

## Exploration des valeurs possibles du coefficient $\alpha$ de Cronbach

Georges Martineau

Volume 8, Number 1, 1982

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/900362ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/900362ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (print)

1705-0065 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Martineau, G. (1982). Exploration des valeurs possibles du coefficient  $\alpha$  de Cronbach. *Revue des sciences de l'éducation*, 8(1), 135–143.  
<https://doi.org/10.7202/900362ar>

Article abstract

If on each question of a questionnaire subjects obtain a score situated on an ordinal scale of 1, 2, 3, 4, 5, therefore: 1) The higher limit of the coefficient  $\alpha$  which is equal to 1 is reached, if a linear relation of the type  $y = x + c$  exists between each pair of question scores; 2) The lower limit of the coefficient  $\alpha$  is a function of the number of subjects that responded to the questionnaire, the limit tends towards minus infinity when the number of subjects moves towards infinity.

# Exploration des valeurs possibles du coefficient $\alpha$ de Cronbach

Georges Martineau \*

**Résumé** — Si, à chaque question d'un questionnaire, des sujets obtiennent un score qui se situe sur l'échelle ordinale 1, 2, 3, 4, 5, alors: 1) la limite supérieure du coefficient  $\alpha$  qui est égale à 1 est atteinte, s'il existe une relation linéaire du type  $y = x + c$  entre chaque paire de scores aux questions; 2) la limite inférieure du coefficient  $\alpha$  est fonction du nombre de sujets qui ont répondu au questionnaire; la limite tend vers moins l'infini lorsque le nombre de sujets tend vers l'infini.

**Abstract** — If on each question of a questionnaire subjects obtain a score situated on an ordinal scale of 1, 2, 3, 4, 5, therefore: 1) The higher limit of the coefficient  $\alpha$  which is equal to 1 is reached, if a linear relation of the type  $y = x + c$  exists between each pair of question scores; 2) The lower limit of the coefficient  $\alpha$  is a function of the number of subjects that responded to the questionnaire, the limit tends towards minus infinity when the number of subjects moves towards infinity.

**Resumen** — Si a cada pregunta de un cuestionario los sujetos obtienen una puntuación que se sitúa sobre la escala ordinal 1, 2, 3, 4, 5, entonces: 1) el limite superior del coeficiente  $\alpha$  que es igual a 1 es alcanzado si existe una relación lineal del tipo  $y = x + c$  entre cada par de puntuaciones de las preguntas; 2) el limite inferior del coeficiente está en función del número de sujetos que han respondido el cuestionario; el limite tiende a menos infinito cuando el número de sujetos tiende al infinito.

**Zusammenfassung** — Wenn Versuchspersonen bei der Beantwortung eines Fragebogens ein Ergebnis erzielen, das sich auf der Grössenskala 1, 2, 3, 4, 5 befindet, dann ist 1) die obere Grenze des Koeffizienten  $\alpha$  erreicht, die gleich 1 ist, wenn eine lineare Beziehung vom Typ  $y = x + c$  zwischen jedem Ergebnispaar besteht; 2) ist die untere Grenze des Koeffizienten  $\alpha$  Funktion der Zahl der Personen, die den Fragebogen beantwortet haben. Die Grenze geht auf  $-\infty$  (minus Unendlich) zu, wenn diese Personenzahl auf  $\infty$  (Unendlich) zugeht.

## Introduction

Dans les recherches des sciences de l'éducation, le coefficient  $\alpha$  de Cronbach est utilisé abondamment. Tantôt il est un estimateur du coefficient de fidélité d'un instrument de mesure, tantôt il est un indice de l'homogénéité des items formant une échelle de mesure.

Les limites 0 et 1 du coefficient de fidélité sont bien connues. Le coefficient prend la valeur 1 si la variance observée (variance totale) est égale à la variance

---

\* Martineau, Georges: professeur, Université de Montréal

vraie, c'est-à-dire si la variance des erreurs de mesure est nulle. Par contre, si la variance des erreurs explique complètement la variance observée, le coefficient est égal à 0.

Théoriquement les limites du coefficient  $\alpha$  devraient être 0 et 1, étant donné qu'il peut être utilisé comme estimateur du coefficient de fidélité. Mais en pratique le coefficient  $\alpha$  peut prendre une valeur négative qui en laissera plus d'un stupéfaits.

Dans la présente étude, nous allons montrer à l'aide de matrices de données fictives mais plausibles de la valeur du coefficient de Cronbach peut varier entre  $-\infty$  et 1. On supposera que chacune de ces matrices utilisée comme exemple, correspond aux scores obtenus par des sujets qui ont répondu à un questionnaire, le score à chaque question se situant sur l'échelle ordinale 1, 2, 3, 4, 5.

#### *Limite supérieure du coefficient*

Lord et Novick (1968) soulignent que le coefficient  $\alpha$  tend vers 1 lorsque le nombre de mesures parallèles tend vers l'infini. Est-il alors toujours nécessaire qu'un questionnaire soit composé d'un très grand nombre de questions pour que le coefficient  $\alpha$  prenne une valeur près de 1? Non, et l'exemple du Tableau 1 en est une preuve.

Tableau 1  
Score à chaque question et score total  
de dix sujets à un questionnaire de cinq questions

Sujet	Question					Score total
	1	2	3	4	5	
1	5	5	5	5	5	25
2	5	5	5	5	5	25
3	4	4	4	4	4	20
4	3	3	3	3	3	15
5	3	3	3	3	3	15
6	3	3	3	3	3	15
7	2	2	2	2	2	10
8	2	2	2	2	2	10
9	1	1	1	1	1	5
10	1	1	1	1	1	5
$\alpha = 1$						

Le coefficient  $\alpha$  qui correspond au questionnaire du Tableau 1 est égal à 1, même si le questionnaire est composé de cinq questions seulement. Cependant, dans

cet exemple, il existe une relation linéaire du type  $y = x + c$  entre chaque paire de scores aux questions et cela est suffisant pour que le coefficient  $\alpha$  soit égal à 1. En effet,

$$S_t = nS_i + c$$

où  $S_t$  = score total

$S_i$  = score à la question  $i$

$n$  = nombre de questions

$c$  = valeur d'une constante

et

$$V_t = n^2 V_i$$

où  $V_t$  = variance du score total ( $V_t \neq 0$ )

$V_i$  = variance du score à la question  $i$  ( $V_i \neq 0$ )

Aussi

$$\sum V_i = nV_i$$

parce que les questions ont des variances égales.

Alors

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{\sum V_i}{V_t} \right)$$

$$= \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{nV_i}{n^2 V_i} \right)$$

$$= \frac{n}{n-1} \left( \frac{n-1}{n} \right)$$

$$= 1$$

Une relation linéaire du type  $y = x + c$  entre chaque paire de scores aux questions est une condition suffisante pour que le coefficient  $\alpha$  d'un questionnaire soit égal à 1. Si cette condition implique que le coefficient de corrélation  $r$  entre chaque paire de scores aux questions est égal à 1, il faut quand même préciser que le coefficient de corrélation  $r$  entre chaque paire de scores aux questions peut être égal à 1, sans pour autant que le coefficient  $\alpha$  soit égal à 1.

Dans le Tableau 1, chaque sujet ayant obtenu le même score à chaque question, le coefficient  $\alpha$  est égal à 1 parce que la condition suffisante est remplie. Il en reste que le Tableau 1 illustre un cas particulier. Lorsque le coefficient  $\alpha$  d'un questionnaire a une valeur près de 1, cela ne signifie pas nécessairement que chaque sujet a obtenu à peu près le même score à chaque question. Il suffit de se référer au Tableau 2 pour s'en convaincre. Dans cet exemple, le coefficient de Cronbach est égal à 0,92 parce qu'il existe une relation linéaire (du type  $y = x + c$ ) ou presque linéaire entre chaque paire de scores aux questions.

**Tableau 2**  
**Score à chaque question et score total**  
**de dix sujets à un questionnaire de cinq questions**

Sujet	Question					Score total
	1	2	3	4	5	
1	5	3	5	2	4	19
2	5	3	5	2	4	19
3	5	3	5	2	4	19
4	5	3	5	2	4	19
5	4	2	4	1	3	14
6	4	2	4	1	3	14
7	4	2	4	1	3	14
8	4	2	4	1	3	14
9	3	1	4	2	2	12
10	3	1	4	2	2	12

$\alpha = 0,92$

*Valeur nulle du coefficient*

Vu que 
$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{\sum V_i}{V_t} \right)$$

il faut que 
$$V_t = \sum V_i$$

pour que 
$$\alpha = 0$$

La variance du score total ( $V_t$ ) à un questionnaire composé de  $n$  questions est fonction des variances des scores aux questions. En effet,

$$V_t = \sum V_i + 2 \sum r_{ik} s_i s_k \quad (i \neq k)$$

où  $s_i$  = écart-type du score à la question  $i$

$s_k$  = écart-type du score à la question  $k$

$r_{ik}$  = coefficient de corrélation linéaire entre le score à la question  $i$  et le score à la question  $k$

Si 
$$\sum r_{ik} s_i s_k = 0$$

alors 
$$V_t = \sum V_i$$

et 
$$\alpha = 0$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que le coefficient  $\alpha$  d'un questionnaire soit égal à 0 est :

$$2\sum r_{jk}s_js_k = 0$$

c'est-à-dire, la somme de toutes les covariances entre les scores aux questions doit être nulle. Cette condition peut être remplie de bien des façons. Évidemment, si le coefficient de corrélation  $r$  entre chaque paire de scores aux questions est égal à 0, la somme des covariances est nulle.

Dans l'exemple du Tableau 3, la valeur du coefficient  $\alpha$  est nulle parce que la somme des covariances est nulle. Cependant, en éliminant la question 4, qui est en corrélation négative ( $r = -1$ ) avec chacune des autres questions, le coefficient  $\alpha$  serait égal à 1.

**Tableau 3**  
Score à chaque question et score total  
de dix sujets à un questionnaire de quatre questions

Sujet	Question				Score total
	1	2	3	4	
1	5	5	5	1	16
2	4	4	4	2	14
3	4	4	4	2	14
4	4	4	4	2	14
5	3	3	3	3	12
6	2	2	2	4	10
7	2	2	2	4	10
8	1	1	1	5	8
9	1	1	1	5	8
10	1	1	1	5	8
$\alpha = 0$					

### *Penchant négatif du coefficient*

Après un coup d'œil sur les scores aux questions du Tableau 4, on peut s'étonner du signe négatif du coefficient  $\alpha$ . Est-il possible que le coefficient soit égal à -0,6?

Si le questionnaire du Tableau 4 était formé des quatre premières questions seulement, le coefficient  $\alpha$  serait égal à 1. Le coefficient aurait également une valeur de 1, si les deux dernières questions (questions 5 et 6) étaient les seules questions du

questionnaire. N'est-il pas alors bizarre que le coefficient  $\alpha$  prenne une valeur négative lorsque les six questions sont réunies? Oui, si on considère qu'il a suffi à sept sujets de répondre aux questions 5 et 6 d'une façon diamétralement opposée par rapport aux questions 1, 2, 3 et 4. Toutefois, par leurs réponses, ces sept sujets ont fait en sorte que plusieurs corrélations entre les scores aux questions soient négatives ( $r = -1$ ) et, par ricochet, que la variance du score total soit plus petite que la somme des variances des scores aux questions. Parce qu'il est plus grand que 1, le rapport entre la somme des variances des scores aux questions et la variance du score total explique le signe négatif du coefficient  $\alpha$ .

Tableau 4  
Score à chaque question et score total  
de dix sujets à un questionnaire de six questions

Sujet	Question						Score total
	1	2	3	4	5	6	
1	5	5	5	5	1	1	22
2	5	5	5	5	1	1	22
3	4	4	4	4	2	2	20
4	3	3	3	3	3	3	18
5	3	3	3	3	3	3	18
6	3	3	3	3	3	3	18
7	2	2	2	2	4	4	16
8	2	2	2	2	4	4	16
9	1	1	1	1	5	5	14
10	1	1	1	1	5	5	14

$\alpha = -0,6$

Si un questionnaire est composé de peu de questions, le coefficient  $\alpha$  peut être négatif. Afin de remédier à cette situation, c'est-à-dire afin d'obtenir un coefficient ayant une valeur positive assez élevée, on supprime d'abord la ou les questions qui sont la cause de plusieurs corrélations négatives. Ensuite, si la valeur du coefficient n'est toujours pas assez élevée, on ajoute des questions.

**Limite inférieure du coefficient**

Puisque 
$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{\sum V_i}{V_t} \right)$$

la limite inférieure du coefficient  $\alpha$  est atteinte, si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- 1)  $V_t$  correspond à un minimum ( $V_t \neq 0$ ),
- 2) étant donné  $V_t$ ,  $\sum V_i$  correspond à un maximum.

**Tableau 5**  
**Score à chaque question et score total**  
**de dix sujets à un questionnaire de six questions**

Sujet	Question						Score total
	1	2	3	4	5	6	
1	5	5	5	1	1	1	18
2	5	5	5	1	1	1	18
3	5	5	5	1	1	1	18
4	5	5	5	1	1	1	18
5	5	5	5	1	1	1	18
6	1	1	1	5	5	5	18
7	1	1	1	5	5	5	18
8	1	1	1	5	5	5	18
9	1	1	1	5	5	5	18
10	2	1	1	5	5	5	19
$\alpha = -314,7$							

Dans le Tableau 5, la valeur du coefficient  $\alpha$  est la limite inférieure du coefficient d'un questionnaire de six questions administré à dix sujets; les scores possibles à chaque question étant 1, 2, 3, 4, 5. En effet, les conditions énoncées plus haut au sujet de la limite inférieure sont remplies :

- 1) La variance du score total a une valeur minimum et égale à 0,09.

Cette valeur de la variance du score total correspond à un minimum parce que tous les scores totaux, sauf un, sont égaux et que le score différent ne varie pas de plus d'une unité des autres scores.

- 2) La somme des variances des scores aux questions a une valeur maximum et égale à 23,69.

Si à une question donnée, la moitié des sujets a le score maximum et l'autre moitié a le score minimum, alors la variance du score à cette question est une valeur maximum. Ce dernier énoncé doit être modifié lorsque le nombre de sujets  $N$  qui ont répondu



au questionnaire est un nombre impair; il faut remplacer une moitié de sujets par  $\frac{N+1}{2}$  sujets et l'autre moitié par  $\frac{N-1}{2}$  sujets.

Dans l'exemple du Tableau 5, les variances des scores aux questions 2, 3, 4, 5 et 6 sont égales à 4; cette valeur est maximum parce que la moitié des sujets a obtenu le score 5 qui est le score maximum et l'autre moitié a obtenu le score 1 qui est le score minimum. Quant à la variance du score à la question 1, elle ne peut pas être supérieure à ce qu'elle est, soit 3,69; si le sujet 10 avait obtenu un score de 1 à cette question, la variance du score à la question aurait été maximum (et égale à 4) mais la variance du score total aurait été égale à 0 et le coefficient  $\alpha$  n'aurait pas été défini. Donc la somme des variances des scores aux questions est une valeur maximum.

Si mille sujets avaient répondu au questionnaire du Tableau 5, que serait la valeur du coefficient  $\alpha$ ? En supposant que 999 sujets auraient répondu comme les 9 premiers du Tableau 5 et que le 1000ième sujet aurait des réponses identiques à celles du 10e sujet, la valeur du coefficient  $\alpha$  serait la limite inférieure du coefficient. En effet, la variance du score total aurait une valeur minimum égale à 0,00099 ( $0,999 \times 0,001$ ) et la somme des variances des scores aux questions aurait une valeur maximum égale à 23,997 ( $3,997 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ ). Alors le coefficient  $\alpha$  serait égal à  $-29086,1$  qui est un nombre beaucoup plus petit que  $-314,7$ , déjà trouvé pour 10 sujets.

La limite inférieure du coefficient  $\alpha$  qui correspond à un questionnaire est fonction du nombre de sujets qui ont répondu au questionnaire. Cette limite tend vers moins l'infini lorsque le nombre de sujets tend vers l'infini.

### Sommaire

1. La limite supérieure du coefficient  $\alpha$  de Cronbach est 1. Indépendamment du nombre de questions dans un questionnaire, cette limite est atteinte s'il existe une relation linéaire du type  $y = x + c$  entre chaque paire de scores aux questions.

2. La valeur du coefficient  $\alpha$  est nulle, si la somme de toutes les covariances possibles entre les scores aux questions est nulle.

3. Une ou deux questions, qui sont la cause de plusieurs corrélations négatives entre les scores aux questions, peuvent exercer sur le coefficient une influence assez grande pour qu'il prenne une valeur négative.

4. La limite inférieure du coefficient  $\alpha$  est fonction du nombre de sujets qui ont répondu au questionnaire; la limite tend vers moins l'infini lorsque le nombre de sujets tend vers l'infini.

## RÉFÉRENCES

- Cronbach, Lee J., Coefficient alpha and the internal structure of tests, *Psychometrika*, vol. XVI, no 3, 1951, p. 297-334.
- Lord, F.M., Novick, M.R., *Statistical Theories of Mental Test Scores*, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.