Cahiers de la recherche en éducation

La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit

Jean Brun, François Conne, Gisèle Lemoyne and Jean Portugais

Volume 1, Number 1, 1994

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1018326ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1018326ar

See table of contents

Publisher(s)

Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke

ISSN

1195-5732 (print)
2371-4999 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Brun, J., Conne, F., Lemoyne, G. & Portugais, J. (1994). La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit. *Cahiers de la recherche en éducation*, *1*(1), 117–132. https://doi.org/10.7202/1018326ar

Article abstract

This text debates over the notion of mental schema with regard to mathematical algorithms. It is first proposed to enlarge the perspective of studies on systematic errors on to this notion of mental schema as it is defined in the "conceptual area theory". The theory according to which errors would be transitory forms then leads to redefine them as traces of a gradual building of an "algorithmic mental schema". This allows to integrate in the same theoretical perspective both the observations about the organized nature of errors and the functional aspect of the mechanism of assimilation/adaptation at work in those mental schemas. The second part of this text offers series of examples of mistakes that students make that underline the functioning in the adaptation of the "algorithmic mental schema". The third and last part recurs to the theoretical debate and questions the didactic use of error by presenting the account of a recent research in that particular field.

Cahiers de la recherche en éducation, vol. 1, nº 1, 1994, p. 117 à 132

La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit[1]

Jean **Brun**
Université de Genève
François **Conne**
Service cantonal de l'enseignement spécialisé, Lausanne
Gisèle **Lemoyne**
Université de Montréal
Jean **Portugais**
Université de Sherbrooke

Résumé. – Ce texte propose d'ouvrir un débat sur la notion de schème à propos des algorithmes de calcul. Dans une première partie, il est proposé d'élargir la perspective des travaux sur les erreurs systématiques jusqu'à la notion de schème, telle qu'elle est définie dans la «théorie des champs conceptuels». La thèse selon laquelle les erreurs sont des formes transitoires conduit alors à repenser ces erreurs en tant que traces de la construction progressive d'un «schème-algorithme». Cela permet d'intégrer dans une même perspective théorique les constats sur le caractère organisé des conduites erronées avec la fonctionnalité de la dynamique assimilation/accommodation à l'œuvre dans les schèmes. La seconde partie présente des séries d'exemples d'erreurs d'élèves qui mettent en évidence le fonctionnement adaptatif de ce schème-algorithme. La dernière partie revient sur le débat théorique et soulève la question d'un fonctionnement didactique de l'erreur en résumant les résultats d'une recherche récente dans ce domaine.

1 Le présent article se rapporte aux recherches effectuées dans le cadre du projet de recherche du Fonds national de recherche scientifique (Suisse) nº 11-25448.88 qui s'intitule *L'étude des algorithmes de calculs dans la transmission et la constitution des connaissances numériques* (Brun, Conne et Retschitzki, 1988, 1991).

1. Ouverture d'un débat autour des notions de schème et d'algorithme

La théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991) accorde aux schèmes une place centrale et nous pensons pouvoir apporter des arguments allant dans ce sens en procédant à des analyses d'erreurs observées dans des tâches demandant la mise en œuvre d'algorithmes de calcul; plus précisément, la question est de savoir si le caractère automatisé de l'algorithme est compatible avec le caractère dynamique du schème; dans le présent texte, il s'agit de l'algorithme de division.

Citons d'abord longuement Vergnaud pour situer le cadre de l'analyse qui suivra :

> *C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant* [...]. *On peut distinguer :*
>
> *1) des classes de situations pour lesquelles le sujet dispose dans son répertoire, à un moment donné de son développement et sous certaines circonstances, des compétences nécessaires au traitement relativement immédiat à la situation;*
>
> *2) des classes de situations pour lesquelles le sujet ne dispose pas de toutes les compétences nécessaires, ce qui l'oblige à un temps de réflexion et d'exploration, à des hésitations, à des tentatives avortées, et le conduit éventuellement à la réussite, éventuellement à l'échec.*
>
> *Le concept de schème est intéressant pour l'une et l'autre classes de situations, mais il ne fonctionne pas de la même manière dans les deux cas. Dans le premier cas, on va observer pour une même classe de situations, des conduites largement automatisées, organisées par un schème unique; dans le second cas, on va observer l'amorçage successif de plusieurs schèmes qui peuvent entrer en compétition et qui, pour aboutir à la solution recherchée, doivent être accommodés, décombinés et recombinés; ce processus s'accompagne nécessairement de découvertes.*
>
> *Appelons «schème» l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée* (Vergnaud, 1991, 136).

Et plus loin :

> *Le fonctionnement cognitif de l'élève comporte des opérations qui s'automatisent progressivement (changer de signe quand on change de membre, isoler*

x d'un côté du signe d'égalité) et des décisions conscientes qui permettent de tenir compte des valeurs particulières des variables de situation. La fiabilité du schème pour le sujet repose en dernier ressort sur la connaissance qu'il a, explicite ou implicite, des relations entre l'algorithme et les caractéristiques du problème à résoudre. L'automatisation est évidemment l'une des manifestations les plus visibles du caractère invariant de l'organisation de l'action. Mais une suite de décisions conscientes peut aussi faire l'objet d'une organisation invariante pour une classe de situations données. D'ailleurs, l'automatisation n'empêche pas que le sujet conserve le contrôle des conditions sous lesquelles telle opération est appropriée ou non. Prenons, par exemple, l'algorithme de l'addition en numération décimale; son exécution est largement automatisée pour la plupart des enfants à la fin de l'école élémentaire. Pourtant les enfants sont capables de générer une suite d'actions différentes en fonction des caractéristiques de la situation : retenue ou pas, zéro intercalaire ou pas, décimal ou pas. En fait, toutes nos conduites comportent une part d'automaticité et une part de décision consciente. On voit aussi, avec ces exemples, que les algorithmes sont des schèmes, ou encore que les schèmes sont des objets du même type logique que les algorithmes : il leur manque éventuellement l'effectivité, c'est-à-dire la propriété d'aboutir à coup sûr en un nombre fini de pas. Les schèmes sont souvent efficaces, pas toujours effectifs (Vergnaud, 1991, 137-138).

Ce rapprochement entre schèmes et algorithme devrait pouvoir se manifester à travers l'analyse des erreurs des élèves à des tâches de calcul écrit. Examinons ce point par rapport à l'algorithme de division.

En contexte d'enseignement, les erreurs de calcul écrit sont considérées comme des écarts à l'algorithme enseigné. On cherche à localiser, dans le déroulement de l'algorithme, l'étape à laquelle l'erreur a été commise, pour pouvoir apporter ensuite des éléments de correction à cette erreur; la plupart du temps, on insiste sur l'étape incorrecte, ou on l'isole, pour lui faire correspondre une brève séquence d'enseignement corrective. Ce processus est bien mis en évidence par l'analyse de protocoles d'entretiens entre élèves et enseignants aux prises avec des tâches de calcul écrit ou par l'analyse de questionnaires à des enseignants (voir les travaux internes des séminaires de recherche en didactique des mathématiques).

Pour comprendre les erreurs observées, il est nécessaire de laisser de côté le souci de correction; il s'agit de considérer la production de l'élève comme un tout organisé se déroulant dans le temps et, de ce fait, susceptible d'adaptations. À partir de cette production, on infère le cadre interprétatif implicite avec lequel l'élève a traité le calcul. Comprendre les erreurs demande alors de repérer les dimensions à la fois cognitives et didactiques de ce cadre interprétatif de l'élève. Précisons que cette compréhension des erreurs est un objectif de recherche et n'a aucune intention prescriptive envers l'enseignement[2].

Les travaux de Brown et Burton (1978) et ceux de Brown et Van Lehn (1980, 1982) ont permis de franchir une étape importante dans la compréhension des erreurs des élèves; ils en ont montré le caractère organisé en détectant des «erreurs systématiques», c'est-à-dire des régularités entre différents individus et chez un même individu à des moments différents. Ces erreurs se caractérisent par une logique interne qui peut être reproduite, car elles «font système». Les modèles de production mis au point par ces auteurs ont une réelle valeur prédictive. On peut penser que leur théorie décrit également correctement, au moins en partie, les processus mis en jeu par les élèves, en fournissant des pistes sur l'interprétation et l'usage que les élèves se donnent des règles qui leur ont été enseignées (*Repair Theory*). Mais, comme l'a fait remarquer par exemple Resnick (1982), ces modèles se focalisent sur les seuls aspects «syntaxiques» des règles algorithmiques. Il nous faut envisager les aspects conceptuels, numériques, en acte dans ces calculs. C'est alors que la notion de schème est nécessaire pour rendre compte de ces erreurs. Nous ajouterons que le caractère dynamique de l'effectuation du calcul reste à approfondir. Comment les élèves inventent les réglages de leurs calculs au fur et à mesure de leur déroulement? En restent-ils à une automaticité dépourvue d'anticipations et d'inférences?

2. Exemples d'erreurs d'élèves à l'appui de l'interprétation proposée

Le recueil de calculs sur des opérations écrites de «divisions avec reste» que nous avons effectué auprès de six classes d'élèves de cinquième et sixième années primaires a fourni une grande variété d'erreurs. Ces calculs ont été recueillis au moyen d'épreuves écrites individuelles de type papier-crayon. La situation était celle de la classe ordinaire, mais les consignes étaient données par l'expérimentateur; il était mentionné que l'épreuve n'était pas notée et que tous les calculs étaient à effectuer sur

2 Pour une revue critique des recherches anglo-saxonnes sur les erreurs en arithmétique (Bélanger, 1991).

la feuille de l'épreuve (brouillon). Voyons s'il est possible de les comprendre au moyen du cadre conceptuel que nous venons de présenter. La description de ces erreurs nous a permis une première classification en trois grandes catégories (Conne et Brun, 1991) :

Catégorie A – Contrôles des rapports numériques
entre dividende/diviseur/quotient/reste

$$\begin{array}{r|l} 1575 & 15 \\ \cline{2-2} 15 & 141 \\ 0075 & \\ 60 & \\ 15 & \\ 15 & \\ 0 & \end{array}$$

Catégorie B – Opérations intermédiaires, en particulier la soustraction

$$\begin{array}{r|l} 2740 & 14 \\ \cline{2-2} 14 & 198 \\ 134 & \\ 126 & \\ 120 & \\ 112 & \\ 8 & \end{array}$$

Catégorie C – Placement des données dans le diagramme
de l'opération écrite

$$\begin{array}{r|l} 1636 & 18 \\ \cline{2-2} 36 & 23 \\ 600 & \\ 54 & \\ 106 & \end{array}$$

La première catégorie est la plus fournie et la plus intéressante pour notre propos. Il s'agit, en effet, de se demander de quels «contrôles» ou «absences de contrôles» il s'agit et quelles sont les conceptualisations en jeu.

Revenons à la tâche donnée aux élèves, «Effectuer une opération écrite de division avec reste». Une telle tâche relève d'une véritable «connaissance-en-acte» (Vergnaud, 1991) et non de la simple application ordonnée de règles conventionnelles. Mis dans une situation de calcul, l'élève doit anticiper, faire des choix, planifier ses actions, les contrôler, même si, avec l'expérience, il le fait de manière de plus en plus automatique. Il fait tout ceci en fonction de ses propres connaissances numériques et pas seulement de sa maîtrise de l'enchaînement des pas successifs de l'algorithme.

S'agissant de l'algorithme de la division écrite, nous considérerons l'ensemble des conduites nécessaires à son accomplissement comme un seul et même schème; nous parlerons, avec Vergnaud, de «schème-algorithme» qui comporte :

- *des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte);*
- *des anticipations du but à atteindre;*
- *des règles d'action;*
- *des inférences* (Vergnaud, 1991, 159).

Ce schème-algorithme, lorsqu'il est en construction chez l'élève, présente alors différentes organisations (provisoires) que nous pensons pouvoir repérer à travers l'analyse des erreurs recueillies; les «sous-schèmes» qui le constituent, au lieu de se combiner logiquement, peuvent simplement se juxtaposer sans être adaptés à la situation; ils peuvent aussi carrément entrer en conflit, selon le découpage fait de la situation par l'élève et selon les références qu'il retient. Autrement dit, nous considérerons les calculs des élèves comme des tentatives d'adaptations actives à la variété des situations de division présentées, situations dans lesquelles sont mises en œuvre des connaissances dont le choix et l'organisation devraient conduire au terme de la tâche avec succès. Les erreurs sont alors considérées comme des «inventions» qui correspondent à différentes variations de ces choix et de ces organisations.

Si nous insistons sur la signification conceptuelle, à prendre dans son contexte didactique, de ces erreurs de calcul, c'est que, après d'autres chercheurs, nous avons pu constater que si l'on trouve bien des erreurs liées à l'exécution de l'automatisme – ou de la procédure dans sa seule composante de suites d'actions pertinentes – ces erreurs ne suffisent pas, et de loin, à expliquer l'ensemble des erreurs observées. À l'inverse, beaucoup d'erreurs respectent parfaitement la suite des actions à exécuter, mais s'expliquent par des combinaisons originales de connaissances et de règles, combinaisons qui, au lieu de se contrôler les unes les autres, se justifient d'elles-mêmes et ainsi s'enchaînent. Nous allons en voir de nombreux exemples.

Reprenons la catégorie d'erreurs de division correspondant aux divers contrôles des rapports entre dividende/diviseur, quotient et reste. Nous sommes en mesure de distinguer dans cette catégorie plusieurs organisations du schème-algorithme en construction; dans ces organisations, nous incluons «le diagramme» (Conne, 1988) sur lequel fonctionne l'algorithme. On ne peut, en effet, dissocier les opérations du système de signifiants; la disposition graphique de l'opération prend en charge, organise même, l'action, et masque aussi, par la même occasion, le sens de la suite des actions nécessaires à l'effectuation de l'opération.

Notre constat essentiel à partir des erreurs observées est qu'un schème de base fonctionne très bien chez l'élève et lui sert à assimiler l'ensemble des situations de division. Ce schème peut être décrit comme le schème «partager-distribuer» et correspond aux situations proposées dans le manuel scolaire (Manuel *Mathématique Sixième année*, 1985). En effet, pour l'élève, il semble que la division consiste d'abord à partager une quantité, ce partage étant défini par une autre quantité, celle des parts à distribuer. Diviser serait donc en quelque sorte partager du point de vue du dividende et distribuer du point de vue du diviseur, les deux termes entretenant un rapport de contenant à contenu. Ceci renvoie au schème d'action des situations qui marquent les débuts de l'apprentissage de la division.

Ce schème renvoie ensuite aux situations numériques telles que décrites par Condorcet au XVIII^e siècle :

> *Par exemple, ayant le nombre 2124 vous pouvez vouloir connaître combien de fois il faut répéter le nombre 6 pour former 2124; combien de fois le nombre 6 est contenu dans 2124; ou bien, connaître le nombre qui, répété six fois, est égal à 2124, qui est contenu six fois dans 2124.»* (Condorcet, 1988, 51, 74-75).

Les situations de calcul présentées aux élèves offrent, par leur variété, diverses résistances à ce schème assimilateur; c'est alors que se forgent différentes erreurs liées aux caractéristiques des situations et aux manières d'accommoder le schème aux situations. C'est ce que nous montre l'analyse des erreurs qui suit à partir des différentes situations[3].

---

3 Nous considérerons chaque pas de l'algorithme comme une nouvelle situation de calcul pour l'élève; l'effectuation du calcul peut être comprise comme le contrôle

2.1 Situations où le dividende est égal au diviseur

Le schème «partager/distribuer» fonctionne pour certains élèves à la seule condition que le dividende soit plus grand que le diviseur. La situation où le dividende est «seulement» égal au diviseur ne peut être assimilée par le schème car, selon ces élèves, la quantité à partager devrait être plus grande que les parts à distribuer, sinon on ne «partage» pas le dividende; l'élève abaisse alors la colonne suivante pour se mettre dans la situation où «dividende est plus grand que diviseur».

On a donc, dans ces situations, une impossibilité pour l'élève de diviser lorsque le découpage du dividende = diviseur (premier pas de l'algorithme, ici 9 : 9). Dans les exemples qui suivent, une règle de numération est coordonnée au schème «partager/ distribuer» à chaque position de l'écriture du quotient, le plus grand nombre possible est 9, comme ici :

```
a)  9009 | 9                 b)  7147 | 7
    81   |-----                  63   |-----
     90  | 999                    84  | 999
     81  |                        63  |
      99                          217
      81                           63
      18                          154
```

On retrouve ce fonctionnement «restrictif» du schème dans le cas suivant où le reste est égal au diviseur :

```
c)  7344 | 18
    72   |-----
     144 | 407
     126 |
   r. 18
```

2.2 Situations où les restes partiels sont plus grands que le diviseur

Le schème «partager/distribuer» fonctionne très bien; il peut être coordonné avec une règle contraignante liée à la numération : «9 est le

---

mutuel des pas les uns par les autres. Il faut en effet comprendre le terme de «contrôle» comme étant essentiellement une mise en relation de connaissances et pas seulement comme évaluation *a posteriori*.

plus grand chiffre possible au quotient», si bien que, lorsque se présente la possibilité de contrôler le calcul par le rapport reste/diviseur, l'élève ne résout pas ce problème du contrôle du rapport reste/diviseur. Il le transporte avec lui jusqu'à l'indice de fin du calcul (la dernière colonne). On a alors une succession de 9 au quotient; c'est le cas des exemples précédents, ou encore du suivant :

a)

60363	9
45	5999
153	
81	
626	
81	
5453	
81	
5372	

Note. – On ne tient pas compte des erreurs de soustraction dans cette analyse. Ce type d'erreur est pris en compte dans une autre catégorie de la typologie.

Le schème «partager/distribuer» peut par contre s'imposer très fortement pour résoudre le problème du rapport reste/diviseur, au point de délaisser, cette fois, les règles de numération associées. On observe alors des nombres à deux chiffres au quotient :

b)

60363	7
56	85 12 3
43	
35	
86	
84	
23	
21	

Au lieu d'un nombre à deux chiffres, on trouve également une succession de nombres pour un seul et même dividende; celui-ci a fait l'objet de partages successifs.

c)

13117	13
13	10081
0117	
104	
13	

C'est une forme du schème où la recherche d'un reste inférieur au diviseur se dispense d'une autre manière des règles de la numération de position. Ce fonctionnement peut aller jusqu'à prendre la forme d'une succession de 1 au quotient, correspondant à un enchaînement de soustractions successives :

d)

25125	125
125	111
126	
125	
125	
125	

e)

540060	901
901	11111
4499	
901	
3598	
901	
2697	
901	
1796	
901	
8956	

2.3 Situations où le dividende est plus petit que le diviseur

Dans ces cas, le schème «partager/distribuer» n'est pas alimenté; d'où

Passage à la colonne suivante et absence de 0 au quotient

7344	18
72	48
144	

En l'absence de colonne suivante, arrêt du calcul

18202	901
1802	2
182	

2.4 Situations avec un reste final plus petit mais proche du diviseur

Le schème fonctionne encore, malgré l'indice de fin du calcul; il est alimenté du fait d'un «gros» reste, et ce, de deux façons :

Zéro supplémentaire au quotient

568	368
368	10
200	

Inscription de 1 au quotient[4]

7829	39
78	21

4 La caractéristique de cette dernière tâche étant un reste de 29 susceptible d'entraîner un nouveau chiffre au quotient du fait d'un «gros reste».

L'examen des erreurs des élèves que nous venons de faire semble bien justifier l'explication en termes de schèmes; en effet, ce qui apparaît clairement c'est le caractère dynamique et organisé de ces erreurs : dynamique en ce sens que le calcul forme un tout; il se déroule selon une logique interne qui sert à négocier pour ainsi dire les différentes contraintes de l'algorithme, les unes étant jugées incontournables et d'autres négligeables, afin d'arriver sans encombre au terme du calcul. Ce sont des erreurs systématiques certes, mais dont la sytématicité relève d'une organisation des connaissances numériques de l'élève par adaptation aux propriétés de la situation, et pas seulement de la syntaxe de l'algorithme.

Bien sûr, en face de cet exemple :

60363	9
45	5999
153	
81	
626	
81	
5453	
81	
5372	

nous aurions pu nous contenter de dire : l'erreur est d'avoir choisi 5 x 9, 45 au lieu de 6 x 9, 54. C'est vrai, mais nous serions passés à côté de ce qui constitue effectivement le calcul; en effet, l'élève considère le calcul comme un tout : il peut continuer «tant que ça marche», il peut revenir en arrière, attendre d'avoir terminé pour vérifier... D'ailleurs, dans cette même situation certains élèves se corrigent : après avoir mis 5, ils mettent 6. D'autres élèves, comme celui-ci, poursuivent leur calcul en adoptant des règles qui se veulent respectueuses de l'algorithme et ils adaptent leurs connaissances à la situation. Si l'on ne cherche pas à saisir ces mouvements de la pensée, on passe à côté, nous semble-t-il, de la compréhension des erreurs pour se focaliser sur le catalogue pointilliste de leur relevé et de leur localisation. C'est là, selon nous, un intérêt majeur que l'on peut retenir de l'utilisation du cadre d'analyse que nous proposons.

L'ensemble des calculs que nous avons passés en revue ont un schème commun : «partager/distribuer»; c'est une connaissance qui fonctionne. On pourrait même dire qu'elle fonctionne si fort qu'elle écrase dans certaines situations les autres connaissances et règles à mettre en jeu (par exemple, celles qui tiennent au fait que l'algorithme partage le nombre en parts successives les plus grandes possibles, en tenant compte de la numération de position (voir l'exemple 2.2b). Dans d'autres situations, elle se heurte aux exigences de la numération de position (voir exemples du n° 1).

Nous sommes également frappés par le fait que ces adaptations affectent surtout les formes écrites du calcul. Le lecteur attentif aura en effet remarqué que, pour beaucoup d'exemples d'erreurs cités, la preuve «Dividende = Diviseur x Quotient + Reste» se révèle être «vraie» (voir exemples 2.1a et 2.1b). Simplement, l'algorithme n'a pas été respecté; à l'efficacité du schème, il manque l'effectivité de l'algorithme, pour reprendre la formulation de Vergnaud. Faut-il d'ailleurs parler encore d'erreurs, ou ne s'agit-il pas plutôt seulement d'échecs?[5]

Certaines formes des calculs observés se présentent comme un mélange de différentes figures de l'algorithme telles qu'elles sont enseignées aux étapes considérées comme intermédiaires de l'apprentissage de cet algorithme. Nous avons appelé «hybrides» ces formes (Conne et Brun, 1991). Par exemple, les élèves mêlent des procédures additives (soustractions successives) aux écritures multiplicatives requises par la numération de position décimale. Nous avons montré ces exemples plus haut (voir 2.2b, c, d, e). Les emprunts que font ainsi les élèves à diverses situations scolaires de référence nous semblent bien caractéristiques d'un processus de recherche active d'adaptation aux situations de calcul. Ces situations scolaires sont volontairement variées dans les manuels en vigueur, et ce, tant en Suisse (Manuel *Mathématique, Sixième année*, 1985) qu'au Québec (Manuels *Défi mathématique* de 5^{e} et de 6^{e} années). Malheureusement, ces situations de référence semblent surtout encombrer les élèves au lieu d'encourager la mobilité des combinaisons dont ils ont l'initiative. En effet, elles fixent des formes à ces combinaisons. Sans doute, on mésestime le travail que demande l'abandon de ces formes prévues pour être intermédiaires dans l'apprentissage. C'est pourquoi tabler sur la variation des formes pour en abstraire l'invariance du schème-algorithme relève d'une option didactique qui comprend l'apprentissage

5 Nous reprenons cette distinction erreur/échec des travaux de Salin (1985).

comme une progression contrôlable par la progression des présentations de l'enseignement (Conne et Brun, 1991). C'est à nos yeux ne pas rendre justice au travail d'adaptation active des schèmes, véritable source de l'apprentissage. C'est ce travail que nous pensons avoir mis en évidence chez les élèves à travers l'analyse de leurs erreurs.

3. Un retour sur les différentes positions théoriques et une entrée sur la question du traitement didactique de l'erreur

Nos résultats manifestent que les erreurs ne correspondent pas à une absence de contrôle sémantique ou conceptuel; au contraire, parfois il y aurait excès, avec des centrations et des manques de coordination, serions-nous tentés d'ajouter. Pour l'élève, c'est le réglage de ce contrôle qui reste à trouver, d'où ses erreurs; il négocie, comme nous disions plus haut, différentes contraintes, qui sont chez lui de véritables connaissances, sans aboutir encore à l'équilibre que constitue le schème-algorithme. La théorie de la réparation de Brown et Van Lehn est donc insuffisante pour rendre compte des erreurs observées, et pas seulement parce qu'elle ne prendrait en considération que les seuls aspects syntaxiques. Les erreurs ne sont pas des rafistolages succédant à des impasses. La fluidité de l'effectuation du calcul nous frappe plus que sa segmentation. Nous l'expliquons plutôt comme des tentatives d'adaptations actives de l'élève à la situation.

Dans ces conditions, quels moyens didactiques peuvent être proposés? Fuson (1986) propose pour la soustraction une procédure d'enseignement dont le principe, correspondant à celui de Dienes, consiste à assurer une correspondance étroite entre les actions qu'effectue l'élève sur un matériel et les transformations sur le calcul écrit. Le risque est que l'élève ne fasse que coder sa procédure d'action et ne soit pas, de fait, amené à réfléchir sur les transformations, c'est-à-dire sur les connaissances numériques en jeu. Contrairement aux apparences, c'est moins de lacunes à caractère numérique ou numéral dont les erreurs de division présentées témoignent que d'un contrôle (au sens d'exploitation adaptée des connaissances disponibles) encore incertain ou fragile, comme si cette curiosité qu'est l'algorithme résistait encore à l'exploration que l'élève a pu en faire jusque-là. C'est pourquoi notre stratégie didactique serait précisément de considérer un algorithme comme une curiosité à explorer au moyen des connaissances numériques et numérales dont on dispose, jusqu'à ce qu'on puisse en retrouver la clé. C'est l'hypothèse de travail qui nous guidera pour le montage de situations didactiques.

Enfin, une question essentielle pour comprendre les erreurs observées a trait au fonctionnement didactique de ces erreurs. Cette question a été étudiée dans le cadre de nos travaux de recherche sur la formation des enseignants (Portugais, 1992). Mis en situation d'enseigner des techniques de calcul en colonnes, des enseignantes et des enseignants en formation initiale ont dû imaginer et réaliser plusieurs séquences didactiques à l'intérieur d'un dispositif de formation qui devait les amener à prendre en charge des erreurs avec les élèves. Un des résultats le plus significatif est le repérage d'un grand nombre (26) de «stratégies de travail de l'erreur» différentes chez les futurs enseignants et enseignantes. Un second résultat est l'évolution des futurs maîtres à l'intérieur de cet ensemble de stratégies. Progressivement, le dispositif de formation les amène à articuler leurs diagnostics des erreurs des élèves avec un travail effectif de ces erreurs auprès des élèves, ainsi qu'à une approche conceptuelle des apprentissages des algorithmes. Les stratégies de travail de l'erreur se situent sur un axe dont un pôle est celui des stratégies visant un «contrôle du sens» des opérations en jeu et l'autre pôle concerne les stratégies orientées sur les seules actions des élèves. L'évolution des stratégies des futurs maîtres se fait en direction d'une majoration des «contrôles du sens». Il y a donc une modulation possible des fonctionnements didactiques des erreurs en fonction des propriétés de la situation construite par l'enseignante ou l'enseignant.

Références

BÉLANGER, M. (1991).
Les erreurs en arithmétique. Un siècle de présomption américaine. *Petit* χ, *26*, 49-71.

BROWN, J.S. et BURTON, R.R. (1978).
Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2*, 155-192.

BROWN, J.S. et VAN LEHN, K. (1980).
Repair theory : A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science, 4*, 379-426

BROWN, J.S. et VAN LEHN, K. (1982).
Toward a generative theory of bugs in procedural skills. In Carpenter, T., Moser, J. et Romberg, T. (éd.), *Addition and subtraction : A cognitive perspective.* Hillsdale [NJ] : Lawrence Elbaum Associates.

BRUN, J., CONNE, F. et RETSCHITZKI, J. (1988).
L'étude des algorithmes de calcul dans la transmission et la constitution des connaissances numériques. Projet subventionné par le Fonds national de recherche scientifique, nº 11.25448,88, Suisse.

BRUN, J., CONNE, F. et RETSCHITZKI, J. (1991).
L'étude des algorithmes de calcul dans la transmission et la constitution des connaissances numériques. Rapport final FNRS, Suisse.

CONDORCET, M.J.A. (1743-1794).
Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité (Réédition 1988). Paris : ACL Éditions.

CONNE, F. (1988).
Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(1), 71-116.

CONNE, F. et BRUN, J. (1991).
Analyse de brouillons de calcul d'élèves confrontés à des items de divisions écrites. Proceedings of PME XV. International group for the psychology of mathematics education. Assisi [Italie] : 29 juin - 4 juillet 1991.

FUSON, K. (1986).
Role of representation and verbalization in the teaching of multi-digit additions and subtractions. *European Journal of Psychology of Education, 1*(2), 35-56.

PORTUGAIS, J. (1992).
Didactique des mathématiques et formation des enseignants; le cas des erreurs de calcul. Thèse de doctorat nº 195, Université de Genève, FPSE.

RESNICK, L.B. (1982).
Syntax and semantics in learning to subtract. *In* Carpenter, T., Moser, J. et Romberg, T. (éd.), *Addition and subtraction : A cognitive perspective.* Hillsdale [NJ] : Lawrence Elbaum Associates.

SALIN, M.H. (1976).
Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. Mémoire de DEA de didactique des mathématiques. IREM de Bordeaux.

VERGNAUD, G. (1991).
La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2-3) 133-169.

Abstract. – This text debates over the notion of mental schema with regard to mathematical algorithms. It is first proposed to enlarge the perspective of studies on systematic errors on to this notion of mental schema as it is defined in the «conceptual area theory». The theory according to which errors would be transitory forms then leads to redefine them as traces of a gradual building of an «algorithmic mental schema». This allows to integrate in the same theoretical perspective both the observations about the organized nature of errors and the functional aspect of the mechanism of assimilation/adaptation at work in those mental schemas. The second part of this text offers series of examples of mistakes that students make that underline the functioning in the adaptation of the 'algorithmic mental schema'. The third and last part recurs to the theoretical debate and questions the didactic use of error by presenting the account of a recent research in that particular field.

Resumen. – Este texto propone abrir el debate sobre la noción de esquema aplicado a los algoritmos de cálculo. En primer lugar, se propone ampliar la perspectiva de los trabajos que se refieren a los errores sistemáticos incluyendo la noción de esquema tal y como está definida en la «teoría de los campos conceptuales». La tesis según la cual los errores son formas transitorias conduce a repensar estos errores como huellas de la construcción progresiva de un «esquema-algoritmo». Esto permite integrar en la misma perspectiva teórica, el carácter organizado de las conductas erróneas en las que se constata la función de la dinámica asimilación/acomodación utilizada en los esquemas. La segunda parte presenta una serie de ejemplos de errores cometidos por los alumos que ponen en evidencia el funcionamiento adaptado de este esquema/algoritmo. Por último, se discute de nuevo el debate teórico que conduce a la cuestión de un funcionamiento didáctico del error a través del resumen de los resultados de una investigación reciente en este campo.

Zusammenfassung. – Mit diesem Text wird der Begriff des Schemas in Hinblick auf die Rechenalgorithmen zur Debatte gestellt. Im ersten Teil wird vorgeschlagen, die Perspektive der Arbeiten über systematische Fehler bis hin zum Begriff des Schemas zu erweitern, wie dieser in der «Theorie der begrifflichen Felder» definiert ist. Über die These, nach der Fehler vorübergehende Formen sind, kommt man dann zur Neuauffassung dieser Fehler als Spuren des progressiven Aufbaus eines «Algorithmus-Schemas». Auf diesem Wege können die Feststellungen über den organisierten Charakter der Fehlleitungen mit der Tätigkeit der Assimilation-Akkomodations-Dynamik innerhalb der Schemen auf einer gleichen theoretischen Ebene integriert werden. Im zweiten Teil wird durch eine Reihe von Fehlerbeispielen dargelegt, wie anpassungsfähig dieses «Algorithmus-Schema» funktioniert. Um wieder auf die theoretische Fragestellung zurückzukommen, wird dann im letzten Teil die mögliche didaktische Funktion des Fehlers erörtert. Dazu werden die Ergebnisse einer vor kurzem angestellten Untersuchung zusammenfassend dargestellt.