivement.

Ainsi, si les deux joueurs ont le même facteur d'actualisation, le joueur qui émet la première proposition est toujours avantagé. On peut expliquer ce résultat par le fait que son partenaire doive attendre au moins une période avant de pouvoir formuler une contre-proposition.

Remarques

1. Si l'on définit les fonctions $f(x, t) = x\delta_A^t$ pour le joueur A et $g(x, t) = (1-x)\delta_B^t$ pour le joueur B, ces fonctions déterminent des préférences intertemporelles pour chacun des deux joueurs. Ainsi, par exemple, le joueur A sera indifférent entre x (au temps $t = 0$) et $y\delta_A$ (au temps $t = 1$) si et seulement si $x = y\delta_A$ *i.e.* $y = x / \delta_A$. Ces préférences vérifient les six *axiomes des préférences intertemporelles* de Rubinstein [1982], qui sont l'adaptation intertemporelle des axiomes de Nash. Les préférences intertemporelles du joueur i sont représentées par une relation $\underline{\propto}_i$ (avec $x \sim_i y$ si et seulement si $x \underline{\propto}_i y$ et $y \underline{\propto}_i x$ ainsi que $x \underline{\propto}_i y$ si et seulement si $x \underline{\propto}_i y$ et « non $y \underline{\propto}_i x$») définie sur l'ensemble $[0,1]$ x $N = S$ x N, complète, réflexive et transitive sur cet ensemble (où N est l'ensemble des entiers naturels 0, 1, 2...):

$a1$: La tarte est désirable: si $x < y$ alors $(x, t) \propto_i (y, t)$.

$a2$: Le temps a de la valeur: si $x > 0$ et $t_1 < t_2$ alors $(x, t_2) \propto_i (x, t_1)$.

$a3$: Continuité: le graphe de $\underline{\propto}_i$ est fermé dans $(S \; x \; N)x(S \; x \; N)$.

$a4$: Stationnarité: $(x, t) \propto_i (y, t+1)$ si et seulement si $(x,0) \propto_i (y,1)$

$a5$: Propriété de compensation croissante:
si $(x,0) \sim_i (x+\epsilon(x), 1)$ alors ϵ est une fonction croissante de x.

$a6$: Pour tout $x \in S$, il existe un $d_i(x) \in S$ tel que $(x,1) \sim_i (d_i(x), 0)$.

2. La valeur de δ caractérise le niveau de patience d'un joueur. Plus δ est petit, plus petite est sa patience (et plus grande son impatience) car $y = x/\delta$ est d'autant plus grand que $\delta < 1$ est petit. D'autant devra donc croître la portion y de la période suivante pour qu'elle lui procure la même satisfaction que la portion x de la période présente. Aussi, plus un joueur est impatient, plus sa portion de tarte (à l'équilibre) sera réduite. En effet,

$$F(\delta) = \frac{1-\delta_B}{1-\delta\delta_B} \text{ (pour le joueur } A\text{)}$$

est une fonction croissante de δ (δ_B fixé), donc plus δ est grand (et le joueur patient) plus grande sa part de la tarte. La même conclusion peut être tirée de la fonction

$$G(\delta) = \frac{\delta(1-\delta_A)}{1-\delta\delta_A} \text{ (pour } B\text{) avec } \delta_A \text{ fixé.}$$

4.3 *L'influence d'une alternative*

Traditionnellement, on introduit la règle dite de « partage de la différence » lorsque l'un des joueurs a la possibilité de quitter le jeu (ce qui laisse son opposant avec un gain nul) et d'opter pour une solution alternative (comme, par exemple pour un travailleur, d'accepter un travail mal rémunéré dans une autre entreprise ou de s'en remettre à l'assurance-chômage) ; d'après cette règle on convient d'ajouter au gain d'équilibre de chacun des joueurs, la moitié de la différence entre la valeur des gains d'équilibre en l'absence d'alternative et la valeur de l'alternative.

Cette situation est examinée dans Sutton [1985] où le modèle précédent est modifié comme suit :

— le facteur d'escompte δ est identique pour les deux joueurs.

— après chaque refus d'une proposition, un événement aléatoire survient avec une probabilité p. Si l'événement a lieu, A et B peuvent quitter le jeu et recevoir s_A et s_B respectivement.

Ce jeu a également une solution unique, atteinte immédiatement. Il n'est pas utile de rappeler ici quels sont exactement les parts des joueurs. Cependant, pour $s_A = s_B = 0$, on retrouve les solutions de Rubinstein mentionnées ci-dessus. De plus, lorsque $p = 1$ et $s_A = 0$, le joueur B a une option permanente et dans ce cas la part de A est

$$x = \text{Min}\left\{ \frac{1}{1+\delta}, 1 - s_B \right\}$$

et, contrairement à la règle du « partage de la différence », ceci n'affecte l'issue du jeu que lorsque $s_B > \dfrac{\delta}{1+\delta}$ (et dans ce cas la répartition $(1 - s_B, s_B)$ prévaut). Ceci s'interprète de la façon suivante : si l'option de B est supérieure à la part qu'il aurait pu attendre en l'absence de celle-ci, il faut que A lui offre au moins la valeur de cette option pour que B accepte de participer au jeu.

Remarque

Si l'on modifie quelque peu la règle du jeu en précisant que, à chaque étape, si l'événement aléatoire survient, le jeu s'arrête et les joueurs reçoivent respectivement s_A et s_B (convenablement escomptés) la part du joueur A devient :

$$x = \frac{1 - ps_B - (1-p)\delta + p(1-p)\delta s_A}{1 - (1-p)^2\delta^2}$$

Si de plus, propositions et contre-propositions se succèdent instantanément, on pose alors
$\delta^{\triangle t}$ pour le facteur d'escompte
$p^{\triangle t}$ pour la probabilité que l'événement aléatoire survienne dans la période et l'on obtient, par passage à la limite (et en posant $w = \dfrac{1}{1 - p/\ln\delta}$) :

— Dans le modèle de Rubinstein, $x = 1/2$ (l'avantage d'ouvrir les négociations s'estompe, ce qui vient confirmer l'interprétation que nous avons donnée plus haut à l'existence de cette disymétrie).

— Dans le modèle ci-dessus :

$$x = \frac{w}{2} + (1 - w)\{s_A + \frac{1}{2}(1 - s_A - s_B)\}$$

Lorsque $w \to 1$, $x \to 1/2$ et on retombe sur la solution instantanée de Rubinstein lorsque $\frac{p}{\ln\delta} \to 0$)

— Lorsque $w \to 0$, alors $x \to s_A + 1/2\,(1 - s_A - s_B)$ et, ainsi que le font remarquer Binmore, Rubinstein et Wolinsky [1984] on tent a retrouver la « règle du partage de la différence » lorsque, pour deux joueurs extrêmement patients (δ assez proche de l'unité) une intervention exogène impose la fin des négociations.

En résumé :

1. S'il n'y a pas d'intervention exogène, la « menace » de quitter la négociation n'est pas crédible lorsque les solutions alternatives sont inférieures à l'issue naturelle du jeu en l'absence d'alternatives.
2. Si une intervention extérieure peut en tout temps forcer des joueurs extrêmement patients à rompre les négociations, l'issue du jeu a tendance à se rapprocher de la règle du « partage de la différence ».

Dans les modèles précédents, chacun des joueurs connaît le système de préférences de l'autre (ou son facteur d'escompte ou les coûts encourus). De tels modèles sont dits *à information parfaite*. C'est pourquoi, bien que, comme nous venons de le voir, ils apportent un éclairage intéressant, ils sont encore loin de fournir une description satisfaisante des phénomènes réels associés à la négociation (collective).

5. Jeux répétés à information imparfaite

Récemment, une littérature abondante témoigne d'un intérêt renouvelé pour ce problème. Nous nous intéresserons plus spécifiquement aux modèles de négociation avec *information imparfaite* visant à produire une théorie rationnelle du conflit dans la négociation. Dans ces modèles, un agent s'identifie comme « fort » s'il est capable de formuler des propositions (ou des réponses à des propositions) qu'il ne serait pas profitable à un joueur plus « faible » de formuler. Afin d'établir ainsi sa « force », le joueur peut devoir se montrer intraitable pendant un certain temps afin d'obtenir un arrangement qui, de son point de vue, est plus satisfaisant qu'un arrangement obtenu plus rapidement par un joueur plus « faible » négociant à sa place.

Les premiers travaux dans cette direction sont dus à Fudenberg et Tirole [1983], Sobel et Takahashi [1983] et Crampton [1984]. Une approche analogue, mais plus spécifiquement orientée dans la voie de l'arbitrage (ou l'implantation par un médiateur) a été suivie, parmi d'autres (et pour ne citer que le plus important), par Myerson [1982, 1983, 1984a, 1984b, 1986]. Nous y reviendrons.

La notion d'équilibre parfait ou d'équilibre séquentiel est alors remplacée par celle d'équilibre Bayesien parfait dont nous rappelons ci-dessous la définition, qui prévaut dans les jeux à information imparfaite répétés).

Les modèles proposés ont en commun les caractéristiques suivantes :

- un monopole bilatéral est représenté par un acheteur et un vendeur qui négocient l'échange,
- d'un bien indivisible,
- de valeur a pour l'acheteur ($0 \leq a \leq 1$),
- de valeur $v \geq 0$ pour le vendeur,
- l'acheteur connaît a et v,
- le vendeur connaît v mais ignore a,
- le vendeur commence la négociation avec certaines hypothèses sur a,
- à chaque période t, le vendeur annonce son prix p_t, $t = 1, 2, \ldots$ (que l'acheteur accepte ou refuse) et révise ses hypothèses sur a,
- chaque agent escompte le futur avec un facteur δ connu de chacun d'eux.

Remarquons que si le vendeur connaissait a, il pourrait aisément accaparer tout le surplus a-v. En règle générale, l'absence d'informations est la source d'inefficacité. La notion d'équilibre adaptée à ce type de jeu est celle *d'équilibre bayesien parfait*: dans tout sous-jeu aucun des joueurs ne peut accroître son gain en modifiant sa stratégie, compte tenu des stratégies des autres joueurs et des informations dont il dispose (la définition formelle de jeu bayesien n'est pas absolument nécessaire ici et n'interviendra que dans le contexte des travaux de Myerson ci-dessous).

Dans Fudenberg et Tirole [1983], les auteurs examinent la situation simplifiée à deux périodes suivante :

- a (resp. b) est la valeur que l'acheteur faible (resp. fort) attribue au bien. Au début de la négociation, le vendeur estime ces deux éventualités équiprobables.

On suppose $v < a$ (sinon le vendeur propose $p = b$)

Si $(b + v)/2 < a$, le vendeur fixe son prix $p \in [a, b]$. Ainsi, si $p = a$ il réalise un gain certain $a - v$ et, si $p > a$, il a une espérance de gain $(p - v)/2$. Cette espérance est maximale pour $p = b$ et vaut alors $(b - v)/2$. Mais $(b - v)/2 < a - v$ par hypothèse. Il fixera donc $p = a$. Un tel vendeur est dit *faible*. Si $(b + v)/2 > a$, on obtient de manière analogue que $p = b$ maximise son espérance de gain. On a alors affaire à un vendeur *fort*.

Bien entendu, la distinction entre vendeur faible et fort dépend fortement des hypothèses a priori qu'il a sur le type d'acheteur auquel il fait face (ici on a estimé comme équiprobables ces deux types d'acheteurs).

Dans la seconde période, les stratégies d'équilibre de l'acheteur sont les mêmes que dans la première période, il accepte toute offre dont le prix est inférieur ou égal au sien.

Pour un tel jeu et avec la notion d'équilibre qui s'y rattache, les auteurs montrent encore *l'existence et l'unicité* de l'équilibre bayesien parfait.

Quelques conclusions de cette étude :

1. L'évaluation a priori que le vendeur fait du type d'acheteur auquel il fait face joue un rôle sur la stratégie du vendeur. Ainsi, s'il s'attend (avec une forte probabilité) à affronter un acheteur faible, il va jouer faible ($p_o = a$) à la première période. Si, au contraire, il est à peu près convaincu d'être en présence d'un acheteur fort, il va jouer fort ($p_o = c = (1 - \delta)\, b + \delta a$) à la première période (où c est le prix maximum qu'un acheteur fort est prêt à payer à la première période lorsqu'il s'attend à ce que le prix de seconde période soit $p_1 = a$).
2. L'accord n'intervient pas nécessairement à la première période, même dans le cas où c'est toujours possible (l'allongement de la durée de la négociation introduit un certain degré d'inefficacité).
3. Suivant les cas, il peut arriver que le vendeur obtienne un meilleur gain (escompté) lorsqu'on ajoute une période.
4. Lorsque le vendeur est fort, il est possible qu'aucun accord n'intervienne.
5. L'impatience d'un acheteur (δ petit) peut être avantageuse pour lui lorsqu'il fait face à un vendeur fort (alors qu'en général, comme nous l'avons vu dans le modèle de Rubinstein une telle attitude n'est pas profitable à celui qui l'adopte).
6. Si l'on symétrise le modèle en précisant que l'acheteur ne connaît pas la valeur v du vendeur, celui-ci peut proposer un prix de seconde période supérieur à son offre de première période (que l'acheteur a pu refuser, croyant avoir affaire à un vendeur faible qui baissera son prix en seconde période).
7. D'une manière générale, il n'existe pas de règle quant aux effets des variations des paramètres (faible, fort, préférences intertemporelles ou facteur d'escompte). Il convient, dans chaque cas, d'examiner ces effets dans le cadre du jeu considéré.

Le modèle de Sobel et Takahashi est analogue à celui de Fundenberg et Tirole, à ceci près que :
— $v = 0$,
— a est une variable continue sur $[0,1]$,

— Une distribution de probabilité $F(a)$ connue des deux agents représente la probabilité que la valeur attribuée par l'acheteur soit $\leq a$,

— l'analyse s'effectue en deux temps :
i) On considère un nombre fini T de périodes,
ii) On fait $T \to \infty$.

Les résultats de Sobel et Takahashi vont dans le même sens que ceux de Fudenberg et Tirole.

Quelques difficultés :

1. Lorsque l'intervalle de temps entre les périodes tend vers 0, le taux de variation du prix tend vers $-\infty$; ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ donné la durée des négociations peut être rendue inférieure à ε avec une probabilité $1 - \varepsilon$. Cette anomalie n'est pas simplement due au fait que l'un seulement des agents fait des propositions. En effet, elle subsiste lorsque l'on permet aux agents de faire des propositions en alternance.
2. On peut alors se demander si la cause de cette anomalie ne réside pas dans le fait que seul l'un des agents est en situation d'information imparfaite. Ce problème, discuté par Gul et Sonnenshein [1985], n'a pas reçu de solution pour l'instant.
3. Lorsque les deux joueurs ont une information imparfaite, l'approche axiomatique produit des équilibres multiples. On peut alors tenter de raffiner encore cette approche jusqu'à l'obtention d'un équilibre unique ou alors, jugeant que l'adjonction de nouvelles hypothèses restreindrait la portée du jeu, étudier et préciser la notion d'arbitrage.

6. Négociation, médiation et arbitrage

6.1 *Les bases de la théorie*

Ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, lorsque les deux joueurs ont une information imparfaite, il y a multiplicité des équilibres. La fonction d'un médiateur (ou d'un mécanisme) externe au jeu sera alors de choisir, dans cet ensemble, une issue du jeu ne désavantageant pas « trop » l'un des joueurs. Les travaux de Myerson déjà cités, que nous allons tenter de résumer portent essentiellement sur la caractérisation de tels mécanismes.

La notion de « point de focalisation », introduite par Schelling (1960) est au centre de ce problème. Un tel point est choisi dans l'ensemble des issues optimales réalisables du jeu. Schelling appelle alors *effet de focalisation* tout ce qui peut attirer l'attention des joueurs sur une issue particulière du jeu de manière à inciter les joueurs à implanter ce point pour équilibre.

Rappelons brièvement les sept catégories de critères susceptibles de déterminer un point de focalisation signalés par Meyerson (1984a) avant de nous concentrer sur ceux qui concernent plus spécifiquement la théorie de la négociation :

1. Les facteurs environnementaux (ou les précédents historiques).
2. Les propriétés stratégiques (simplicité, stationnarité).
3. La stabilité structurelle (*i.e.* le point est un point d'accumulation d'équilibres de jeux obtenus par perturbation du jeu considéré).
4. L'intervention d'un arbitre extérieur au jeu.
5. Des critères objectifs *d'équilibre* et *d'optimalité* (qui pourraient servir de fondement au choix d'un arbitre impartial).
6. L'un des joueurs, appelé pour cette raison *le principal*, peut avoir le pouvoir d'induire un point de focalisation au moyen d'une intervention antérieure au jeu proprement dit.
7. La négociation entre certains des joueurs (antérieure au jeu).

Le critère 7 permet de définir *la négociation* comme tout processus de communication, antérieur aux actions des joueurs, qui peut influer sur l'issue du jeu par la détermination d'un point de focalisation.

L'objet d'une théorie de la négociation sera donc de préciser les critères 4, 5 et 7 ci-dessus. En particulier, nous dirons qu'il y a une influence *effective* si l'équilibre choisi dépend des préférences de la personne concernée (arbitre, principal ou joueurs-négociateurs) sur l'ensemble des équilibres, de sorte que les équilibres qu'il préfère seront ceux qui auront la plus forte probabilité d'être implantés. Ainsi, dans le cas de la *négociation effective*, il faut s'attendre à ce qu'ils choisissent des stratégies conduisant à un équilibre optimal dans l'ensemble des équilibres réalisables. En outre, un équilibre de négociation effective doit aussi procurer à chaque joueur participant à la négociation une espérance de gain reflétant sa force relative ainsi que son habileté de négociateur.

En résumé, pour Meyerson, l'objectif fondamental de la théorie des jeux coopératifs est de développer une théorie formelle permettant de prédire l'issue des jeux (coopérativement) transformés pour lesquels les critères d'effet de focalisation fondés sur les préférences, soient effectifs.

6.2 *Subtilités et complications dans la sélection de l'équilibre*

Lorsque le principal peut choisir le point de focalisation, il va sélectionner celui qui lui procure l'espérance de gain la plus élevée, pourvu que son choix s'effectue sans échange d'information privée (par opposition à information publique, dont le sens sera précisé au sous-paragraphe 6.4 ci-dessous). Sinon, son optimum pourrait s'en trouver modifié, et cesser d'être un équilibre si son choix dépend de l'information reçue. Ceci révélerait alors indirectement l'information aux autres joueurs. Pour éviter ce type de situation, on exige que le choix du principal reflète un *compromis indiscernable* entre ses préférences possibles.

Une autre difficulté peut également surgir du fait que le principal ne puisse exercer son influence que sur un sous-ensemble de l'ensemble des joueurs (ou des diverses étapes du jeu). La notion de quasi-équilibre principal introduite par Myerson (1982) peut être utile pour traiter de ce cas. Nous ne considérerons pas ici ce type de situation, qui dépasse le cadre de ce résumé.

6.3 *La notion d'équité*

Intuitivement, l'hypothèse d'équité pour un jeu négocié peut s'énoncer comme suit: le résultat raisonnable de négociations effectives dans lesquelles tous les joueurs ont les mêmes possibilités de participation doit correspondre aux recommandations d'un arbitre impartial ayant la même information que l'information commune à tous les joueurs au cours des négociations.

Cette formulation établit une certaine équivalence entre les critères 5 et 7 des effets de focalisation.

6.4 *Les fondements d'une théorie de la coopération en environnement incertain*

C'est sur le modèle de jeu bayesien qu'est construite l'analyse des jeux à information imparfaite.

Un jeu bayesien à n joueurs consiste en la donnée, pour chaque joueur i de :

— l'ensemble T_i des types possibles de ce joueur,

— l'ensemble S_i de ses stratégies,

— Une fonction d'utilité de type Morgenstern-Von Neumann u_i définie sur l'ensemble produit de toutes les stratégies et de tous les types possibles:

$S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \times T_1 \times \ldots \times T_n$

— Une collection de fonctions de probabilités conditionnelles $p_i(\mid t_i)$ définies, pour tout $t_i \in T_i$, sur l'ensemble produit des types des autres joueurs:

$\hat{T}_i = T_1 \times \ldots \times T_{i-1} \times T_{i+1} \times \ldots \times T_n$

Ces données, pour $i = 1, \ldots, n$, constituent l'ensemble des informations publiques (*i.e.* communes à tous les joueurs).

Remarquons alors que, *du point de vue de l'information publique*, nous avons n fonctions d'utilité définies sur $S \times T = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \times T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_n$ et l'on peut dire que u_i est l'utilité *a priori* du joueur i (*i.e.* avant qu'il connaisse ou tienne compte de son type). On en déduira donc les notions d'équilibre et d'optimum a priori.

Du point de vue de chaque joueur connaissant son propre type, nous avons n fonction $\tilde{u}_i$ définies sur

$$S \times \hat{T}_i,\ i = 1 \ldots n$$

Nous dirons que $\widetilde{u}_i$ est l'utilité *intérimaire* du joueur i. L'optimum (ou l'équilibre) associé à la fonction $\widetilde{u}_i$ est appelé optimum (resp. équilibre) intérimaire.

Enfin, du point de vue d'un agent omniscient extérieur au jeu (ou d'un arbitre auquel les joueurs peuvent se confier sans crainte d'en subir une quelconque pénalisation) nous avons n fonctions d'utilité $\widetilde{\widetilde{u}}_i$ définies sur S. D'où une troisième notion, celle d'équilibre (et d'optimum) *a posteriori* (dans le sens où tous les types sont maintenant connus).

Les fonction $\widetilde{\widetilde{u}}_i$ et $\widetilde{u}_i$ se déduisent de u_i par restriction, *i.e.*

$\widetilde{u}_i = u_i \mid t_i$ $\qquad$ (t_i est fixé).

$\widetilde{\widetilde{u}}_i = u_i \mid (t_1, \ldots, t_n)$ $\qquad$ ($t = (t_1, \ldots, t_n)$ est fixé).

L'analyse d'un jeu bayesien par un arbitre extérieur portera sur la règle de décision, ou *mécanisme*, qui détermine les stratégies (plutôt que sur les stratégies elles-mêmes). Un tel mécanisme sera donc une règle quelconque permettant de déterminer de manière aléatoire les stratégies des joueurs en fonction de leur type. De façon plus précise, un mécanisme est une fonction μ qui, à tout $t = (t_1, \ldots, t_n) \in T$ associe une distribution de probabilité sur S. Ainsi, un arbitre peut espérer influer sur le choix des stratégies de joueurs d'un certain type, mais n'a aucune espèce d'influence sur leur type.

En l'absence d'information sur le type des joueurs, un tel arbitre ne peut percevoir l'impact de son influence que par la façon dont les joueurs modifient leur choix de stratégie.

Nous dirons qu'un mécanisme est *compatible avec l'incitation* (abrégé en *C.I.*) s'il pourrait être implanté par le biais d'un médiateur central ayant accès directement et confidentiellement à chacun des joueurs de façon telle que chacun d'eux soit incité à révéler honnêtement son type et à respecter les recommandations du médiateur lorsque tous les autres joueurs en font autant.

Il est à noter que les incitations à l'honnêteté (et à l'obéissance) peuvent être caractérisées mathématiquement par un certain nombre de contraintes (que nous retrouverons plus loin sous le nom de *contraintes d'incitation*). Étant donné un mécanisme *C.I.* μ et si le i^e joueur est de type t_i, pour tout $\hat{t}_i = (t_1, \ldots t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots t_n)$ on peut écrire, par abus de notation, $t = (\hat{t}_i, t_i)$ et, μ (t) étant une distribution de probabilité sur S, $\widetilde{u}_i(\mu(t), \hat{t}_i)$ est bien définie. Si $p_i(\hat{t}_i \mid t_i)$ désigne la probabilité que le joueur considéré attribue à l'événement: les autres joueurs sont de type $\hat{t}_i$, l'utilité associée à cet état vaudra donc:

$$p_i (\hat{t}_i \mid t_i) \; \widetilde{u}_i(\mu(t), \hat{t}_i)$$

Sommons sur tous les types possibles $\hat{t}_i \; \varepsilon \; \hat{T}_i$ des autres joueurs, on obtient ainsi l'espérance totale du joueur i de type t_i associée à μ:

$$U_i (\mu \mid t_i) = \sum_{\hat{t}_i \in \hat{T}_i} p_i(\hat{t}_i \mid t_i) \, \widetilde{u}_i (\mu(t), \hat{t}_i)$$

On en déduit immédiatement une notion d'optimalité (intérimaire) pour les mécanismes *C.I.* Plus précisément, nous dirons qu'un mécanisme compatible avec l'incitation μ est *optimal* (ou efficace) *au sens intérimaire* de Holmström et Myerson [1983] si et seulement si il n'existe pas de mécanisme *C.I.* ν tel que $U_i(\nu \mid t_i) \geq U_i(\mu \mid t_i)$ $i=1, \ldots, n$, $t_i \in T_i$, avec inégalité stricte dans un cas au moins.

Un mécanisme *C.I.* optimal au sens intérimaire peut engendrer des solutions qui ne sont pas optimales a posteriori, car les contraintes d'incitation régissant ces mécanismes de sélection ne sont pas nécessairement évidentes dès lors que tous les types sont révélés. Ainsi, lors de la négociation collective d'un contrat de travail, la contrainte d'incitation associée à l'absence de gain qu'un employeur peut attendre de la sous-estimation de sa capacité de payer se traduira par une probabilité positive de grève lorsque l'employeur sous-évalue sa capacité d'augmenter les salaires de ses employés.

Les contraintes d'incitation permettent ainsi d'expliquer pourquoi des systèmes sociaux apparemment bien conçus peuvent engendrer des résultats socialement inefficaces.

En général, l'hypothèse d'équité n'implique pas que, dans un jeu à information imparfaite, arbitrage et négociation soient complètement équivalentes. Il faut encore supposer que les joueurs négocient de manière *indiscernable* (*i.e.* sans rien révéler de leur information privée au cours des négociations). Un joueur pourra négocier de manière indiscernable dans la mesure où il est capable d'exprimer sa stratégie de négociation en termes de mécanismes contingents à certains types, plutôt qu'en termes d'actions ou de stratégies finales.

La notion de compromis interpersonnel doit être encore élargie à celle de *compromis intertype* dans les jeux à information imparfaite. Par exemple deux mécanismes *C.I.* optimaux au sens intérimaire peuvent se traduire par les mêmes gains pour tous les types du joueur 1 alors que l'un favorise le type A, et l'autre le type B du joueur 2. Si l'un de ces mécanismes est la solution (négociée, arbitrée ou choisie par le principal) de ce jeu coopératif, c'est qu'un certain compromis entre les deux types possibles du joueur 2 doit avoir été établi.

De même que tout compromis interpersonnel doit obéir à certains critères d'équité, les compromis intertypes doivent vérifier certaines règles *d'indiscernabilité*, sinon les autres joueurs pourraient tirer un certain nombre d'informations sur son type de la façon dont un joueur négocie et les utiliser à son détriment.

Ce problème de compromis intertype indiscernable est loin d'être résolu. Cependant, il est un cas où sa résolution est facile. C'est celui où le mécanisme est choisi par un principal qui dispose d'une *solution forte* au sens de Myerson [1983]. Une telle solution est un mécanisme *C.I.* qui est optimal par rapport à tous les types possibles du principal et qui, de plus, préserverait sa qualité de mécanisme *C.I.* si le type du principal était connu de tous. Une telle solution forte, si elle existe, est essentiellement unique.

Bien qu'une théorie générale du compromis intertype reste encore à faire, Myerson [1985] suggère qu'elle devrait avoir pour caractéristique de généraliser la règle suivant laquelle un principal disposant d'information privée doit préconiser sa solution forte, lorsqu'elle existe. On exigera en outre qu'elle soit optimale au sens intérimaire.

6.5 *Solutions négociées neutres*

L'élaboration de la notion de solution négociée neutre dans les jeux à information imparfaite (cf. Myerson [1983, 1985]) s'effectue de manière analogue à celle de solution négociée de Nash [1950] dans les jeux à deux joueurs (à information parfaite). On distingue deux types d'axiomes :

— les axiomes reliés à l'optimalité et à la symétrie de la solution négociée,

— l'axiome d'indépendance des solutions non pertinentes.

Ainsi, le concept de solution négociée neutre de Myerson est une généralisation de la notion de solution négociée de Nash et se distingue sensiblement de celle qu'en ont faite Harsanyi et Selten [1972].

Pour Myerson, la notion de solution négociée neutre doit être le plus petit concept de solution vérifiant les trois conditions suivantes :

1. S'il existe, pour chacun des deux joueurs, une solution forte attribuant à l'autre joueur le gain correspondant à l'équilibre non coopératif, telle que la distribution uniforme de ces deux solutions est un mécanisme compatible avec l'incitation qui est efficace au sens intérimaire, alors cette distribution uniforme doit être la solution négociée.

2. Si μ est un mécanisme *C.I.* efficace au sens intérimaire dans un jeu Γ et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un jeu Γ' tel qu'une solution négociée de Γ' ne peut garantir à tout type t_i de chaque joueur i un gain supérieur à $U_i\ (\mu \mid t_i) + \varepsilon$, où Γ' ne diffère de Γ qu'en ceci qu'il admet davantage d'actions concertées des joueurs que Γ, alors μ doit être une solution négociée de Γ.

3. L'ensemble des solutions est invariant pour les transformations non pertinentes (irrelevant) des fonctions d'utilité et de probabilités.

L'intérêt de cette notion réside d'une part en ce que, pour tout jeu bayesien à information imparfaite à deux joueurs, l'ensemble des solutions négociées neutres n'est jamais vide et, d'autre part, que cet ensemble coïncide avec la solution négociée de Nash lorsque l'information est parfaite (théorèmes 1 et 2 de Myerson [1984a]).

D'autre part, lorsque les contraintes d'incitation d'un mécanisme *C.I.* sont exprimées sous forme mathématique, elles sont linéaires et le problème de l'optimum peut être écrit sous la forme d'un objectif linéaire :

$$\underset{\mu}{\text{Max}} \quad \sum_{i=1}^{2} \ \sum_{t_i \in T_i} 1_i(t_i)\, u_i(\mu \mid t_i)$$

On peut alors montrer que, pour tout mécanisme *C.I.* μ, optimal au sens intérimaire, il existe un vecteur

$$\lambda = ((\lambda_i(t_i),\ t_i \in T_i)\ i = 1{,}2,\ \lambda_i(t_i) > 0$$

tel que μ est la solution du problème linéaire ci-dessus (sous les contraintes d'incitation).

Il est facile, en considérant le problème dual, de définir les coûts $\alpha_i(t'_i \mid t_i)$ associés aux contraintes d'incitation, où $\alpha_i(t'_i \mid t_i)$ représente le coût, pour le joueur i de type t_i, de prétendre qu'il est de type t'_i.

La mécanique traditionnelle de l'analyse primal-dual de la programmation linéaire permet en outre de caractériser complètement les solutions négociées neutres (cf. Myerson [1984b]).

6.6 *Étude d'un exemple*

Un monopole bilatéral formé d'un vendeur (v) et d'un acheteur (a) négocie l'échange d'un objet unique est indivisible. Les informations publiques sont résumées dans les deux tableaux ci-dessous

v	Prix	Probabilité
fort	80	3/4
faible	0	1/4

a	Prix	Probabilité
fort	20	1/4
faible	100	3/4

l'information privée de chaque agent consiste en la connaissance de son type.

Du point de vue de l'optimum a posteriori, la probabilité que l'échange ait lieu est de 15/16, car le seul cas où celui-ci est impossible correspond aux évaluations respectives de 80 pour le vendeur et de 20 pour l'acheteur, événement dont la probabilité est de 1/16. On peut toutefois montrer qu'il n'existe aucun mécanisme *C.I.* qui soit optimal dans ce sens. Plus précisément, quelles que soient les spécifications régissant le déroulement des tractations, la possibilité qu'aucune transaction n'ait lieu, en dépit d'une différence de prix favorable, devra nécessairement être affectée d'une probabilité positive.

La contradiction n'est qu'apparente et peut être élucidée de la façon suivante. Nous nous restreindrons au cas de mécanismes symétriques (*i.e.* vendeur et acheteur sont traités de manière symétrique) car on peut montrer que s'il existe un mécanisme *C.I.* optimal a posteriori, il en existe un de symétrique.

Soit (v_v, v_a) le couple de valeurs attribuées par le vendeur et par l'acheteur. Pour $(v_v, v_a) = (0{,}100)$ la symétrie et l'optimalité a posteriori permettent d'inférer que la vente s'effectue au prix de 50. De même, pour le couple (80, 20) on a la certitude qu'aucune transaction ne peut avoir lieu. Soit alors q la probabilité d'échange pour le couple (0, 20) et x le prix convenu dans ce cas. Par symétrie, q (resp. $100 - x$) est aussi la probabilité (resp. le prix) associée à l'échange pour le couple (80, 100).

La condition $x \leq 20$ est nécessaire (sinon l'acheteur fort aurait une espérance de gain négative, où l'espérance de gain d'un joueur est définie par la différence entre son évaluation du prix et l'espérance du prix). D'autre part, un vendeur faible ne sera incité à reporter honnêtement son type que si

$$\frac{3}{4}\ 50 + \frac{1}{4} \times q \geq \frac{3}{4}\ (100 - x)\, q, \text{ donc si } q \leq \frac{75}{2(75 - x)}\ .$$

D'où $q < 1$, contrairement à ce qu'exigerait l'optimalité a posteriori.

Les mécanismes vérifiant $q = \dfrac{75}{2(75 - x)}$ sous tous optimaux au sens intérimaire. C'est donc ceux-ci que nous considérerons pour la recherche d'une solution arbitrée ou négociée équitable.

Les types forts des deux agents préfèrent des mécanismes où x est minimum, alors que les types faibles privilégient des mécanismes où x est maximum. On voit donc ici comment la notion de compromis intertype s'impose de manière naturelle dans l'analyse.

Dans tous les mécanismes *C.I.* symétriques et optimaux au sens intérimaire, les agents faibles sont indifférents en ce qui concerne la divulgation de leur type, entre honnêteté et mensonge. Cependant, chacun d'eux préférerait mentir s'il savait que l'autre agent est faible. Donc aucun de ces mécanismes ne pourra être implanté sans médiation dans un processus analogue à celui de Rubinstein décrit plus haut, car le prix final en cas d'accord doit nécessairement refléter les types des agents. Cela signifie que ceux-ci devraient donc révéler (au moins partiellement) leur type au cours du processus. D'où une incitation pour l'un des agents au moins à tenter de tirer profit de cette information.

On peut donc conclure avec Farrell [1983] que l'intervention d'un médiateur peut être essentielle à l'implantation de mécanismes socialement désirables. La médiation *confidentielle* est davantage qu'une simple hypothèse de simplification technique ; c'est un moyen important et pratique de s'assurer que les agents révèlent honnêtement leurs informations privées ou font des concessions sans modifier l'incitation des autres agents à en faire autant.

D'après le critère d'optimalité a priori, le mécanisme symétrique choisi sera celui qui a le prix x maximum, donc $x = 20$ (et dans ce cas $q = 0{,}68$). Cependant, chacun des agents connaît sa propre évaluation, donc ce mécanisme ne leur est d'aucune utilité.

Le mécanisme symétrique avec $x = 0$ (donc $q = 1/2$) est la solution négociée neutre de cet exemple. On voit donc ici que la solution négociée résout le compromis intertype en faveur des types forts. Cette conclusion ne devrait pas surprendre car, dans cet exemple, les contraintes d'incitations sont telles qu'un agent faible n'a aucun intérêt à les violer (*i.e.* à prétendre qu'il est fort) alors qu'en général, dans des négociations, on peut s'attendre à ce qu'un joueur faible trouve un certain avantage à mentir, ce qui ne sera jamais le cas d'un joueur fort. Il semble donc raisonnable que les agents négocient ici le mécanisme le plus favorable aux types forts. On peut dire aussi que seuls les types faibles ayant un intérêt à l'indiscernabilité, ce type de compromis sera résolu en faveur des types forts.

D'un autre point de vue, si des prix négatifs étaient admis, les types forts préféreraient les mécanismes avec $x < 0$. Mais alors un tel agent devrait nécessairement opter pour la négociation indiscernable de tels mécanismes, qui fournissent des gains négatifs à leur partenaire. Le résultat d'une telle négociation serait alors le compromis indiscernable avec, encore, $x = 0$.

6.7 *Le modèle dynamique*

Analysons l'exemple précédent dans un cadre dynamique (à temps continu) et supposons que les agents accepteront l'échange dès que l'un deux admet qu'il est de type faible ; le prix agréé sera x ($0 \leq x \leq 20$) si le vendeur est le premier à céder et $100-x$ dans le cas contraire. Supposons encore que les deux agents ont le même taux d'escompte δ. La possession de l'objet procure au vendeur un flot continu de bénéfices dont la valeur actualisée est précisément le prix qu'il attribue à l'objet.

Ce jeu admet un équilibre symétrique où les agents forts ne concèdent jamais et les agents faibles prévoient indépendamment de céder à une période d'espérance τ appartenant à l'intervalle $\left[\, 0, \dfrac{(100-2x)\ln 4}{\delta x} \,\right]$, où τ est calculé à l'aide de la fonction de distribution cummulative $\Gamma(\tau) = \text{MIN}\,\{1, \frac{4}{3}\,(1 - e^{\tau\delta x/100-2x})\}$. Avec cette fonction de distribution, si l'un des joueurs est faible et l'autre fort, on trouve $\tau = \dfrac{200-4x}{3\delta x}$ pour le joueur faible. Ceci donne, pour $x = 0$ et $\delta = 0{,}1$ (en mesurant le temps en années), $\tau = 53{,}3$ années.

De tels délais réduisent considérablement la valeur actualisée des gains attendus de la transaction. On montre en fait que pour tout x dans l'intervalle [0,20], l'équilibre symétrique de cette négociation dynamique est dominé par le mécanisme symétrique du jeu statique précédent (pour le même x). Ainsi on peut en conclure que la possibilité de réaliser l'échange à une date ultérieure incite les agents à retarder la date de concessions.

On peut dire aussi que l'introduction des aspects dynamiques fait beaucoup plus qu'engendrer des contraintes d'incitation. Elle engendre également de nouveaux critères d'optimalité qui peuvent influer sur le choix coopératif de l'équilibre ou du mécanisme *C.I.* qui sera implanté.

Un aspect important de la théorie de la négociation dynamique consiste en la prise en compte de l'écoulement du temps sur l'évolution des stratégies des joueurs (et non seulement sur l'issue du jeu).

Examinant plus spécifiquement cet « *effet d'apprentissage* » sur le déroulement d'une négociation d'un contrat de travail, A. Haurie et A.M. Dussaix [1972] étudient le jeu suivant.

Des travailleurs en grève négocient leur part du revenu de l'activité quotidienne y pour les T prochains jours. Si la convention est signée à la date t, le revenu total $y(T-t)$ est réparti, suivant l'accord, entre travailleurs et entrepreneur. Si les prétentions initiales des travailleurs, d_o, sont rejetées, ceux-ci peuvent répéter leur offre, manifestant ainsi leur refus de prendre en compte le rejet de leur première offre. On dira qu'il y a apprentissage nul. On suppose que les travailleurs s'entendent sur des conditions minimales (salaire minimum). Les auteurs montrent alors qu'il y a une « courbe d'apprentissage maximale » joignant la prétention initiale à la prétention minimale. Entre les deux extrêmes (apprentissage nul et apprentissage maximal), les prétentions des travailleurs vont évoluer sur une courbe d'apprentissage $d(t)$. Si τ est la date à laquelle l'accord est conclu, la prétention correspondante est alors $d(\tau)$ et les parts respectives des travailleurs et de l'entrepreneur $d(\tau)\ (T-\tau)$ et $(y-d(\tau))\ (T-\tau)$. Il est clair que cette solution n'est pas optimale puisque les revenus $y\tau$ sont perdus pour les deux catégories d'agents. Cependant, cet accord est un équilibre de Nash.

Ainsi, cette étude vise à élaborer des instruments (fonction d'apprentissage) permettant de décrire le fonctionnement rationnel des agents en situation de non optimalité.

Par opposition, Rubinstein et l'école de la London School of Economics auraient réglé le différend à l'optimum en prenant $d_o = d(\tau)$, le « surplus » $y\tau$ étant acquis aux travailleurs (puisque ce sont eux qui font la première offre). Myerson aurait fait porter le débat sur la meilleure façon de négocier la répartition de ce surplus. Le fait d'actualiser les parts des agents ne devrait pas modifier fondamentalement ces conclusions (du moins lorsque les agents ont des taux d'actualisation identiques).

BIBLIOGRAPHIE

AUMANN, R., 1978, Workshops on Repeated Games. Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Standford University.

BINMORE, K.G., A. RUBINSTEIN, et A. WOLINSKY, 1984, *The Nash Bargaing Solution in Economic Modelling*, London School of Economics.

BRAMS, D., M. DAVIS, et P. STRAFFIN, 1979, « The Geometry of Arms Race », *International Studies Quartely*, 23, pp. 567-588.

CRAMPTON, P.C., 1984, « Bargaining with Incomplete Information. An Infinite Horizon Model with Two-Sided Uncertainty », *Review of Economic Studies*, 51, pp. 579-593.

FARELL, J., 1983, Communication in Games I: Mechanism Design without a Mediator. Discussion Paper. M.I.T.

FUDENBERG, D., et J. TIROLE, 1983, « Sequential Bargaining with Incomplete Information : An Infinite Horizon Model with Two-Sided Uncertainty », *Review of Economic Studies*, 51, pp. 579-593.

GROFMAN, B. et J. POOL, 1977, « How to Make Cooperation the Optimizing Strategy in a Two Person Game », *Journal of Mathematical Sociology* 5, pp. 173-186

GUL, F., et H. SONNENSHEIN, 1985, *One-Sided Uncertainty Does Not Cause Delay*, mimeo.

HARSANYI, J.C. et SELTEN, R., 1972, « A Generalized Nash Bargaining Solution for Two-Person Bargaining Games with in Complete Information », *Management Science* 10, pp. 80-106.

HAURIE, A., et DUSSAIX, A.M., 1972, « Un modèle dynamique de négociation sous la forme d'un jeu semi-différentiel », *R.A.I.R.O.* 6, vol. 1, pp. 65-86.

HAURIE, A., et B. TOLWINSKI, 1985, « Definition and Properties of Cooperative Equilibria in a Two-Player Game of Infinite Duration », *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46, pp. 525-534.

HOLMSTROEM, B. et MYERSON, R.B., 1983, « Efficient and Durable Decision Rules with Incomplete Information », *Econometrica* 51, pp. 1799-1819.

KURZ, M., 1978, « Altruism as an Outcome of Social Interaction », *American Economic Review*, 68, pp. 216-222.

MYERSON, R.B., 1982, « Optimal Coordination Mechanism in Generalized Principal-Agent Problems », *Journal of Mathematical Economics* 11, pp. 67-81.

______, 1983, « Mechanism Design by an Informed Principal », *Econometrica*, 51, pp. 1767-1797.

______, 1984a, « Two Person Bargaining Problems with Incomplete Information », *Econometrica*, 52, pp. 461-487.

______, 1984b, « Cooperation Games with Icomplete Information », *International Journal of Game Theory*, 13, pp. 69-96.

______, 1985, Negotiation in Games : a Theoretical Overview, Discussion Paper, 658, Northwestern University.

______, 1986, « Multistage Games with Communication », *Econometrica*, 54, pp. 323-358.

SCHELLING, T.C., 1960, *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press.

SOBEL, J. et I. TAKAHASHI, 1983, « A Multi-stage Model of Bargaining », *Review of Economic Studies*, 50, pp. 411-426.

SMALE, S., 1980, « The Prisonner's Dilemma and Dynamical Systems Associated to Non-cooperative Games », *Econometrica*, 48, pp. 1617-1635.

RUBINSTEIN, A., 1982, « Perfect Equilibrium in a Bargaining Model », *Econometrica*, 50, pp. 97-109.

NASH, J., 1950, « The Bargaining Problem », *Econometrica* 18, pp. 155-162

SUTTON, J., 1985, *Non-cooperative Bargaining Theory. An Introduction*, London School of Economics.

VON NEUMANN, J. et MORGENSTERN, O., 1944, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.