L'Actualité économique

Un modèle mathématique de mobilité sociale

Jean Paelinck

Volume 49, numéro 2, avril–juin 1973

URI : https://id.erudit.org/iderudit/802997ar
DOI : https://doi.org/10.7202/802997ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Paelinck, J. (1973). Un modèle mathématique de mobilité sociale. *L'Actualité économique*, *49*(2), 269–275. https://doi.org/10.7202/802997ar

UN MODÈLE MATHÉMATIQUE DE MOBILITÉ SOCIALE

1) *Introduction*

Jusqu'à présent des problèmes sociaux, et spécialement de mobilité sociale, ont été rarement étudiés à l'aide de modèles mathématiques.

Or, ces derniers ne permettent pas seulement de figurer le processus social, ils introduisent aussi à des solutions — « optimales » dans un certain sens — de ces problèmes.

L'outil proposé dans cette étude est le processus markovien non stationnaire combiné avec la programmation dynamique quadratique ; des solutions approchées sont présentées [1].

Le modèle est assez simple pour permettre une implémentation empirique, et aide à l'orientation d'une série importante de décisions de politique sociale.

2.) *Le modèle*

2.1 Supposons que la société puisse être divisée en trois groupes : une classe pauvre socialement peu mobile (P_1), une classe pauvre relativement plus mobile (P_2) et la classe aisée (P_3). P_1 et P_2 sont différents, en ce sens que la transition de la première à la seconde catégorie est particulièrement faible.

Le processus dynamique qui opère dans cette société peut être représenté par le processus markovien non stationnaire suivant :

$$\begin{bmatrix} p_1^{t+1} \\ p_2^{t+2} \\ p_3^{t+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1-\beta & 0 \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^t \\ p_2^t \\ p_3^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^* p_1^t \\ \beta^* p_2^t \\ \gamma^* p_3^t \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ou en écriture matricielle comme :

$$[\underline{p}^{t+1}] = [A]\,[\underline{p}^t] + [\hat{a}]\,[\underline{p}^t] \qquad (2)$$

1. Cf. : R. Howard, *Dynamic Programming and Markov Chains*, MIT Press, Cambridge, 1960.

Le cofficient α est probablement très petit, comme indiqué ci-dessus ; d'autre part, α^*, β^* et γ^* sont les taux de croissance exogènes dans chaque classe.

Si ces derniers étaient absents, le processus convergerait vers une seule classe P_3, la solution du système étant :

$$\underline{p}^{\infty} = A^{\infty}\ \underline{p}^{o} \tag{3}$$

et comme 1 est la racine propre dominante, on a [2] :

$$A^{\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, si $\alpha = 0$, on obtiendrait :

$$A^{\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

avec le résultat évident que les gens ne quitteraient pas la classe P_1.

2.2. Les solutions du processus non stationnaire sont les suivantes. Etant donné que les valeurs propres du système élargi sont :

$$\lambda_1 = 1 + \alpha^* - \alpha$$
$$\lambda_2 = 1 + \beta^* - \beta$$
$$\lambda_3 = 1 + \gamma^*$$

on obtient comme solution pour les classes de population [3]

$$p_1^t = \lambda_1^t\, p_1^0 \tag{4}$$

$$p_2^t = \lambda_2^t\, p_2^0 + \alpha\, (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}\, (\lambda_2^t - \lambda_1^t)\, p_1^0 \tag{5}$$

$$p_3^t = \lambda_3^t\, p_3^0 + \beta\, (\lambda_3 - \lambda_2)^{-1}\, (\lambda_3^t - \lambda_2^t)\, p_2^0 + \alpha\beta[(\lambda_3 - \lambda_1)\ (\lambda_3 - \lambda_2)\ (\lambda_2 - \lambda_1)]^{-1}\, [(\lambda_2 - \lambda_1)\, \lambda_3^t - (\lambda_3 - \lambda_1)\, \lambda_2^t + (\lambda_3 - \lambda_2)\, \lambda_1^t]\, p_1^0 \tag{6}$$

---

2. Rappelons que :
$A^t = aI + bA + cA^2$
où a, b, et c sont les solutions du système

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^t \\ \lambda_2^t \\ \lambda_3^t \end{bmatrix}$$

λ_1, λ_2 et λ_3 étant les valeurs propres de A.

3. Les développements algébriques complets, assez longs, ne sont pas reproduits ici.

Le résultat le plus intéressant pour notre propos est l'équation (5), qui est la seule que nous commenterons.

On peut vérifier que :

$$\partial p_2^t / \partial \lambda_1 > 0, \ \forall\, t > 1 \ ;$$

si des politiques sociales affectant α^* et α sont supposées être également coûteuses, et si l'action sur les deux paramètres est considérée comme indifférente, l'action sur α accroît p^0 d'un montant :

$$p^0 \, (\lambda_2^t - \lambda_1^t) / (\lambda_2 - \lambda_1)$$

ce qui est dû à la présence du facteur α dans (5) ; la décroissance due à la diminution de α^* se reflète dans la croissance de β^* et γ^* (car la croissance globale de $p = p_1 + p_2 + p_3$ est donnée de façon exogène). Ceci sera pris en considération dans une discussion ultérieure.

3) *Optimisation du modèle*

3.1 Les programmes sociaux ont des coûts. Un exercice utile consiste à comparer les coûts de transferts purs (n'influençant ni α^* ni α) et des programmes éducatifs (influençant α^*).

Dans le premier cas nous avons un coût cumulé escompté (facteur d'escompte: ρ).

$$C_1 = p_0 \int_0^\infty (\lambda_1 r_1 \rho)^t \, dt = -\log\ (\lambda_1 r_1 \rho)\ p_0$$

où r_1 est le facteur de croissance d'un transfert unitaire ; nous supposons que l'intégrale converge.

Le second programme coûterait :

$$C_2 = p_0 \alpha^* c_1^* \int_0^\infty [(1-\alpha)\ r_1 \rho]^t dt$$

$$= -\log\ [(1-\alpha)\ r_1 \rho]\ \alpha^* c_1^* p_0$$

où c_1^* est le coût unitaire relatif de ce programme, et où nous supposons que le taux de croissance est le même.

Les quantités à comparer sont finalement :

$$\log\ (\lambda_1 r_1 \rho) \gtreqless \alpha^*\ c_1 \log\ [(1-\alpha)\ r_1 \rho]$$

Pour $\alpha^* = 0.1$; $\alpha = 0.05$; $r_1 = 1.02$; $\rho = 0.9$, on calcule pour c_1^* une valeur d'« équivalence » de 2.6.

Aussi longtemps que les coûts d'éducation par personne sont plus bas que les coûts de transfert par personne, corrigés pour le rapport qui vient d'être calculé, une politique de type 2 est la « meilleure » avec le critère de décision utilisé. De plus, comme une partie de ces personnes vont directement rejoindre la classe p_3 et si cet argument entre également dans la fonction de décision, le programme « éducatif » pèsera encore plus lourd.

3.2. Des solutions opérationnelles complètes, utilisant la programmation dynamique [4], peuvent également être obtenues ; ce problème sera détaillé ci-dessous.

Il est possible de formuler le problème comme un problème de programmation à l'intérieur de chaînes de Markov infinies avec gains escomptés.

Supposons que les populations de l'année t sont p_1^t, p_2^t, avec une matrice de transition

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha^*-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1+\beta^*-\beta & 0 \\ 0 & \beta & 1+\gamma^* \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Supposons également que les revenus moyens de ces groupes sont R_1^t, R_2^t et R_3^t respectivement, et qu'ils croissent à des taux 0, r_2 et r_3 ; si le taux d'escompte est ρ, nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} P_1R_1 \\ P_2R_2 \\ P_3R_3 \end{bmatrix}^{t+1} = \begin{bmatrix} (1+\alpha^*-\alpha)\ (1-\rho) & & \\ \alpha\,(1-\rho) & (1+\beta^*-\beta)\ (1+r_2-\rho) & \\ 0 & \beta\,(1+r_2-\rho) & (1+\gamma^*)\ (1+r_3-\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1R_1 \\ P_2R_2 \\ P_3R_3 \end{bmatrix}^{t} \qquad (8)$$

Utilisant la transformée Z, ou la matrice inverse $(1-A^*)^{-1}$, où A^* est la matrice de transition du système (8), nous calculons la matrice des gains escomptés infinis :

$$R = \begin{bmatrix} (1-\lambda_1)^{-1} & 0 & 0 \\ \alpha(1-\rho)\ [(1-\lambda_1)\ (1-\lambda_2)]^{-1} & (1-\lambda_2)^{-1} & 0 \\ \dfrac{\alpha\beta\ (1-\rho)\ (1+r_2-\rho)}{(1-\lambda_1)\ (1-\lambda_2)\ (1-\lambda_3)} & \dfrac{(1+r_2-\rho)}{(1-\lambda_2)\ (1-\lambda_3)} & (1-\lambda_3)^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \qquad (9)$$

4. R. Howard, 1960.

où λ_1, λ_2, et λ_3 sont les éléments diagonaux de A*. Si la matrice R est postmultipliée par le vecteur colonne des gains attendus, l'on obtient les gains attendus du processus sur une durée infinie.

Le vecteur des gains attendus est

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 w_1(p_1 R_1) + \alpha(1-\rho)\, w_2\,(p_2 R_3) \\ \lambda_2 w_2(p_2 R_2) + \beta\,(1+r_2-\rho) w_3(p_3 R_3) \\ \lambda_3 w_3(p_3 R_3) \end{bmatrix}$$

où les w_i sont les poids attachés aux revenus des gens de la classe p_i.

3.3. La programmation dynamique est particulièrement simple dans ce cas, comme le processus est supposé être complètement récursif (matrice A triangulaire).

Aucune politique n'est disponible pour p_3, donc ce processus est toujours optimal. Des actions optimales peuvent être choisies afin de réduire β^* ou d'accroître β (processus pour p_2) ; cette politique optimale n'affecte pas le processus p_2 ; pour ce processus l'optimalité des transferts non productifs, c'est-à-dire d'une réduction de α^* ou d'un accroissement de α, peut être étudiée.

Supposons, par exemple, que le coût unitaire d'une réduction de β^* peut être exprimé comme :

$$k_2 = \zeta b$$

et le coût d'un accroissement unitaire de β comme :

$$l_2 = \xi b^*$$

La fonction-critère à maximiser est alors :

$$T = M^*_{22}\, w_2 p_2 R_2 + M^*_{23} w_3 (p_3 R_3 - k_2 b p_2 - l_2 b^* p_2$$

sujet à $r = \pi_1 \alpha^* + \pi_2 \beta^* + \pi_3 \gamma^*$;

M^*_{22} et M^*_{23} sont les multiplicateurs de gains finals, les π_i les proportions des populations de type p_i,r le taux de croissance démographique général. Substituant pour k_2 et l_2, on obtient un programme quadratique dont le Lagrangien est :

$$L = M^*_{22} w_2 p_2 R_2 + M^*_{23} w_3 (p_3 R_3 - \zeta b^2 p_2 - \xi b^{*2} p_2)$$
$$- \lambda(\pi_1 \alpha^* + \pi_2 \alpha^* + \pi_3 \gamma^* - r)$$

Les conditions nécessaires à l'optimum sont :

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} M^*_{22}\,(b)\;\;(w_2 p_2 R_2) + \frac{\partial}{\partial b} M^*_{23}(b,g)\;(p_3 R_s - \zeta b^2 p_2 - \xi b^{*1} p_2)$$
$$+ M^*_{23}(b,g)\;(-2\zeta b p_2) - \lambda \pi_2 = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial g} = \frac{\partial}{\partial g} M^*_{23}(b,g)\;(p_2 R_2 - \zeta b^2 p_2 - \xi b^{*2} p) - \lambda \pi_3 = 0 \tag{11}$$

où g est l'accroissement (négatif) dans γ^*, d'où $\dfrac{\partial\beta^*}{\partial b}=\dfrac{\partial\gamma^*}{\partial g}=-1$

Une expression formelle pour b est donnée par la solution de (10) et (11) en termes du b « apparent » [5].

$$b=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial b}M^*_{22}(b)\,M^*_{22}(b,g)}{M^*_{22}(b,g)\,M^*_{23}(b,g)}\left(\frac{w_2}{w_3}\right)\left(\frac{R_2}{\zeta}\right)+\frac{\frac{\partial}{\partial b}M^*_{23}(b,g)}{M^*_{23}(b,g)}\left(\frac{p_3}{p_2}\right)\left(\frac{R_3}{\zeta}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\frac{\partial}{\partial g}M^*_{23}(b,g)}{M^*_{23}(b,g)}\,\frac{R_3}{\zeta}\right]$$

si on néglige les termes quadratiques et b et b^*.

Les trois termes de la somme (algébrique) sont négatifs ; on suppose que le dernier excède en valeur absolue les deux premiers, afin d'obtenir un b admissible (positif). On peut étudier les effets (apparents) des termes

$\left(\dfrac{w_2}{w_3}\right)$, $\left(\dfrac{R_2}{\zeta}\right)$, $\left(\dfrac{p_3}{p_2}\right)'$ et $\left(\dfrac{R_3}{\zeta}\right)$ sur le b (apparent), ces effets apparaissant comme étant tout à fait logiques.

3.4. La solution implicite pour b peut être récrite comme :

$$b=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\lambda_2'^b}{1-\lambda_2^*}\,\frac{1-\lambda_3^*}{\lambda_3^*\beta(1+r_2-\rho)}\left(\frac{w_2}{w_3}\,\frac{R_2}{\zeta}\right)+\frac{\lambda_2'^b}{1-\lambda_2^*}\left(\frac{p_3}{p_2}\,\frac{R_3}{\zeta}\right)\right.$$
$$\left.\frac{\lambda_3'^g}{\lambda_3^*(1-\lambda_3^*)}-\left(\frac{R_3}{\zeta}\right)\right]$$

les λ_i^* étant toujours des fonctions de b ou g.

Prenant les valeurs suivantes :

$r_2 = .04$	$r_3 = .04$
$\rho = .10$	$w_2/w_3 = .95$
$\beta^* = .02$	$R_2/\zeta = .20$
$\beta = .02$	$R_3/\zeta = .50$
$\gamma^* = .02$	$p_3/p_2 = 1.90$

on obtient pour b la valeur (approchée) de .005. Des solutions à l'extérieur de l'intervalle $0-\beta^*$ sont exclues, et doivent être interprétées, soit

5. M^*_{22} est une fonction de b, M^*_{23} une fonction de b et de g.

comme l'absence d'intervention de type β^*, soit comme la suppression totale de croissance de la classe P^2.

4) *Conclusions*

Le modèle proposé est suffisamment simple, général et souple pour qu'on prenne la peine d'en estimer les paramètres caractéristiques, et d'étudier par là le coût de programmes sociaux « optimaux ».

Comme toujours, la difficulté majeure est celle d'estimer les paramètres représentatifs de l'efficacité marginale des mesures de politique sociale proposée. La fonction-critère, elle, soulèvera moins de problèmes, car elle est du type coûts-bénéfices classique.

Jean PAELINCK,
Netherlands Economic Institute.