

## **Le risque de longévité : valorisation et outils de gestion (deuxième partie)**

Patrice Boucher and Martin Boyer

Volume 77, Number 3-4, 2009–2010

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/1091947ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/1091947ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Faculté des sciences de l'administration, Université Laval

ISSN

1705-7299 (print)

2371-4913 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this document

Boucher, P. & Boyer, M. (2009). Le risque de longévité : valorisation et outils de gestion (deuxième partie). *Assurances et gestion des risques / Insurance and Risk Management*, 77(3-4), 273–300. <https://doi.org/10.7202/1091947ar>

Article abstract

How long will live a given population? The answer to this question is crucial for insurers as well as for corporations and governments that have promised benefit payments upon retirement. For Canadians the cost of certain public programmes, such as Canada's Pension Plan, depends directly on the life span of the population. This is also the case for private pension plans and the profitability of insurance companies that offer annuity services. We present in this second of three articles on longevity risk a longevity risk valuation and hedging method.

## **Le risque de longévité : valorisation et outils de gestion (deuxième partie)**

**par Patrice Boucher et Martin Boyer**

### **RÉSUMÉ**

Se questionner à savoir combien d'années une population donnée vivra est un sujet d'une importance cruciale pour les assureurs et les entreprises et gouvernements aux prises avec des fonds de pension à prestations déterminées. Au Canada le coût des programmes de retraite et de sécurité sociale, dont la Sécurité de la vieillesse, le Régime de pensions du Canada et la Régie des rentes du Québec, dépend fortement de la longévité de la population. Il en est de même pour les régimes de pensions et les compagnies d'assurance-vie, qui offrent à leurs bénéficiaires des prestations déterminées sous la forme d'une rente viagère. Nous présentons dans ce deuxième article d'une série de trois une manière de valoriser et de gérer ce risque de longévité.

### **ABSTRACT**

How long will live a given population? The answer to this question is crucial for insurers as well as for corporations and governments that have promised benefit payments upon retirement. For Canadians the cost of certain public programmes, such as Canada's Pension Plan, depends directly on the life span of the population. This is also the case for private pension plans and the profitability of insurance companies that offer annuity services. We present in this second of three articles on longevity risk a longevity risk valuation and hedging method.

---

### **Les auteurs :**

Patrice Boucher est analyste, Fondation Lucie et André Chagnon. Martin Boyer est directeur, Département de la finance, HEC Montréal.

## I. INTRODUCTION

Le phénomène du vieillissement de la population est une réalité à laquelle tous des pays industrialisés doivent faire face. L'évolution du paysage démographique canadien au cours des dernières décennies reflète bien la tendance mondiale, caractérisée par une diminution de l'indice de fécondité, ainsi que par une amélioration continue et généralisée de la longévité. Le Bureau de l'actuaire en chef, dans son 21<sup>e</sup> rapport actuariel sur le Régime de pensions du Canada, dénote que depuis l'instauration du Régime en 1966, la population canadienne n'a cessé de vieillir. De ce fait, nous observons depuis près de cent ans une amélioration marquée dans l'espérance de vie des Canadiens et des Canadiennes.

Or, cette diminution marquée de la mortalité a des conséquences importantes pour les compagnies d'assurance-vie, de même que pour les fonds de pension publics et privés. En garantissant à leurs bénéficiaires un certain niveau de revenu entre le moment de la retraite et celui du décès, ces derniers s'exposent à un risque démographique, plus précisément, le risque de longévité. Le risque de longévité est celui pour lequel, pour une population donnée, la durée de vie moyenne de l'ensemble des individus est plus longue que ce qui est attendu. Que ce soit pour tarifier la prime d'assurance lors de l'émission d'une rente viagère ou pour établir le montant des cotisations à la caisse de retraite, la santé financière des assureurs et des fonds de pension repose en partie sur leur capacité à pouvoir estimer l'espérance de vie avec exactitude. Une sous-estimation de celle-ci est problématique, car la prime ou les cotisations ne seront pas assez importantes pour couvrir les flux monétaires non prévus, qui devront être payés durant les dernières années de la vie des rentiers ou des pensionnés. Il faut souligner la nature systématique de ce risque; pour ces organismes, la prise en charge d'un grand nombre d'individus ne suffit pas pour l'éliminer.

La conjonction des montants considérables qui dépendent de l'évolution future de la mortalité avec la grande incertitude qui lui est propre fait courir un risque aux différents assureurs et régimes de retraite. Lorsqu'une compagnie d'assurance-vie émet une rente viagère, il est impossible pour elle de charger des frais additionnels aux rentiers advenant un scénario où l'espérance de vie augmente plus rapidement que ce qui est attendu. Toutes choses égales par ailleurs, une compagnie d'assurance-vie qui fait une telle erreur voit ses marges bénéficiaires fondre et augmenter sa probabilité de faire faillite. Pour les régimes de retraite, le taux de cotisation sur le salaire peut être majoré pour compenser pour le manque à gagner. Par contre, une

action semblable est faite au détriment des générations futures, car ce sont les jeunes travailleurs qui doivent payer pour les versements faits aux retraités qui vivent plus longtemps. Il existe également la possibilité de réduire le montant des prestations, avec les conséquences négatives évidentes que cela entraîne.

Nous avons souligné dans notre premier article de la série la nature systématique du risque de longévité. Jusqu'à tout récemment, il n'existait pas de moyens de couverture efficaces. Les marchés financiers peuvent cependant jouer un rôle central dans la gestion des risques liés au vieillissement de la population (Groome *et al.*, 2006). Dans l'optique d'offrir aux compagnies d'assurance-vie la possibilité de gérer ce risque, Blake et Burrows (2001) ont suggéré la création des obligations de longévité. Bien que leur utilisation soit peu répandue pour le moment, les produits financiers dérivés de la mortalité sont appelés à croître en importance dans les années à venir. Et bien qu'il n'existe peu ou pas d'outils qui permettent aux entreprises de se protéger contre des erreurs semblables, on propose plusieurs approches dans la littérature. La majorité de ces produits demande qu'on ait recours aux produits financiers dérivés dont les paiements dépendent de l'évolution de la mortalité agrégée.

Nous proposons ainsi une approche pour quantifier l'importance du risque de longévité, qui tient compte aussi bien du risque de dérive que du risque de volatilité. Pour ce faire, nous utilisons un modèle de mortalité stochastique où les paramètres seront estimés à l'aide des tables canadiennes de mortalité. Le risque de dérive est évalué en comparant les prévisions du modèle avec les facteurs d'amélioration proposés par le Régime de pensions du Canada.

Après avoir modélisé le risque de longévité, nous mesurerons le montant que ce régime devrait payer pour éliminer ce risque. Pour ce faire, nous regarderons des titres financiers dérivés dont l'actif sous-jacent est l'espérance de vie de la population du régime. Un exemple que l'on retrouve dans la littérature est l'obligation de longévité. Cette obligation verse des coupons annuels dont le montant est proportionnel à un indice de survie. Au moment de l'émission, une population de référence est désignée et l'indice de survie reflète l'évolution de la mortalité à l'intérieur de cette population (une cohorte du même âge), pour la durée de l'obligation. La valeur nominale nette des coupons diminue à chaque date de versement, pour illustrer le fait que certains individus à l'intérieur du groupe décèdent. L'attrait d'une telle obligation pour les régimes de retraite est que si les rentiers vivent plus longtemps que prévu, alors le régime encourt une perte sur son portefeuille de rentes, mais fait un gain sur l'obligation de longévité, car les coupons reçus diminuent moins rapidement.

D'autres auteurs suggèrent des outils différents pour la couverture du risque de longévité. Certains se fondent sur la structure des swaps de taux d'intérêt et proposent les swaps de survie – des swaps qui sont aujourd'hui transigés à la CBOE. Sous sa forme la plus simple, un swap de survie est très similaire à un swap de taux d'intérêt conventionnel. On peut aussi envisager des produits dérivés de la mortalité tels des titres adossés à la longévité (TAL), similaires aux titres adossés à des créances (TAC). Dans ce cas, les flux monétaires d'un regroupement d'obligations de longévité ou un portefeuille d'annuités sont redirigés vers les tranches du TAL, qui ont chacune une exposition au risque de longévité différente, selon les préférences des investisseurs. Nous pourrions développer ces autres titres financiers dérivés pour gérer le risque de longévité à l'intérieur du rapport.

Pour ce faire, nous employons une méthodologie où la mortalité est modélisée suivant un processus stochastique, soit le modèle de Cairns, Blake et Dowd (2006). Nous calibrons les paramètres du modèle sur les tables canadiennes de mortalité du moment, ce qui nous permet d'évaluer le taux de survie futur de certaines cohortes et ainsi calculer la valeur actuelle de leur pension de retraite. Le risque de longévité est évalué à l'aide d'une simulation de Monte Carlo et du concept de valeur à risque. Nous présentons ensuite une application de la méthodologie proposée au régime de retraite de la Gendarmerie royale du Canada. Ainsi, notre étude n'est pas que théorique, mais nous permet également de chiffrer explicitement l'impact d'une éventuelle déviation adverse des taux de mortalité sur la valeur du passif actuariel d'un engagement de retraite réel.

## 2. MODÉLISATION

Pour simuler les trajectoires du taux de survie, nous faisons appel au modèle de mortalité proposé par Cairns, Blake et Dowd (2006) (que nous désignons «le modèle CBD»). Nous assumons que les taux de mortalité de l'année  $t$ , pour les âges  $x = \{55, 56, \dots, 105\}$ , ont une forme exponentielle à deux facteurs :

$$q(t, x) = \frac{e^{A_1(t) + A_2(t)(x)}}{1 + e^{A_1(t) + A_2(t)(x)}}. \quad (1)$$

Comme nous nous intéressons à des rentes versées à des individus de 55 ans et plus, il n'est pas nécessaire d'estimer le modèle sur l'ensemble de la courbe. Pour être en mesure de faire des prévisions quant à l'évolution de la mortalité dans le futur, nous modélisons conjointement les processus stochastiques  $A(t) = (A_1(t), A_2(t))'$  comme une marche aléatoire en deux dimensions avec dérive. La dynamique de l'évolution des coefficients  $A(t)$  est donnée par l'équation suivante :

$$A(t + 1) = A(t) + \mu + CZ(t + 1), \quad (2)$$

où  $\mu$  est un vecteur  $2 \times 1$  de constantes représentant la dérive des coefficients  $A_1(t)$  et  $A_2(t)$ ,  $C$  est une matrice  $2 \times 2$  obtenue de la matrice de variance/covariance de  $A_1(t)$  et  $A_2(t)$  et  $Z(t)$  est un vecteur  $2 \times 1$  de variables indépendantes tirées d'une loi normale centrée réduite.

Nous dénotons  $V$ , la matrice de variance/covariance de  $A_1(t)$  et  $A_2(t)$ . Il existe une infinité de matrices  $C$  qui satisfont  $V = CC'$ . Les auteurs contraignent  $C$  à être une matrice triangulaire inférieure. Ainsi,  $C$  se dérive directement de  $V$  et la décomposition de Cholesky est unique.

## 2.1. Estimation des coefficients et des paramètres du modèle

Nous obtenons des valeurs  $A_1$  et  $A_2$  pour chaque année en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) à l'équation modifiée des taux de mortalité :

$$\log \frac{q(t, x)}{p(t, x)} = A_1(t) + A_2(t)(x) + \text{terme d'erreur}. \quad (3)$$

La série chronologique des différences  $D = \{D(1), \dots, D(n)\}$ , où  $D(t) = A(t) - A(t-1)$ , permet de mesurer la dérive, ainsi qu'une matrice de variance/covariance des variations annuelles de ces coefficients. Il reste à simuler des trajectoires selon l'équation (2) en fonction du vecteur  $\mu$  et de la matrice  $C$  extraits de cette série  $D$ .

Les auteurs affirment que leur modèle est raisonnable d'un point de vue biologique. Pour chaque année future, les taux de mortalité pour les cohortes les plus âgées sont plus élevés que ceux des cohortes plus jeunes (*i.e.*, pour un temps  $t$  fixe,  $q(t, x)$  est une fonction croissante de  $x$ ). De plus, la dynamique de l'équation (2) implique que les taux de mortalité pour l'ensemble des âges étudiés vont diminuer graduellement avec le temps, ce qui est un fait que nous observons sur les données historiques. Finalement, les améliorations dans

les taux de mortalité aux différents âges ne sont pas parfaitement corrélées entre eux.

La présence d'un deuxième facteur stochastique permet non seulement un meilleur lissage de la courbe de mortalité, mais permet également de faire varier les taux de mortalité de manière non parfaitement corrélée. Par contre, il n'est pas clair si le niveau de corrélation entre les taux simulés représentera bien la corrélation historique. En comparaison, la forme originale du modèle de Lee et Carter (1992) assume une corrélation parfaite.

## 2.2 Incertitude des paramètres

Lorsque nous calculons le vecteur de dérive et la matrice de variance/covariance, il est évident que les valeurs obtenues sont soumises à un certain niveau d'incertitude en vertu de la quantité limitée d'information disponible. C'est-à-dire que  $\mu$  et  $V$  sont des estimateurs. Cette incertitude diminue lorsque le nombre d'années d'observation augmente. Pour en tenir compte, Cairns, Blake et Dowd (2006) proposent une distribution pour  $\mu, V \mid D$  :

$$V^{-1} \mid D \sim \text{Wishart}(n-1, n^{-1} \hat{V}^{-1}), \quad (4)$$

$$\mu \mid D \sim \text{MVN}(\hat{\mu}, n^{-1}V). \quad (5)$$

Où :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n D(t), \quad (6)$$

$$\hat{V} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (D(t) - \hat{\mu})(D(t) - \hat{\mu})'. \quad (7)$$

Ainsi, pour chaque trajectoire de mortalité, nous devons auparavant tirer  $V$  d'une distribution Wishart inverse et  $\mu$  d'une distribution normale multidimensionnelle (MVN). Le résultat de chaque tirage est ensuite appliqué à une trajectoire en particulier pour toutes les années de simulation. Nous décrivons maintenant la procédure pour simuler la distribution de Wishart.

Nous devons simuler  $n-1$  vecteurs  $2 \times 1$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \sim \text{MVN}(0, SS')$ , où  $S$  est la matrice qui satisfait :

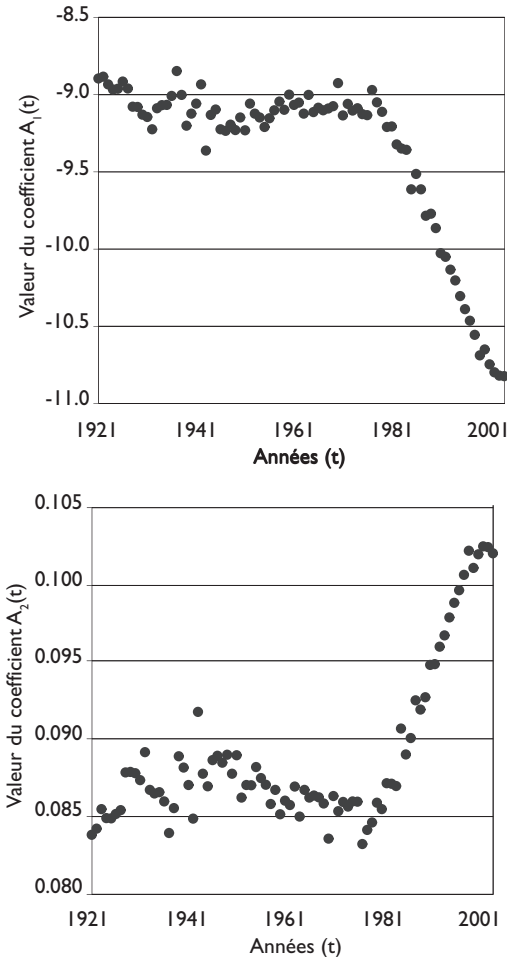
$$SS = n^{-1} \hat{V}^{-1}. \quad (8)$$

Ainsi  $\gamma_i = SZ_i$ , où  $Z_i$  est un vecteur de variables indépendantes tirées d'une loi normale centrée réduite. Avec  $V$  la matrice de

variance-covariance simulée, la dernière étape consiste à utiliser cette matrice  $V$  pour obtenir  $\mu$  à partir de (5) :

$$V = X^{-1} = \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \gamma_i \right]^{-1} \quad (9)$$

**FIGURE I**  
**VALEUR DES COEFFICIENTS  $A_1$  ET  $A_2$  DU MODÈLE**  
**CBD POUR LES HOMMES AU CANADA ENTRE 1921**  
**ET 2004**



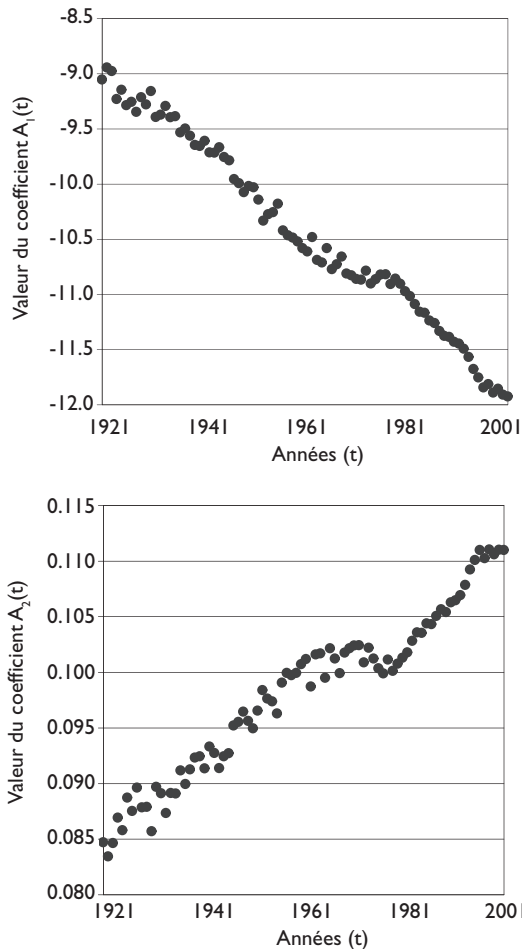


### 3. RÉSULTATS ET ANALYSE

#### 3.1 Coefficients du modèle de mortalité

Dans un premier temps, nous montrons les résultats de l'évaluation par moindres carrés de l'équation (3), qui vise à capter la dynamique des taux de mortalité des tables du moment entre 1921 et 2004. Le graphique 1 illustre les coefficients annuels estimés de  $A_1$

**FIGURE 2**  
**VALEUR DES COEFFICIENTS  $A_1$  ET  $A_2$  DU MODÈLE**  
**CBD POUR LES FEMMES AU CANADA ENTRE 1921**  
**ET 2004**



et  $A_2$  pour les hommes, tandis que le graphique 2 fait de même pour les femmes.

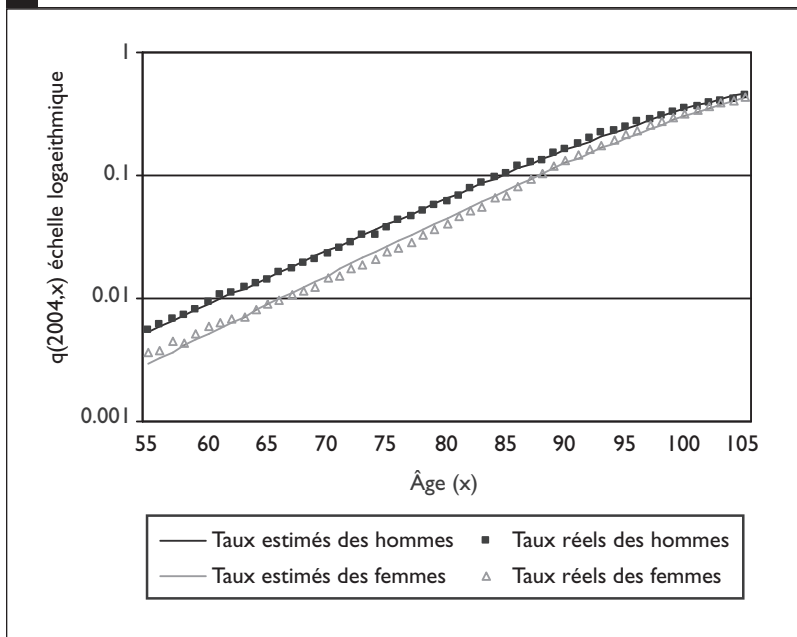
Des valeurs décroissantes pour  $A_1$  signifient une diminution parallèle de la courbe de mortalité, donc que l'espérance de vie augmente grâce à une réduction de la mortalité à tous les âges. Une tendance croissante pour  $A_2$  signifie que la diminution des taux de mortalité est plus importante pour les plus jeunes âges. Ainsi, lorsque  $A_1$  décroît et  $A_2$  croît, comme ce que nous observons pour plusieurs années, la courbe de mortalité baisse et sa pente augmente.

La quasi-stabilité du coefficient  $A_1$  pour les hommes sur les 50 premières années d'observation reflète bien le fait que pour les âges illustrés à la figure 3, les taux de mortalité demeurent au-delà de 90 % de leur valeur initiale pour une longue période de temps. Par la suite, les taux de mortalité chutent et les valeurs de  $A_1$  déclinent abruptement. Il est plus difficile de juger de la précision du coefficient  $A_2$  sur toute la période, par ailleurs. Le graphique laisse entendre que la différence entre l'amélioration de la mortalité des jeunes aînés par rapport aux vieux aînés augmente jusqu'en 1940, rétrécit ensuite jusqu'en 1975 pour finalement s'agrandir. Ainsi, nous pouvons discerner deux périodes distinctes, une première où les taux de mortalité ne bougent pratiquement pas et une seconde où les taux chutent dramatiquement et linéairement.

Il est important de garder ce fait en mémoire lorsque nous calibrons les paramètres du modèle sur des périodes différentes. L'étude originale de Cairns, Blake et Dowd (2006) considèrent la mortalité des hommes d'Angleterre et du Pays de Galles entre 1961 et 2002. Bien que nous puissions entrevoir une forme similaire pour leurs valeurs  $A_1(t)$  et  $A_2(t)$ , le point d'inflexion semble survenir plus tôt, soit au début des années 70. Pour les femmes, la tendance du graphique 2 est plus facilement interprétable. Comme nous le voyons, les taux de mortalité diminuent assez linéairement et la différence entre les âges augmente. L'évolution des coefficients est clairement affine, ce qui vient appuyer la pertinence de la dynamique proposée à l'équation (14).

Nous devons également nous assurer que le modèle est capable de bien reproduire la courbe de mortalité pour tous les âges considérés (entre 55 et 105 ans). C'est ce que nous montrons à la figure 3 où les taux de mortalité réels pour l'année 2004 sont représentés par une série de points alors que la mortalité estimée par le modèle CDB est la courbe qui passe à travers ces points. Le niveau de précision est similaire pour l'ensemble des années étudiées.

**FIGURE 3**  
**TAUX DE MORTALITÉ RÉELS ET ESTIMÉS PAR LE**  
**MODÈLE CBD POUR LES HOMMES ET LES FEMMES,**  
**CANADA, 2004**



### 3.2. Prime actuarielle et prime de risque de longévité avec paramètres certains

Il apparaît donc évident de quantifier l'importance pour un engagement de retraite du risque de longévité. Dans ce qui suit, nous énumérons les résultats de la simulation pour le calcul de la prime actuarielle et celui de la prime de risque de longévité sans considérer l'incertitude des paramètres. Les résultats sont ventilés en fonction du sexe. Pour chacun d'eux, nous calculons la prime actuarielle et la prime de risque de longévité en calibrant les paramètres du modèle de mortalité sur deux périodes différentes. Dans un premier temps, nous considérons la mortalité entre 1950 et 2004, puis entre 1980 et 2004. Comme l'amélioration de la mortalité est différente au cours de ces deux périodes, une telle division nous permet de mesurer l'impact de ces changements sur le calcul de la prime actuarielle, ainsi que sur le niveau de risque. Les résultats sans tenir compte de l'incertitude des paramètres sont regroupés dans le tableau 1 pour la période 1950-2004 et dans le tableau 2 pour la période 1980-2004.

**TABLEAU I**  
**PRIME ACTUARIELLE ET PRIME DE RISQUE DE LONGÉVITÉ, AVEC PARAMÈTRES CERTAINS, HOMMES ET FEMMES, CALIBRATION SUR LES ANNÉES 1950-2004, ÂGES SÉLECTIONNÉS**

<b>Hommes</b>				
Âge	Prime actuarielle	Prime de risque de longévité (pour un niveau de confiance $\alpha$ )		
$x$	$\bar{a}(x)$	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
55	15,46 \$	1,68%	2,20%	3,20%
60	13,72 \$	1,99%	2,62%	3,84%
65	11,85 \$	2,39%	3,14%	4,58%
70	9,92 \$	2,85%	3,72%	5,40%
75	8,01 \$	3,33%	4,37%	6,46%
<b>Femmes</b>				
Âge	Prime actuarielle	Prime de risque de longévité (pour un niveau de confiance $\alpha$ )		
$x$	$\bar{a}(x)$	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
55	16,86 \$	1,66%	2,15%	3,09%
60	15,22 \$	1,97%	2,54%	3,61%
65	13,38 \$	2,34%	3,01%	4,35%
70	11,40 \$	2,72%	3,53%	5,07%
75	9,37 \$	3,18%	4,15%	5,87%

La prime actuarielle illustre la valeur présente d'une rente viagère, si la mortalité continue de s'améliorer en moyenne au rythme prédit par le modèle CBD. Sans surprise, la prime actuarielle est une fonction inverse de l'âge initial, puisque les jeunes rentiers reçoivent des versements plus longtemps. Également, il est normal que la prime actuarielle soit supérieure pour les femmes, car leur espérance de vie est plus élevée. Pour celles-ci, le coût de recevoir un dollar par

année à vie est environ de 10 % supérieur à celui des hommes à 55 ans et 17 % supérieur à 75 ans. La différence augmente avec l'âge à cause de l'effet d'actualisation des flux monétaires. Ceci s'explique par le fait que malgré que les taux de mortalité des femmes soient systématiquement plus faibles, la différence absolue avec les hommes est plus grande aux âges élevés. Donc, comme la probabilité de mourir durant les premières années pour une personne de 55 ans est faible peu importe le sexe, l'actualisation réduit l'impact des différences aux âges avancés, car elles sont plus éloignées dans le temps.

Il faut être conscient qu'en utilisant les années 1950 à 2004 pour estimer les valeurs de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  pour les hommes, nous sous-estimons potentiellement la vitesse de réduction des taux de mortalité, du moins à court terme. Sur la première moitié de l'échantillon, les coefficients de régression demeurent pratiquement stables. Comme les paramètres de dérive sont obtenus par moyenne arithmétique, leur valeur sur l'ensemble des années étudiées est plus faible que ce qui est réellement observé au cours de la deuxième moitié.

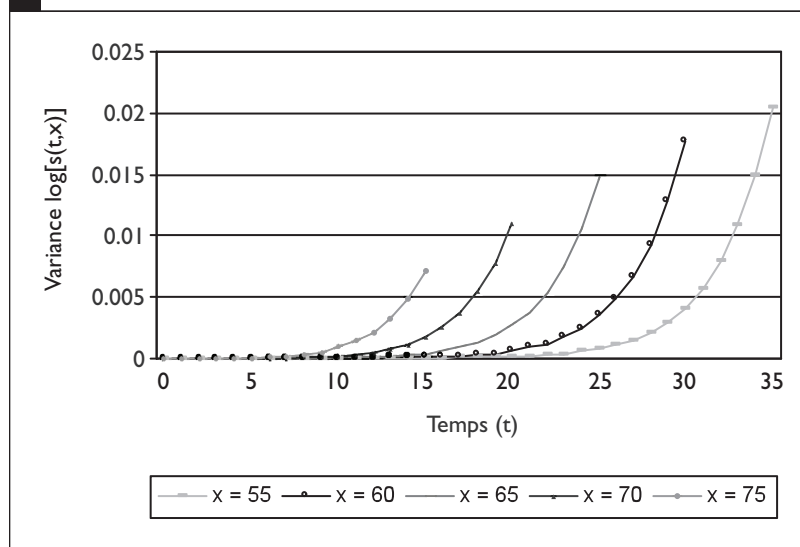
Pour le risque de longévité, nous pouvons juger de son importance en observant la prime de risque du tableau 1. La prime de risque de longévité représente la différence, en pourcentage, entre la valeur présente d'une rente selon la trajectoire de mortalité espérée et la valeur présente d'une rente selon une trajectoire de mortalité favorable, où l'espérance de vie augmente plus que prévu. La prime de risque de longévité pour une valeur  $\alpha$  est calculée en fonction du 90<sup>e</sup>, 95<sup>e</sup> et 99<sup>e</sup> percentile de la distribution des rentes simulées. Nous interprétons les résultats de la manière suivante. Par exemple, pour les 55 ans, une augmentation de la prime actuarielle de 3,20 % pour les hommes et de 3,09 % pour les femmes permet de réduire le risque de faillite (toutes choses égales par ailleurs) d'un engagement de retraite immédiat à 1 %. Pour réduire la probabilité de faillite à 10 %, la prime de risque diminue à 1,68 % pour les hommes et 1,66 % pour les femmes. Lorsque l'âge augmente, la prime de risque augmente également. De façon à réduire le risque de longévité à un niveau de 1 % (10 %) pour une rente qui commence à être versée après 75 ans, elle se chiffre à 6,46 % (3,33 %) pour les hommes et 5,87 % (3,18 %) pour les femmes. La prime de risque de longévité est plus importante pour les hommes pour tous les âges étudiés. Ceci est attribuable à la plus grande volatilité des coefficients de régression masculins entre 1950 et 2004, tel que le montrent les variances de la matrice de variance/covariance de l'annexe B.

Nous portons notre attention sur un élément particulier. Les résultats suggèrent qu'il est plus risqué d'offrir des rentes lorsque l'âge de la cohorte augmente. Par exemple, pour les femmes, la

prime à un niveau de confiance de 99 % est de 3,09 % à 55 ans et de 5,87 % à 75 ans. Ceci est surprenant compte tenu de notre définition du risque de longévité, qui fait mention de l'incertitude dans la tendance à long terme des taux de mortalité. A priori, il est logique de croire que le risque de longévité associé aux cohortes plus jeunes est supérieur, parce qu'il leur reste en moyenne plus d'années à vivre et que la probabilité de se tromper en estimant leur espérance de vie est plus grande. Cette observation est faite par Cairns, Blake et Dowd (2006) : en considérant le flux monétaire à 90 ans pour ces deux groupes, il est clair que celui pour les 55 ans est davantage incertain, car il est versé dans 35 ans, alors que pour les 75 ans, le versement arrive dans seulement 15 ans. Les auteurs utilisent le graphique de la variance du taux de survie pour le démontrer. Nous reprenons une variante de ce graphique avec nos propres résultats au graphique 4.

Nous pouvons voir que la variance du logarithme de l'indice de survie à 90 ans (le dernier point de chaque courbe) est effectivement supérieure pour les cohortes plus jeunes, ce qui vient confirmer notre intuition initiale. Par contre, la raison pour laquelle cela ne se traduit pas en un risque de longévité plus élevé relativement à la prime actuarielle est encore une fois due à l'effet d'actualisation. Milevsky et Promislow (2003) expliquent que les rentes offertes aux jeunes personnes comportent une certaine période de temps où les taux de

**FIGURE 4**  
**VARIANCE DU LOGARITHME DU TAUX DE SURVIE,**  
**HOMMES, ÂGES SÉLECTIONNÉS**



mortalité sont faibles et ne varient pas beaucoup. Ainsi, l'effet d'actualisation fait en sorte de réduire leur sensibilité aux variations dans les taux de mortalité aux âges avancés, qui peuvent survenir après l'émission des rentes. Ainsi, plus élevé est le taux d'intérêt utilisé pour escompter les flux monétaires, plus le risque de longévité en pourcentage de la prime actuarielle sera élevé pour les vieilles cohortes par rapport aux plus jeunes.

Nous étudions maintenant une situation alternative en calibrant le modèle sur les années 1980-2004. Durant cette période, la réduction de la mortalité s'accélère chez les hommes et ralentit légèrement chez les femmes, comme nous l'avons vu précédemment. Le tableau 2 montre les résultats obtenus.

Pour la prime actuarielle, les résultats sont ceux attendus. En comparaison avec le tableau 3, celles des hommes sont plus élevées et celles des femmes sont plus faibles. Sous cette optique, l'écart entre l'espérance de vie des hommes et des femmes se réduit. Pour les deux sexes, la prime de risque de longévité diminue. Les résultats s'expliquent par le fait que les taux de mortalité sont moins volatiles au cours de cette sous période. En ce qui concerne les hommes, la différence est petite, tandis que pour les femmes la volatilité est réduite d'environ 50 %. Ceci est cohérent avec le fait que nous observons depuis 1921 une concentration graduelle des coefficients autour de la tendance baissière. Cet aspect fait intervenir le « risque de modèle », dont nous discuterons les effets ultérieurement.

À titre indicatif, nous avons mentionné précédemment qu'une augmentation de  $A_2$  est associée à un fléchissement de la pente de la courbe de mortalité. Chez les hommes et les femmes, entre 1980 et 2004, la pente augmente rapidement par rapport à sa diminution parallèle (*i.e.*, le ratio de  $\mu_2 / \mu_1$  est élevé). En calibrant le modèle CBD sur la mortalité au Canada sur cette période, le modèle prédit une dégradation des taux de mortalité après 105 ans. Par contre, le phénomène se produit uniquement à des âges où le taux de survie est faible. Par exemple, selon le modèle CBD, 0,08 % des hommes âgés de 65 ans en 2005 vont vivre jusqu'à 105 ans, alors que pour les femmes, cette proportion est de 0,33 %. L'effet de cette légère incohérence est négligeable et n'affecte pas significativement les résultats.

Nous indiquons qu'il est important de tenir compte de la dérive tendancielle des taux de mortalité pour l'évaluation des rentes. Si nous assumons que les taux de mortalité ne vont pas diminuer dans le futur, nous sous-estimons la prime actuarielle d'entre 2,5 % et 5,5 %. La différence entre la prime actuarielle avec et sans améliorations couvre les déviations espérées des taux de mortalité. C'est ce qui est

**TABLEAU 2**  
**PRIME ACTUARIELLE ET PRIME DE RISQUE DE LONGÉVITÉ, AVEC PARAMÈTRES CERTAINS, HOMMES ET FEMMES, CALIBRATION SUR LES ANNÉES 1980-2004, ÂGES SÉLECTIONNÉS**

<b>Hommes</b>				
Âge	Prime actuarielle	Prime de risque de longévité (pour un niveau de confiance $\alpha$ )		
$x$	$\bar{a}(x)$	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
55	15,70 \$	1,52%	1,96%	2,83%
60	13,91 \$	1,85%	2,43%	3,46%
65	11,99 \$	2,25%	2,95%	4,17%
70	10,00 \$	2,70%	3,56%	5,07%
75	8,05 \$	3,22%	4,17%	6,06%
<b>Femmes</b>				
Âge	Prime actuarielle	Prime de risque de longévité (pour un niveau de confiance $\alpha$ )		
$x$	$\bar{a}(x)$	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
55	16,69 \$	1,06%	1,36%	1,93%
60	15,04 \$	1,24%	1,60%	2,30%
65	13,21 \$	1,45%	1,88%	2,74%
70	11,24 \$	1,70%	2,18%	3,16%
75	9,23 \$	1,93%	2,50%	3,64%

montré au tableau 3. La prime actuarielle avec améliorations est calculée avec le modèle CBD calibré sur les deux périodes précédentes.

Dans les tableaux précédents, nous n'avons considéré que des rentes immédiates, c'est-à-dire dont le premier versement est reçu immédiatement l'année suivant l'âge de retraite. Les rentes offertes peuvent également être « différées » de telle sorte que la rente viagère



**TABLEAU 3  
PRIME ACTUARIELLE AVEC ET SANS AMÉLIORATIONS  
DE L'ESPÉRANCE DEVIE, HOMMES ET FEMMES, ÂGES  
SÉLECTIONNÉS**

<b>Hommes</b>					
	<b>Sans améliorations</b>	<b>Avec améliorations</b>			
Âge	Mortalité de 2004	CBD (1950-2004)	Différence	CBD (1980-2004)	Différence
55	14,87 \$	15,46 \$	3,97%	2,83%	5,58%
60	13,20 \$	13,72 \$	3,94%	3,46%	5,38%
65	11,42 \$	11,85 \$	3,77%	4,17%	4,99%
70	9,58 \$	9,92 \$	3,55%	5,07%	4,38%
75	7,77 \$	8,01 \$	3,09%	6,06%	3,60%
<b>Femmes</b>					
Âge	<b>Sans améliorations</b>	<b>Avec améliorations</b>			
x	Mortalité de 2004	CBD (1950-2004)	Différence	CBD (1980-2004)	Différence
55	16,16 \$	16,86 \$	4,33%	16,69 \$	3,28%
60	14,57 \$	15,22 \$	4,46%	15,04 \$	3,23%
65	12,81 \$	13,38 \$	4,45%	13,21 \$	3,12%
70	10,93 \$	11,40 \$	4,30%	11,24 \$	2,84%
75	9,00 \$	9,37 \$	4,11%	9,23 \$	2,56%

ne commence à être payée qu'au moment où le cotisant atteint un certain âge. Nous étudions le risque de longévité pour ce cas spécial.

Le tableau 4 présente la prime de risque de longévité pour une rente différée à l'âge  $z$  de 60 et 65 ans et dont les souscripteurs sont

**TABLEAU 4  
PRIME DE RISQUE DE LONGÉVITÉ POUR UNE RENTE  
DIFFÉRÉE À 60 ET 65 ANS, AVEC PARAMÈTRES  
CERTAINS, HOMMES ET FEMMES, CALIBRATION  
SUR LES ANNÉES 1950-2004, ÂGES SÉLECTIONNÉS**

<b>Hommes</b>			
Âge actuel : Âge de la rente différée	Prime de risque de longévité (pour un niveau de confiance $\alpha$ )		
x : z	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
45 : 60	2,78%	3,59%	5,22%
55 : 60	2,31%	2,99%	4,40%
60 : 60 (rente immédiate)	1,99%	2,62%	3,84%
45 : 65	3,85%	4,92%	7,17%
55 : 65	3,29%	4,24%	6,24%
65 : 65 (rente immédiate)	2,39%	3,14%	4,58%
<b>Femmes</b>			
Âge actuel : Âge de la rente différée	Prime de risque de longévité (pour un niveau de confiance $\alpha$ )		
x : z	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
45 : 60	2,69%	3,40%	4,88%
55 : 60	2,19%	2,80%	3,94%
60 : 60 (rente immédiate)	1,97%	2,54%	3,61%
45 : 65	3,50%	4,52%	6,49%
55 : 65	3,01%	3,91%	5,58%
65 : 65 (rente immédiate)	2,34%	3,01%	4,35%

actuellement âgés de 45 et 55 ans. À titre comparatif, nous incluons également la prime de risque pour une rente immédiate (*i.e.*, les souscripteurs sont âgés de 60 et 65 ans).

Lorsque l'intervalle de temps entre l'âge actuel et le premier versement de la rente augmente, le risque de longévité augmente également. Autrement dit, pour un  $x$  fixe, le risque de longévité augmente avec  $z$ . Inversement, pour un  $z$  fixe, le risque de longévité croît lorsque  $x$  décroît. De ce fait, la prime de risque de longévité des hommes pour un niveau de confiance à 95 % pour une rente différée à 60 ans se chiffre à 2,99 % lorsque l'âge actuel est de 55 ans et augmente à 3,59 % lorsque celui-ci est de 45 ans. Cette relation est intuitive, puisque pour un individu de 55 ans, tous les flux monétaires sont versés dix années avant ceux versés à son homologue moins âgé. Ainsi, durant ces dix années, les taux de mortalité ont plus de temps pour dévier de leur trajectoire espérée. Nous observons également que le risque de longévité pour une rente différée tend vers le niveau de risque d'une rente immédiate lorsque l'écart entre  $x$  et  $z$  se rétrécit. Pour une femme, la prime de risque de longévité à 95 % d'une rente différée à 60 ans passe de 3,40 % à 2,80 % pour finalement atteindre 2,54 % pour des âges actuels respectifs de 45, 55 et 60 ans.

Les résultats précédents ne sont pas en contradiction avec ceux obtenus pour une rente immédiate où nous affirmons que le risque de longévité en pourcentage de la prime diminue avec l'âge. Pour une rente différée, ceci implique simplement que la prime de risque de longévité diminue lorsque  $x$  et  $z$  diminuent au même rythme. Par exemple, la prime de risque à 95 % pour un homme lorsque  $x = 55$  et  $z = 65$  est de 4,24 %. Nous ne le montrons pas au tableau 6, mais lorsque  $x = 45$  et  $z = 55$ , cette prime de risque diminue à 2,67 %, ce qui demeure cohérent avec notre interprétation du risque pour les rentes immédiates.

### **3.3 Prime actuarielle et prime de risque de longévité avec paramètres incertains**

En seconde analyse, nous reprenons une méthodologie semblable, mais qui tient compte de l'incertitude liée à l'estimation des paramètres  $\mu$  et  $V$ . Une description complète de la procédure se trouve à la section 3.2.3. Sans tout reprendre, il s'agit de simuler des valeurs uniques de  $\mu$  et  $V$  pour chacune des trajectoires de mortalité de l'équation (14), au lieu d'utiliser les mêmes, comme ce qui est fait précédemment. Les résultats pour les deux périodes de calibration se retrouvent aux tableaux 5 et 6. Nous n'incluons pas la prime actua-

rielle, car elle est égale avec et sans l'incertitude des paramètres. C'est-à-dire que  $E(\mu) = \hat{\mu}$ .

En reconnaissant que les paramètres du modèle de mortalité sont estimés et non connus avec certitude, la prime de risque de longévité augmente. La différence entre la prime avec et sans l'incertitude est plus significative lorsque les paramètres sont estimés avec l'intervalle court de 1980 à 2004. Pour cette sous période,  $n = 24$  obser-

**TABLEAU 5**  
**PRIME DE RISQUE DE LONGÉVITÉ, AVEC**  
**PARAMÈTRES INCERTAINS, HOMMES ET FEMMES,**  
**CALIBRATION SUR LES ANNÉES 1950-2004,**  
**ÂGES SÉLECTIONNÉS**

<b>Hommes</b>			
Âge	Prime de risque de longévité (pour un niveau de confiance $\alpha$ )		
x	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
55	2.13%	2.84%	4.26%
60	2.46%	3.31%	4.89%
65	2.85%	3.83%	5.66%
70	3.35%	4.43%	6.44%
75	3.89%	5.09%	7.35%
<b>Femmes</b>			
Âge	Prime de risque de longévité (pour un niveau de confiance $\alpha$ )		
x	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
55	2.15%	2.85%	4.10%
60	2.47%	3.26%	4.66%
65	2.85%	3.77%	5.44%
70	3.27%	4.30%	6.40%
75	3.68%	4.85%	7.22%

vations, alors qu'entre 1950 et 2004,  $n = 54$  observations. Lorsque nous analysons les rentiers de 65 ans en utilisant 1950 comme année de départ, la prise en compte de cette nouvelle donne fait passer la prime de risque à un niveau de confiance de 95 % de 3,14 % à 3,83 % et de 3,01 % à 3,77 % pour les hommes et les femmes respectivement. Si 1980 est l'année de départ, la prime de risque avec et sans l'incertitude augmente de 2,95 % à 4,55 % pour les hommes et de

**TABLEAU 6**  
**PRIME DE RISQUE DE LONGÉVITÉ, AVEC**  
**PARAMÈTRES INCERTAINS, HOMMES ET FEMMES,**  
**CALIBRATION SUR LES ANNÉES 1980-2004, ÂGES**  
**SÉLECTIONNÉS**

<b>Hommes</b>			
Âge	Prime de risque de longévité (pour un niveau de confiance $\alpha$ )		
x	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
55	2.49%	3.37%	5.21%
60	2.93%	3.94%	6.08%
65	3.41%	4.55%	7.00%
70	3.88%	5.31%	8.01%
75	4.38%	6.04%	9.12%
<b>Femmes</b>			
Âge	Prime de risque de longévité (pour un niveau de confiance $\alpha$ )		
x	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
55	1.72%	2.28%	3.32%
60	1.95%	2.57%	3.76%
65	2.17%	2.86%	4.22%
70	2.43%	3.20%	4.74%
75	2.67%	3.52%	5.23%

1,88 % à 2,86 % pour les femmes. En moyenne, la prime de risque de longévité augmente de 25 % lorsque  $n = 54$  et de 50 % pour  $n = 24$ .

Nos résultats viennent supporter les conclusions de Dowd *et al.* (2007), qui mentionnent qu'il est important de tenir compte de cet aspect. Comme les taux de mortalité sont disponibles au mieux une seule fois par année, nous devons travailler avec un risque d'estimation et les projections démographiques doivent nécessairement tenir compte de l'imprécision inhérente à la faible fréquence de publication des données.

### 3.4. Risque de modèle

Dans les sections précédentes, lorsque nous calculons la prime actuarielle pour différents âges, nous faisons implicitement l'hypothèse que nous connaissons la dérive des taux de mortalité futurs. Mis autrement, nous assumons que l'espérance des taux projetés par le modèle CBD, selon que nous l'évaluons à partir de 1950 ou 1980, représente la meilleure estimation des conditions de mortalité qui prévaudront aux cours des prochaines années. Le risque de longévité est calculé en fonction de la volatilité autour de cette tendance. Il est possible que ce ne soit pas le cas et que les taux de mortalité suivent une tendance différente. Pour avoir un aperçu de l'éventuelle erreur de modèle, nous proposons de faire un test hors échantillon. Le modèle de mortalité est calibré sur les années 1950-1985. Nous effectuons des simulations sur 19 ans, soit entre 1986 et 2004. Au lieu de bâtir un intervalle de confiance pour chaque taux de mortalité à chaque année de projection, nous convertissons les taux de mortalité en espérance de vie. L'espérance de vie pour l'année  $t$  conditionnelle à l'atteinte de 65 ans, que nous dénotons  $e(t,65)$ , est calculée selon :

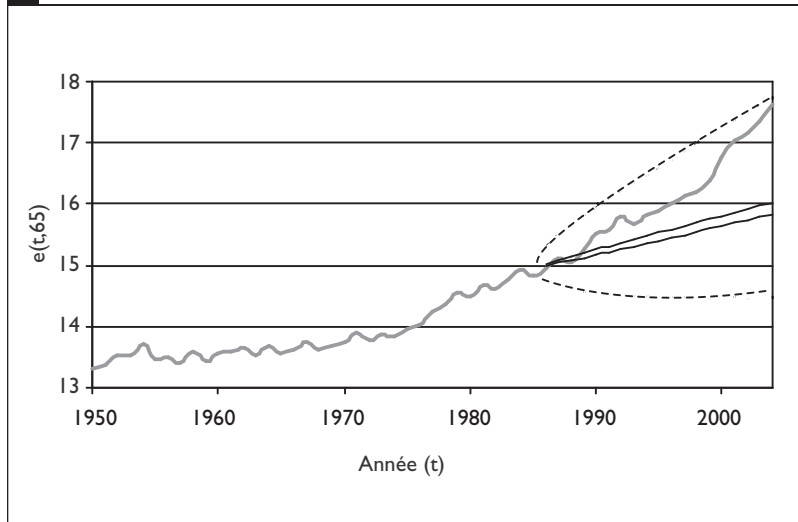
$$e(t,65) = \frac{1}{2} + \sum_{i=66}^{120} s(t,65,i), \quad (10)$$

où  $s(t,65,i)$  est la probabilité qu'un individu de 65 ans à l'an  $t$  survive jusqu'à l'âge  $i$ , si les conditions de mortalité en  $t$  demeurent les mêmes jusqu'à la fin de sa vie. C'est donc l'espérance de vie par année civile, contrairement à l'espérance de vie par cohorte, qui tient compte de l'amélioration future de la longévité. Comme nous voulons comparer les taux de mortalité du modèle avec la vraie mortalité pour une année spécifique, l'espérance de vie par année civile est la mesure appropriée. Le terme  $\frac{1}{2}$  est additionné, car nous assumons que les individus décèdent en moyenne en milieu d'année. Le terme de sommation peut être interprété comme l'espérance du nombre d'anniversaires fêtés. Les graphiques 5 et 6 présentent

des estimations hors échantillon pour les hommes et les femmes. Le segment central est l'espérance de vie pour l'année en question avec l'intervalle de confiance à 10% (ligne pleine) et celui à 95% (ligne pointillée).

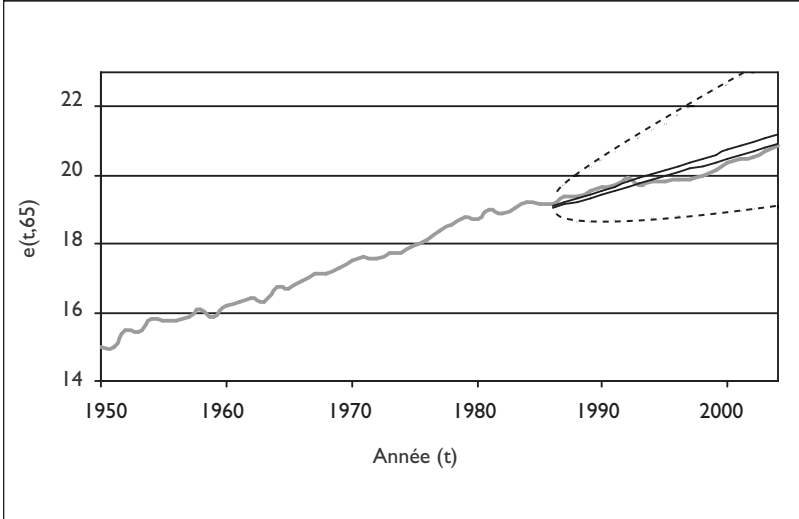
Pour les hommes (graphique 5), l'espérance de vie dépasse à la hausse l'intervalle de confiance à 10% de façon assez significative. Ainsi, la nature linéaire du modèle CBD l'empêche de capter le changement de tendance qui se produit vers le milieu des années 70. Les prédictions du modèle sont bien meilleures dans le cas des femmes (graphique 6) à cause, justement, de l'évolution plus linéaire de la mortalité féminine. Puisque l'intervalle de confiance est plus étroit, l'espérance de vie demeure à l'intérieur des limites à 95% pour les femmes.

**FIGURE 5  
HOMMES, ESPÉRANCE DE VIE PAR ANNÉE CIVILE  
PROJETÉE ENTRE 1986 ET 2004, AVEC INTERVALLE  
DE CONFIANCE À 10% ET 95% SELON LE MODÈLE  
CBD CALIBRÉ ENTRE 1950 ET 1985,  
AVEC PARAMÈTRES INCERTAINS**



Un premier pas vers l'inclusion du risque de modélisation au sein de l'analyse pourrait consister en la comparaison des résultats selon plusieurs familles de modèles et ainsi effectuer une sorte d'étude de sensibilité. Ainsi, à la lumière des quelques indications que nous fournit notre étude, nous devons admettre que le risque

**FIGURE 6**  
**FEMMES, ESPÉRANCE DE VIE PAR ANNÉE CIVILE**  
**PROJETÉE ENTRE 1986 ET 2004, AVEC INTERVALLE**  
**DE CONFIANCE À 10% ET 95% SELON LE MODÈLE**  
**CBD CALIBRÉ ENTRE 1950 ET 1985,**  
**AVEC PARAMÈTRES INCERTAINS**



de modèle est une source d'incertitude notable. Une comparaison de plusieurs modèles dépasse le cadre de ce mémoire. Le fait que l'étude du risque de longévité soit un sujet recherche encore récent fait en sorte que de plus en plus de modèles viendront à être proposés dans les années à venir, ce qui devrait nous permettre de mieux comprendre cet élément de risque additionnel.

#### 4. GESTION DU RISQUE DE LONGÉVITÉ

À ce jour, il existe peu d'outils qui permettent aux entreprises de se protéger contre des erreurs semblables. Cependant, plusieurs approches sont proposées dans la littérature. La majorité d'entre elles consistent en la construction de produits financiers dont les paiements sont dépendants de l'évolution de la mortalité agrégée.

Nous proposons ainsi une approche pour quantifier l'importance du risque de longévité, qui tient compte aussi bien du risque de dérive que du risque de volatilité. Pour ce faire, nous utilisons un



modèle de mortalité stochastique où les paramètres seront estimés à l'aide des tables canadiennes de mortalité, ce qui nous permet de faire des prévisions quant à l'évolution future de l'espérance de vie. La modélisation du risque de longévité nous permet d'étudier les outils qui nous permettraient de réduire de manière significative ce risque. Pour ce faire, nous regarderons des titres financiers dérivés dont l'actif sous-jacent est l'espérance de vie de la population du régime.

Un exemple d'outils financier qui permettrait de réduire le risque de longévité est connu dans la littérature comme « l'obligation de longévité ». Cette obligation verse des coupons annuels dont le montant est proportionnel à un indice de survie. Au moment de l'émission, une population de référence est désignée et l'indice de survie reflète l'évolution de la mortalité à l'intérieure de cette population (une cohorte du même âge), pour la durée de l'obligation. La valeur nominale nette des coupons diminue à chaque date de versement, pour illustrer le fait que certains individus à l'intérieur du groupe décèdent. L'attrait d'une telle obligation pour les régimes de retraite est que si les rentiers vivent plus longtemps que prévu, alors le régime encourt une perte sur son portefeuille de rentes, mais fait un gain sur l'obligation de longévité, car les coupons reçus diminuent moins rapidement.

D'autres auteurs suggèrent des outils différents pour la couverture du risque de longévité. Certains se fondent sur la structure des swaps de taux d'intérêt et proposent les swaps de survie – des swaps qui sont aujourd'hui transigés à la CBOE. Sous sa forme la plus simple, un swap de survie est un très similaire à un swap de taux d'intérêt conventionnel. On peut aussi envisager des produits dérivés de la mortalité tels des titres adossés à la longévité (TAL), similaires aux titres adossés à des créances (TAC). Dans ce cas, les flux monétaires d'un regroupement d'obligations de longévité ou un portefeuille d'annuités sont redirigés vers les tranches du TAL, qui ont chacune une exposition au risque de longévité différente, selon les préférences des investisseurs. Nous pourrions développer ces autres titres financiers dérivés pour gérer le risque de longévité à l'intérieur de l'article.

Jusqu'à tout récemment, le risque de longévité était considéré comme impossible à couvrir et les administrateurs de régimes de retraite n'avaient d'autres choix que de l'assumer entièrement. Depuis peu, quelques options s'offrent aux organismes intéressés à gérer leurs expositions individuelles respectives. Une première concerne le transfert complet du risque de longévité à une contrepartie comme un assureur ou une firme spécialisée dans la réassurance.

Dans un tel transfert, la contrepartie s'engage à honorer les contrats de rentes associés au bloc de passif obtenu en retour des actifs sous-jacents et d'une certaine prime.

Une seconde option possiblement encore plus prometteuse est le transfert du risque de longévité vers les marchés financiers, sous la forme de produits structurés dont la valeur dépend de l'évolution des taux de mortalité. Les marchés financiers ont souvent démontré leur efficacité pour la redistribution à grande échelle de risques spécifiques par le biais de structures financières diverses. Il suffit de penser aux swaps conventionnels pour le risque de taux d'intérêt, aux swaps de crédit (CDS) pour le risque de défaut, aux obligations à rendement réel (TIPS) pour le risque d'inflation, ou d'observer l'ampleur du marché des titres adossés à des hypothèques (MBS) pour s'en convaincre.

Dans cette ligne de pensée, Blake et Burrows (2001) ont suggéré la création des obligations de longévité. Une obligation de longévité est une obligation qui verse des coupons annuels dont le montant est proportionnel à l'évolution d'un indice de survie. Au moment de l'émission, une population de référence est désignée et l'indice de survie reflète l'évolution de la mortalité à l'intérieure de cette population (une cohorte du même âge), pour la durée de l'obligation. Ainsi, la valeur nominale nette des coupons diminue à chaque date de versement, à mesure que les individus de la cohorte de référence décèdent progressivement. Si le taux de survie est plus élevé que ce qui est attendu (*i.e.*, l'espérance de vie est sous-estimée), alors le détenteur de l'obligation encourt une perte sur son engagement de rentes, mais réalise un gain sur l'obligation de longévité, car les coupons reçus diminuent moins rapidement.

D'autres produits financiers ont également été proposés (Blake *et al*, 2006), comme les swaps de survie. Sous sa forme la plus simple, un swap de survie est un très similaire à un swap de taux d'intérêt conventionnel. Il comprend l'échange de flux monétaires fixes contre variables (ou l'inverse). Les flux variables sont versés en fonction de la proportion de survivants d'une certaine population de référence. Ces flux monétaires sont dits variables, car cette proportion est inconnue en date initiale, elle n'est observable qu'au moment des versements périodiques. À l'opposé, les flux monétaires fixes représentent la proportion de survivants à chaque versement, mais telle qu'estimée au moment de l'émission. Les flux monétaires nets représentent donc la différence entre les taux de survie attendus et réalisés. Il est également possible d'envisager des produits dérivés de la mortalité tels les titres adossés à la longévité (TAL) qui s'apparentent aux titres adossés à des créances (CDO). Dans ce cas, les flux monétaires

d'un regroupement d'obligations de longévité ou d'un engagement de rentes viagères sont redirigés vers les tranches du TAL, qui ont chacune une exposition au risque de longévité différente, selon les préférences des investisseurs.

Les produits financiers dérivés de la mortalité représentent une solution de couverture intéressante, mais pour le moment peu exploitée. La principale difficulté technique réside dans le fait que le profil des individus qui composent l'indice de survie doit être le même que celui des pensionnés de l'engagement qui cherche à se couvrir. Cette caractéristique est cruciale, car la corrélation entre ces deux groupes doit être forte pour que la protection soit efficace.

Pour conclure, l'étude du risque de longévité est pertinente à un moment où la réflexion sur les problématiques de financement et de solvabilité des régimes de retraite s'accroît. Les surplus actuariels observés chez de nombreux régimes au cours des années 80 et 90 ne sont aujourd'hui pour la plupart d'entre eux qu'un souvenir du passé. Entre 2000 et 2003, la conjonction d'une chute systématique dans la valeur des actions et d'une diminution des taux d'intérêt a fait en sorte de soustraire 25 % à 50 % au ratio de capitalisation des fonds de pension à travers le monde (Ambachtsheer, 2007). De plus, d'un point de vue démographique, l'espérance de vie continue d'augmenter à une vitesse considérable, mettant ainsi une pression additionnelle sur la valeur de leur passif actuariel. Dans ce contexte, il apparaît aujourd'hui important de se questionner sur l'équilibre financier à long terme de ces organismes. L'analyse de l'évolution de l'espérance de vie et de sa conséquence sur le calcul de la valeur actualisée des engagements de retraite se présentent alors comme des éléments importants de cette remise en question.

## **5. CONCLUSION**

Pour faire un sommaire des principales conclusions auxquelles nous parvenons à la lumière des résultats obtenus aux sections précédentes, nous soulignons les éléments suivants. D'abord, nous estimons qu'une prime d'approximativement 2,5 % de la valeur actualisée d'une rente viagère versée à partir de 65 ans permet de réduire le risque de longévité à un niveau de 10 %. Pour un niveau de confiance de 1 %, la prime est d'environ 4,6 %. Pour des rentes destinées aux femmes, les primes pour les mêmes niveaux de confiance sont légèrement inférieures. Le risque de longévité pour un engagement des rentes viagères immédiates est croissant avec l'âge et la

différence est amplifiée lorsque le taux d'actualisation employé est élevé. Pour des rentes différées, le niveau de risque augmente lorsque l'intervalle de temps entre l'âge actuel du retraité ou du souscripteur et le moment du premier versement augmente.

Le risque de longévité diminue lorsque nous considérons une période récente. Il est approximativement 50 % plus faible pour les femmes lorsque le modèle de mortalité est estimé sur les données entre 1980 et 2004, par rapport à une estimation entre 1950 et 2004. Du côté masculin, le risque diminue également, mais la différence est moins significative. Cependant, la prise en compte de l'incertitude liée à l'estimation des paramètres sur une courte période de temps est non négligeable. En comparaison avec des paramètres connus avec certitude, l'incertitude des paramètres augmente la prime de risque de 25 % pour une calibration faite avec 55 années et de 50 % lorsque la calibration du modèle CBD est effectuée sur 25 années.

Nos résultats se situent dans la fourchette inférieure des valeurs à risque calculées dans d'autres études. Cependant, il est difficile de les comparer directement, car aucune d'entre elles n'examine la mortalité au Canada. Il est possible que la volatilité des quotients de mortalité soit plus faible ici qu'ailleurs. Cet élément constitue une avenue de recherche intéressante. Par exemple, il serait pertinent d'étudier l'effet que peuvent avoir certaines caractéristiques démographiques particulières à chaque pays sur le risque de longévité, comme le degré de diversité culturelle, tel qu'influencé par les politiques gouvernementales d'immigration.

Nous présenterons dans la troisième partie de cette trilogie sur le risque de longévité une étude de cas où nous appliquerons la théorie au cas du régime de retraite de la Gendarmerie royale du Canada. Ce régime propose deux avantages majeurs pour nous : 1- la population couverte est relativement homogène puisque plus de 80 % des cotisants sont des hommes et tout le monde doit prendre sa retraite à 60 ans et 2- une grande partie de l'information dont nous avons besoin est disponible publiquement dans les rapports annuels sur le régime de retraite de la Gendarmerie royale du Canada.

## Références

- Ambachtsheer, Keith P. (2007), *Pension Revolution: A Solution to the Pensions Crisis*, John Wiley & Sons, 336 pages.
- Blake, David et William BURROWS (2001). *Survivor Bonds: Helping to Hedge Mortality Risk*, *Journal of Risk and Insurance*, vol. 68, n° 2, pp. 339-348.

- Blake, David, Andrew J.G. CAIRNS, Kevin DOWD et Richard MACMINN (2006). *Longevity Bonds: Financial Engineering, Valuation and Hedging*, Journal of Risk and Insurance, vol. 73, n° 4, pp. 647-672.
- Cairns, Andrew J.G., David BLAKE et Kevin DOWD (2006). *A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration*, Journal of Risk and Insurance, vol. 73, n° 4, pp. 687-718.
- Dowd, Kevin, David BLAKE et Andrew J.G. CAIRNS (2007). *The Myth of Methuselah and the Uncertainty of Death: The Mortality Fan Charts*, cahier de recherche n° PI-0704, Pensions Institute, Cass Business School, 15 pages.
- Groome, W. Todd, Nicolas BLANCHER et Parmeshwar RAMLOGAN (2006). *Le vieillissement et les marchés financiers. L'État gestionnaire de risques*, Finances et Développement, Magazine trimestriel du Fonds monétaire international, vol. 43, n° 3, pp. 44-47.
- Lee, Ronald D. et Lawrence R. CARTER (1992). *Modeling and Forecasting U.S. Mortality*, Journal of the American Statistical Association, vol. 87, n° 419, pp. 659-671.
- Milevsky, Moshe A. et S. David PROMISLOW (2003). *Can Life Insurance be used to Hedge Payout Annuities? Part 1: Modeling Longevity Risk*, cahier de recherche, York University, 10 pages.

## Note

1. Pour certaines valeurs de  $\mu_2$ , le modèle prédit une dégradation des taux de mortalité. Par contre, les auteurs affirment que, comme le phénomène se produit à un âge avancé, dans leur cas  $>113$  ans, l'impact sur le calcul du taux de survie est négligeable, car la probabilité d'atteindre cet âge est très faible.