Philosophiques

Les ouvrages d'Yvon Gauthier

Gauthier, Yvon, *Fondements des Mathématiques, Introduction à une philosophie constructiviste*. Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1976, 460 p.

Serge Robert

Volume 6, Number 1, avril 1979

URI: https://id.erudit.org/iderudit/203110ar
DOI: https://doi.org/10.7202/203110ar

See table of contents

Publisher(s)

Société de philosophie du Québec

ISSN

0316-2923 (print)
1492-1391 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Robert, S. (1979). Les ouvrages d'Yvon Gauthier / Gauthier, Yvon, *Fondements des Mathématiques, Introduction à une philosophie constructiviste*. Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1976, 460 p. *Philosophiques*, *6*(1), 119–130. https://doi.org/10.7202/203110ar

ÉTUDES CRITIQUES

LES OUVRAGES D'YVON GAUTHIER

par Serge Robert

1 - GAUTHIER, Yvon, *Fondements des Mathématiques, Introduction à une philosophie constructiviste*. Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1976, 460 p.

A) Mathématiques, philosophie et fondements des mathématiques

Au tout début de l'avant-propos, l'auteur nous avertit qu'il ne s'agit ni d'un manuel, ni d'un traité, pour ensuite nous informer de la difficulté de traiter des fondements des mathématiques. Selon Gauthier, les développements récents des mathématiques rendent inadéquates les thèses philosophiques traditionnelles sur les mathématiques, mais, en même temps, ces mathématiques nouvelles ne peuvent chercher leurs fondements sans s'adjoindre une part de réflexion philosophique. C'est pourquoi les fondements des mathématiques sont désormais, surtout depuis Kreisel, une discipline autonome qui dépasse les limites des mathématiques classiques et de la philosophie traditionnelle. Pour être plus précis, disons que la thèse fondamentale de l'auteur est la suivante : en essayant de résoudre les impasses des mathématiques classiques trop empreintes de tradition métaphysique, la recherche fondationnelle aboutit à une conception constructiviste des mathématiques. Cette conception pourrait d'ailleurs servir de fondement à toute entreprise scientifique.

Cette situation intermédiaire des fondements des mathématiques pose des problèmes qui rendent le livre peu pédagogique. Pour faire de l'ouvrage un traité qui se suffit à lui-même, l'auteur aurait dû s'astreindre à la difficile tâche d'exposer les thèses métaphysiques traditionnelles et de montrer en quoi leurs postulats gratuits orientent les mathématiques classiques dans les chemins de l'impalpable, de l'irrationnel et du mystique, pour ensuite exposer les théories mathématiques modernes qui débarrassent la philosophie de ces limites métaphysiques et montrer en quoi elles y parviennent. Au lieu de cette démarche analytique, l'auteur a préféré rassembler des conférences et des articles distincts, tout en les plaçant dans un ordre qui donne tout de même une certaine systématisation à l'ouvrage. À cause de cette option, il en résulte plusieurs répétitions et des argumentations souvent sommaires. Du point de vue du contenu mathématique, trop de notions sont supposées connues, parfois le symbolisme n'est pas défini, enfin, on passe trop cavalièrement d'une théorie à l'autre. Quant à la partie philosophique de l'œuvre, elle est plus esquissée que systématisée. En somme, l'ouvrage est davantage un assemblage d'intuitions qu'une entreprise exhaustive. Compte tenu de l'intérêt scientifique et épistémologique des thèses de Gauthier, le moins que l'on puisse dire est qu'il défend mal sa cause et que le public auquel il s'adresse en est inutilement restreint.

B) La portée fondationnelle des mathématiques modernes

Passons maintenant au contenu de l'ouvrage, en relevant d'abord ce que l'auteur retient de la recherche fondationnelle en mathématiques. Pour lui, la crise des fondements des mathématiques commence quand Russell soulève des paradoxes dans la théorie des ensembles de Frege et qu'il tente de les résoudre par la théorie des types. À partir de là, Hilbert va créer une nouvelle science, la métamathématique, par laquelle il va tenter une réduction formaliste des mathématiques à des théories axiomatiques consistantes. On sait qu'il y parviendra en ce qui concerne l'analyse classique, mais on connaît d'autre part le célèbre théorème de Gödel selon lequel on ne peut faire de même avec l'arithmétique récursive. Devant l'échec du formalisme mathématique, la recherche fondationnelle prend désormais, avec Kreisel, une orientation constructiviste, pour laquelle une analyse critique et une redéfinition des concepts et des principes mathématiques s'imposent. Pour Gauthier, il s'agit alors de poursuivre cette constructivisation des mathématiques contre les philosophies traditionnelles des mathématiques et de situer, d'un point de vue épistémologique, les mathématiques dans l'ensemble des productions théoriques.

Les théories mathématiques fondationnelles sur lesquelles l'auteur va appuyer son constructivisme sont 1°) la théorie des ensembles, 2°) l'intuitionnisme et 3°) la théorie des catégories et des « topoi ».

1°) *La théorie des ensembles*

Relativement à la définition que Cantor donne de la notion d'ensemble comme rassemblement d'objets en un tout, l'auteur nous montre que l'ensemble est considéré davantage comme un procès que comme une totalité déjà constituée. Mais les développements ultérieurs de la théorie des ensembles vont privilégier le réalisme des ensembles constitués, contre la conception des ensembles comme constructions. Ainsi, les ensembles mathématiques infinis seront considérés comme des réalisations de l'infini actuel. Cantor va d'ailleurs fonder ce réalisme métaphysique des ensembles infinis sur Dieu, en tant qu'il serait fondement de l'infini. C'est à partir de ce point de vue que Cantor définira un ordinal comme étant un ensemble transitif bien ordonné par la relation d'appartenance. Un bon ordre sur un ensemble est un ordre total sur tous ses sous-ensembles qui possèdent un premier élément. Il définit ensuite le cardinal d'un ensemble en tant qu'il est le plus petit ordinal qui a la même puissance que cet ensemble (c'est-à-dire, qui lui est équipotent). Enfin, deux ensembles sont équipotents si et seulement si on peut établir une bijection entre eux (théorème de Cantor-Bernstein).

Par ces distinctions conceptuelles, la théorie classique des ensembles a pu distinguer les ensembles finis et les ensembles infinis. Un ordinal fini a un prédécesseur immédiat et ne peut avoir de sous-ensemble propre qui lui soit équipotent. Inversement, un ordinal infini n'a pas de prédécesseur immédiat et possède au moins un sous-ensemble propre qui lui est équipotent (cf. Dedekind). Un ordinal infini a donc au moins un cardinal qui ne lui est pas égal. Pour résoudre cette apparente contradiction, Cantor élabore la théorie des nombres transfinis, où ordinaux et cardinaux seront distincts. L'hypothèse du continu établit alors que l'ensemble des parties du premier cardinal transfini (qui est égal à l'ensemble infini dénombrable des nombres naturels) est égal au deuxième cardinal transfini (c'est-à-dire à l'ensemble des nombres réels). Comme l'ensemble des nombres réels est égal à 2 élevé à la puissance infinie, il constitue un ensemble infini non dénombrable.

La théorie Cantor-Dedekind a été, par la suite, systématisée sous forme de théorie axiomatique dans le programme logiciste de Frege et Russell. Mais cette réduction logiciste de la théorie des ensembles ne s'est avérée qu'un succès relatif, puisque des axiomes comme ceux du choix et de l'infini n'ont pu y recevoir une formulation logique. Zermelo et Fraenkel ont, par contre, réussi à formuler une théorie axiomatique sur les ensembles sans se contraindre à la formulation logique des axiomes. Dans cette théorie Zermelo-Fraenkel, les axiomes de substitution, du choix et de l'infini supposent l'existence de l'infini actuel. Disons enfin qu'en ce qui concerne l'hypothèse du continu, Gödel a démontré, par un modèle constructible, sa consistance dans la théorie de Zermelo-Fraenkel, et Cohen a inversement démontré, par un modèle générique, la consistance de sa négation dans la même théorie. L'hypothèse du continu est donc indépendante dans la théorie de Zermelo-Fraekel.

Relativement à ces développements de la théorie des ensembles, la position de Gauthier consiste à revenir à la définition cantorienne d'un ensemble et à insister sur son caractère de procès d'ensemblage. Il considère le postulat réaliste de l'infini actuel, de même que le concept de transfini, comme des concepts transarithmétiques. Pour faire l'économie de cette métaphysique dont les mathématiques peuvent se passer, l'auteur refuse tout concept d'infini (y compris l'infini potentiel) pour le remplacer par l'effini. Une notion mathématique effinie est définissable finitairement par une règle de génération applicable de façon non finie. C'est par de telles règles que la totalité des ensembles (de l'ensemble vide et des ordinaux finis à tous les ordinaux effinis) est constructible comme structure cumulative des rangs d'ensembles, à partir de l'opération de l'ensemble des parties d'un ensemble.

2°) *L'intuitionnisme*

Contre la logique classique qui ne fonctionne que d'un point de vue fini et discontinu, Gauthier prend appui sur la logique intuitionniste que Heyting a construite pour mieux rendre compte de la complexité de l'univers mathématique. La logique intuitionniste est une logique classique sans principe du tiers exclu, avec toutes les conséquences que cette absence implique. De plus, la vérité des lois s'y ramène à la construction d'une preuve. De cette façon, la logique intuitionniste respecte la conception intuitionniste des mathématiques que Brouwer a développée, et selon laquelle les mathématiques sont basées sur l'intuition du mouvement de la pensée, par une saisie de l'unité engendrant la dualité par duplication.

À partir de la critique constructiviste de l'intuitionnisme, qu'on retrouve chez Kreisel dans la théorie du sujet créateur, Gauthier retient le projet de reconstruction intuitionniste des mathématiques, mais en refusant le divorce brouwerien de la pensée et du langage. Contre une substantification de la pensée, le constructivisme la ramène au langage produit. L'auteur définit alors l'activité scientifique comme des relations de stases. Une stase est un acte qui détermine une construction dans un champ idéal indéfini. Les stases sont reliées entre elles par un procès combinatoire (sans itération) ou séquentiel (avec itération). Un procès fini est borné pré- et post-positionnellement dans un champ stasique défini, tandis qu'un procès effini n'a pas de borne post-positionnelle. Dans le constructivisme gauthiérien, une construction mathématique est un acte linguistique définitionnel fini dont le résultat peut être indéfiniment itérable. À partir de ces définitions, l'auteur affirme qu'une théorie générale des mathématiques serait possible et qu'elle aurait l'avantage d'éviter le postulat métaphysique d'infini, considéré comme inutile et limitatif.

3°) *La théorie des catégories et des « topoi »*

Issue de la topologie algébrique et de l'algèbre homologique, la théorie des catégories (cf. MacLane et Grothendieck) concerne les fondements des mathématiques, dans la mesure où elle est une généralisation des concepts mathématiques et une théorie des situations mathématiques symétriques. Mais ce qui retient davantage l'intérêt de l'auteur, c'est la conjonction de la théorie des catégories et de la géométrie algébrique, que Lawvere a réalisée pour produire la théorie des « topoi ». On obtient ainsi une géométrisation de la logique et une logicisation de la géométrie. La logique intuitionniste y reçoit une représentation géométrique. Enfin, comme la théorie des ensembles, la théorie des catégories est formalisable finitairement dans la structure cumulative des rangs. C'est à partir de cette possibilité de définir et de formaliser, par un procès fini de construction, des théories qui possèdent un degré de généralité mathématique comme ces deux-là, que Gauthier fonde en dernière instance la théorie constructiviste des fondements des mathématiques.

C) Les conclusions fondationnelles : la spécificité du constructivisme

Depuis la querelle des universaux, le débat philosophique sur la science s'est canalisé dans une opposition entre le réalisme et le nominalisme. Ou bien le discours de la science est fondé dans une réalité extra-scientifique qui rend cette science possible (réalisme), ou bien il n'est qu'un système explicatif qui peut se passer de la foi en l'adéquation avec un réel donné (nominalisme). En refusant l'acte de foi réaliste, le nominalisme ouvre à l'activité scientifique des possibilités d'explication pour ce qui tombe autrement sous le coup de la croyance. En mathématiques, la réflexion philosophique traditionnelle a aussi oscillé entre ces deux pôles. Dans un deuxième temps, qui remonte à Frege, la recherche fondationnelle en mathématiques s'est orientée dans le sens de la reconstruction logique. Aujourd'hui, Gödel ayant démontré les limites d'une telle entreprise, cette recherche s'oriente dans le sens du constructivisme.

Comme le constructivisme naît de l'échec du formalisme, l'opposition réalisme-nominalisme se transforme en conflit du structuralisme et du constructivisme. Voilà donc pour Gauthier le principal effet de la recherche mathématique fondationnelle sur la philosophie des sciences : un déplacement de la théorie de la science vers d'autres pôles. Il s'agit alors pour l'auteur de faire une théorie de la production scientifique, c'est ce qu'il appelle une théorétique. En ce sens, l'ouvrage est une introduction à la théorétique des mathématiques. Pour aller plus loin, il lance l'idée d'une métathéorétique, c'est-à-dire une théorie générale des différentes théories scientifiques possibles.

En décrivant les mathématiques comme structures constituées, le structuralisme est, selon Gauthier, la forme moderne que prend le réalisme. C'est ce point de vue que l'on retrouve de la croyance cantorienne en l'infini actuel jusqu'aux *Éléments de Mathématiques* de Bourbaki. En opposition au structuralisme, le constructivisme tient lieu de néo-nominalisme. La science n'a pas à postuler une adéquation, dont elle n'a pas besoin, entre son discours et un donné. La science n'est qu'un langage, dont les structures sont le résultat d'une construction. En dépassant le réalisme structuraliste, le constructivisme a pour objet de formuler les règles de cette construction. Le refus de la métaphysique se concentre dans la critique de tout donné, en le considérant comme du déjà construit. En produisant les règles de construction de la science, le constructivisme dépasse, au dire de l'auteur, l'ascétisme du nominalisme. Relativement à la phénoménologie, il s'agit, comme elle l'a fait à un autre niveau, de réhabiliter le sujet contre son annulation formaliste. Mais contre la phénoménologie, le sujet constructiviste n'est qu'un ensemble de constructions, ce qui évite de faire appel à quelque conscience constructrice. Enfin, le constructivisme est un matérialisme de la construction du monde, qui s'oppose à un autre matérialisme, celui de la conception métaphysique réaliste de la matière.

D) Critique du constructivisme

En concédant le moins possible à la croyance métaphysique, le constructivisme est sûrement une théorie de la science qui favorise au maximum l'activité scientifique. Cette suspension de la croyance se fait au nom d'une recherche de la description et de l'explication rationnelle. Mais ce souci excessif qu'a le constructivisme d'éviter la métaphysique au nom de la science rappelle la conception positiviste de l'opposition science-métaphysique. Or cette opposition fait problème, dans la mesure où elle n'est pas si radicale qu'on le voudrait.

D'un point de vue épistémologique, il est juste de dire que tout donné est du déjà construit, au sens où une intervention structurante intervient dans la plus élémentaire des connaissances. Seul un fond d'empirisme naïf permettrait de croire à un donné de connaissance qui serait neutre et objectif. Par contre, en opposant la science à la métaphysique, le constructivisme oppose l'explication rationnelle à la croyance en l'ineffable. Pour soutenir une telle opposition, la croyance doit être maintenue comme fondement de la science. À ne vouloir rien concéder à une réalité extra-cognitive, si inconnue soit-elle, la lutte contre le réalisme métaphysique aboutit à un idéalisme. L'expression « tout donné est du déjà construit » acquiert un sens ontologique au-delà d'un sens strictement épistémologique. À vouloir exclure la croyance métaphysique au nom de la science, on la réintroduit comme fondement de la science.

La réalité n'est alors que les constructions d'un sujet. C'est là que se greffe la conception contemplative de la science comme théorétique. Dans la mesure où le sujet n'est que la totalité de ces constructions, le constructivisme est un idéalisme : la réalité c'est la science, c'est-à-dire que c'est le sujet en tant que constructions. En ce sens, Gauthier a raison de rapprocher son constructivisme du marxisme volontariste, selon lequel la société serait le résultat d'une construction humaine.

Le constructivisme de Gauthier fournit à la science quelque chose de fondamental : une attitude qui lui permet de toujours se dépasser, en ne voulant rien concéder à la croyance. De ce point de vue, le constructivisme peut apporter d'importantes contributions à la recherche fondationnelle en science.

C'est sûrement cela qui est le plus important à retenir de cette entreprise. Mais en ce qui concerne la philosophie des sciences, le constructivisme devient inacceptable quand, en refusant d'accepter quelque réalité irréductible à la science, il devient une ontologie scientifique. Pour éviter la métaphysique, il ne suffit pas de refuser de fonder la science dans une réalité extra-scientifique, il faut aussi refuser cette tendance à réduire la réalité aux productions scientifiques. La science ne peut être rendue possible qu'à partir de conditions matérielles. Mais relativement à ces conditions, rien ne nous permet de considérer que la science puisse en donner une explication adéquate ou exhaustive.

* * *

2 - GAUTHIER, Yvon, *Méthodes et concepts de la logique formelle*, Montréal. Les Presses de l'Université de Montréal, 1978, 238 p.

A) Définition de la logique

Ce deuxième ouvrage est de moins grande envergure que *Fondements des mathématiques*. Au lieu de nous livrer la réflexion constructiviste sur les fondements des mathématiques et la philosophie constructiviste des sciences qui s'y rattache, on nous expose plutôt le point de vue constructiviste en logique, à l'occasion d'un manuel de logique formelle.

L'auteur commence par nous rappeler son point de vue nominaliste selon lequel la raison n'est que langage. Dès lors, s'impose la distinction entre logique formelle et logique mathématique. La première serait la syntaxe et la sémantique du langage ordinaire, alors que la seconde serait la syntaxe et la sémantique du langage mathématique, de la même façon que l'épistémologie aurait la même fonction dans le langage scientifique.

B) La logique classique

En s'inspirant du manuel anglais de Leblanc et Wisdom, *Deductive Logic*, l'ouvrage expose d'abord, dans une présentation scolaire (avec exemples et exercices), le calcul des propositions et le calcul des prédicats du premier ordre. Pour chacun de ceux deux langages, l'exposition se fait selon trois méthodes successives : 1°) la méthode des tables de vérité, 2°) les arbres de consistance (selon Beth et Smullyan) et 3°) la dérivation ou déduction naturelle (selon Gentzen et Fitch).

C) La métalogique et ses problèmes

On passe ensuite à la présentation axiomatique de la logique des propositions et de la logique des prédicats du premier ordre. On y retrouve les résultats de l'axiomatisation, du point de vue syntaxique de la déduction dans un système formel, et du point de vue sémantique de l'interprétation du système, en termes de vérité, dans un modèle.

Par opposition aux résultats relativement satisfaisants de l'axiomatisation de la logique classique, l'auteur insiste surtout sur les problèmes syntaxiques d'incomplétude que l'on retrouve en mathématiques, comme la preuve d'incomplétude que l'on retrouve chez Gödel à propos de l'arithmétique récursive. À ce sujet, la difficile démonstration de Gödel est clairement exposée et commentée. Au niveau sémantique, ce qui retient surtout l'attention, c'est l'important théorème de Tarski selon lequel la vérité d'un système formel ne peut être représentable que dans un métalangage plus fort que lui et non du sein de ses propres limites.

D) Les logiques non classiques

C'est à partir de l'impossibilité syntaxique et sémantique de ramener les mathématiques à une axiomatisation satisfaisante que Gauthier introduit les logiques non classiques. On nous présente successivement la logique intuitionniste de Heyting, la logique modale de Lewis, des notions sur les logiques multivalentes et le calcul des prédicats du deuxième ordre et d'ordres supérieurs.

E) La philosophie de la logique

L'ouvrage s'achève avec une section sur la philosophie de la logique. L'auteur insiste sur trois grandes thèses : le réalisme, le nominalisme et le constructivisme. Soutenu d'abord par Aristote, le réalisme considère les concepts et les lois logiques comme ayant un fondement objectif dans les choses. Par contre, la conception nominaliste du langage, qu'a soutenue Occam, est devenue dominante en logique à partir du moment où Russell définit un prédicat comme n'étant que l'extension de son concept. Enfin, le point de vue constructiviste, tout comme le nominalisme, réduit la logique à un langage. Mais, au-delà des limites nominalistes, le constructivisme ne laisse aucune place à l'impalpable et ramène tout langage à des règles linguistiques de construction. Jusque-là, le constructivisme s'avère être la plus fertile des philosophies pour le développement de la logique. Mais quand il considère ces constructions comme basées sur une nécessité qui donne aux lois logiques un caractère universel, le constructivisme revient à un positivisme inacceptable. Les lois logiques ne sont pas plus universelles que la distinction science-métaphysique n'est radicale : c'est-à-dire que chaque conception philosophique de la logique va de pair avec un système logique aux lois spécifiques. Ainsi, le réalisme est la philosophie de la syllogistique aristotélicienne, le nominalisme est lié au calcul classique des propositions et des prédicats, et le constructivisme va avec la logique intuitionniste. Loin d'être universelles, les lois logiques ne valent que dans le système auquel elles appartiennent.

Le constructivisme ne peut donner une valeur universelle aux lois logiques que dans la mesure où il promeut une conception théorétique de la science, qui tend à réduire la réalité aux constructions scientifiques. Cette position est solidaire d'une négligence de l'histoire des sciences, qui seule peut nous apprendre la succession des différentes appréhensions de la réalité par les diverses constructions scientifiques. L'histoire de la logique n'occupe dans le livre de Gauthier que les quelques pages d'un appendice, où l'on ne remonte que jusqu'à Frege (1879). Si la logique n'est qu'un langage, elle n'est aussi que son histoire, c'est-à-dire un aspect de l'histoire de la connaissance du monde matériel par le développement des sciences. C'est dans la mesure où il sous-estime l'histoire, que le constructivisme oublie ce donné matériel qui échappe toujours à la construction scientifique, et qu'il se maintient ainsi dans un idéalisme critique. Cela dit, l'œuvre de Gauthier n'en constitue pas moins une contribution importante à la réflexion épistémologique, ne serait-ce que par l'acuité de ses attaques contre les préjugés métaphysiques qui rôdent dans les naïvetés de tant d'entreprises scientifiques.

Université du Québec à Montréal