L'Actualité économique

Mesures de performance et économie de l'information, une synthèse de la littérature théorique
Performance measurement and information economics, a synthesis of theoretical literature

Michel Gendron

Volume 63, numéro 2-3, juin–septembre 1987

Incertain et information

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601416ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601416ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Gendron, M. (1987). Mesures de performance et économie de l'information, une synthèse de la littérature théorique. *L'Actualité économique*, *63*(2-3), 169–186. https://doi.org/10.7202/601416ar

Résumé de l'article

La mesure de la performance des gestionnaires de portefeuille est un sujet d'importance majeure en finance.

Les gestionnaires de portefeuille prétendent produire une distribution de rendements « supérieure » à celle d'un portefeuille non géré. Dans un marché où les acteurs sont rationnels, une performance supérieure est généralement associée à la possession d'information supérieure.

Les mesures traditionnelles de performance où la relation rendement-risque est l'outil de mesure de base ne tiennent pas compte de l'asymétrie de l'information. De plus, le modèle d'équilibre de marchés financiers (CAPM) a été récemment remis en question, comme outil servant à la mesure de performance. Des modèles tenant compte explicitement de l'information ont donc été développés pour servir de cadre à cette mesure.

Le but de cet article est de faire une synthèse de la littérature théorique portant sur la mesure de performance des gestionnaires de portefeuille en mettant l'accent sur les modèles récemment suggérés qui tiennent compte explicitement de l'information des gestionnaires.

L'Actualité Économique. Revue d'analyse économique, vol. 63, n° 2-3, juin-septembre 1987

MESURES DE PERFORMANCE ET ÉCONOMIE DE L'INFORMATION, UNE SYNTHÈSE DE LA LITTÉRATURE THÉORIQUE

Michel GENDRON
*Université Laval**

La mesure de la performance des gestionnaires de portefeuille est un sujet d'importance majeure en finance.

Les gestionnaires de portefeuille prétendent produire une distribution de rendements « supérieure » à celle d'un portefeuille non géré. Dans un marché où les acteurs sont rationnels, une performance supérieure est généralement associée à la possession d'information supérieure.

Les mesures traditionnelles de performance où la relation rendement-risque est l'outil de mesure de base ne tiennent pas compte de l'asymétrie de l'information. De plus, le modèle d'équilibre de marchés financiers (CAPM) a été récemment remis en question, comme outil servant à la mesure de performance. Des modèles tenant compte explicitement de l'information ont donc été développés pour servir de cadre à cette mesure.

Le but de cet article est de faire une synthèse de la littérature théorique portant sur la mesure de performance des gestionnaires de portefeuille en mettant l'accent sur les modèles récemment suggérés qui tiennent compte explicitement de l'information des gestionnaires.

Performance measurement and information economics, a synthesis of theoretical literature. — Measuring the performance of a portfolio manager (PM) is an important concern of financial theory.

The PM pretends to produce a returns distribution « superior » to that of an unmanaged portfolio. In a market with rational participants this is usually associated with the possession of superior information.

Traditional performance measures based on a mean variance framework do not account for asymetric information. Furthermore the CAPM has been questionned as a tool for performance measurement. Some models have been suggested which directly account for asymetric information.

This paper presents a review of theoretical literature on the performance measurement of porfolio managers. Emphasis is placed on recent information models.

*Departement de finance/assurance.

INTRODUCTION

La mesure de la performance des gestionnaires de portefeuille (GP) est un sujet d'importance majeure en finance sur lequel la littérature est abondante.

Les GP justifient leurs services en prétendant produire une distribution de rendements « supérieure » à celle d'un portefeuille non géré. Dans un marché où les acteurs sont rationnels, cette prétention est associée à la possession d'information supérieure.

Or les mesures traditionnelles de performance où la relation rendement-risque est l'outil de mesure de base ne tiennent pas compte de cette asymétrie de l'information. De plus, le modèle sur lequel la plupart de ces mesures s'appuient, *le modèle d'équilibre des marchés financiers (CAPM)*, a été récemment remis en question comme outil servant à la mesure de la performance. Des modèles tenant compte explicitement de l'information ont donc été dévelopés pour servir de cadre à des mesures de performance des GP.

Le but de cet article est de faire une synthèse de la littérature théorique portant sur la mesure de performance des gestionnaires de portefeuille en mettant l'accent sur les modèles récemment suggérés qui tiennent compte explicitement de l'information des gestionnaires.

Il y a huit sections dans cet article. La première introduit la relation rendement-risque et la deuxième, le CAPM. Les mesures traditionnelles de performance et les critiques de ces mesures en contexte moyenne-variance sont présentées aux troisième et quatrième sections respectivement. Les modèles tenant compte explicitement de l'information sont introduits à la cinquième section où un tel modèle est développé. À la sixième, le modèle de synchronisation du marché de Merton (1981) est brièvement décrit et mis en relation avec le modèle développé à la section précédente. La septième section discute du modèle d'équilibre général Adamati et Ross (1985) où les prix révèlent partiellement de l'information détenue par les divers agents. Finalement la dernière section glisse un mot sur le problème de contrat optimal de rémunération du GP.

1. RENDEMENT ET RISQUE

L'aversion au risque des investisseurs implique une relation positive entre le rendement et le risque d'un titre ou d'un portefeuille. Les investisseurs exigeront un rendement plus élevé d'un portefeuille plus risqué.

Le rendement ne peut donc être utilisé seul, comme mesure de performance. En effet un portefeuille dont le rendement est élevé peut tout de même afficher une mauvaise performance en regard du risque qu'il représente.

Cette relation rendement-risque constitue la base des mesures traditionnelles de performance. L'objet de ces mesures est de caractériser la performance d'un portefeuille ou de son gestionnaire par un seul paramètre tenant compte à la fois du rendement et du risque.

Le taux de rendement (ci-après rendement) d'un titre sur une période est obtenu en divisant le changement dans la valeur au marché du titre plus les dividendes ou revenus versés au cours de cette période, par sa valeur en début de période. Le rendement d'un portefeuille est la somme pondérée du rendement des titres qui le composent.

La notion de risque est plus complexe. Elle est généralement associée à l'idée de variation dans les résultats possibles. Ainsi un titre dont la valeur de fin de période est certaine, tel un Bon du Trésor, n'est pas risqué tandis qu'un titre dont on ne connaît pas la valeur de fin de période avec certitude, telle une action ordinaire ou une obligation d'une firme, est risqué. À cause de l'effet de diversification, le risque d'un portefeuille diffère généralement de la somme pondérée du risque des titres qui le composent. Le risque d'un portefeuille est fonction de la relation entre les divers titres qui le composent.

Des mesures de dispersion telles la variance, la semi-variance ou l'écart absolu moyen sont fréquemment utilisées pour représenter le risque. Certains auteurs ont cependant suggéré qu'une grande dispersion n'impliquait pas nécessairement un grand risque et que d'autres facteurs, tels les moments supérieurs de la distribution ou la probabilité de subir une perte financière, devraient être pris en compte. La variance d'un titre est la mesure de dispersion la plus fréquemment utilisée dans la littérature financière pour représenter le risque[1].

La prochaine section présente un modèle d'équilibre entre rendement et risque fréquemment utilisé en finance, le CAPM, et établit dans le contexte de ce modèle la distinction entre risque diversifiable et non diversifiable.

2. LE CAPM

Le *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) est un modèle d'évaluation d'actifs financiers développé simultanément par Sharpe (1964) et Lintner (1965), à partir des travaux de Markowitz (1952) et Tobin (1958) sur la théorie de portefeuille en contexte moyenne-variance. Ce modèle, qui a marqué le développement de la finance moderne, joue encore un rôle de premier plan dans les études empiriques et la mesure de performance.

Les hypothèses de base du CAPM sont d'une part que les investisseurs ont de l'aversion au risque et choisissent leur portefeuille selon leur moyenne et variance et d'autre part que le marché des titres est un marché parfait.

1. Lévy et Sarnat (1985), p. 236 présentent une brève revue de la nature du risque d'investissement et déterminent les conditions sous lesquelles l'utilisation de la variance comme mesure de risque est justifiée. Jog (1986) fournit des références sur l'utilisation de la semi-variance et de l'écart absolu moyen comme mesures de risque, et sur la considération de l'asymétrie des distributions des rendements dans les mesures de performance.

Dans ce modèle les investisseurs répartissent leurs investissements entre un titre sans risque et un portefeuille de titres risqués.

Les proportions de chaque titre dans ce portefeuille risqué sont les mêmes pour chaque individu. Ceux qui désirent détenir des titres risqués choisiront tous le même portefeuille risqué. Nous l'appellerons, à juste titre, portefeuille du marché puisqu'il contiendra tous les titres risqués pour lesquels il existe une demande.

Les préférences de chacun entre en jeu dans le choix des montants à être investis dans le titre sans risque et dans le portefeuille de marché.

Dans un contexte de portefeuille, le risque d'un titre est éliminé par la diversification, à l'exception de la covariance du titre avec le marché, qui ne peut être diversifié.

Selon le CAPM, la relation d'équilibre suivante entre le rendement espéré d'un titre et son risque de covariance avec le marché est obtenue.

$$E(R_j) = R_F + [E(R_m) - R_F]\,\beta_j \qquad (1)$$

où :

R_j : rendement du titre j,

R_F : rendement du titre sans risque,

R_m : rendement du marché,

$\beta_j \equiv \mathrm{Cov}(R_j, R_m)\,/\,\mathrm{Var}(R_m)$

E(.), Var(.), Cov(.) : respectivement l'espérance mathématique, la variance et la covariance.

Le rendement espéré d'un titre est donc égal dans ce modèle au taux d'intérêt sans risque plus une prime de risque. Le risque est représenté par le β du titre. Cette relation linéaire entre le rendement espéré du titre et son β est aussi appelée « *securities market line* » (SML).

L'équation (1) peut être réécrite en terme de rendements observés, plutôt que de rendement espérés, pour des fins empiriques.

$$R_{jt} = R_F + [R_{mt} - R_F]\,\beta_j + \epsilon_{jt} \qquad (2)$$

où $\epsilon_j \sim N(0, \mathrm{Var}(\epsilon_j))$.

L'indice t signifie qu'il s'agit d'une observation au temps t.

On obtient de l'équation (2) l'expression suivante pour la variance d'un titre.

$$\mathrm{Var}\,(R_j) = \beta_j^2\,\mathrm{Var}\,(R_m) + \mathrm{Var}\,(\epsilon_j) \qquad (3)$$

De cette équation on voit que le risque total d'un titre, tel que représenté par sa variance, peut être décomposé en deux parties. Il y a le risque dit systématique, relié aux variations du marché, qui ne peut être diversifié et le risque non systématique, relié à ϵ, qui peut l'être dans un portefeuille.

Dans le CAPM, où les détenteurs de titres risqués ont un portefeuille parfaitement diversifié puisqu'il s'agit du marché, seul le risque systématique d'un titre est rémunéré.

C'est sur ces notions de risque total, de risque systématique et non systématique, et de relation rendement risque que sont basées les mesures traditionnelles de performance.

3. LES MESURES TRADITIONNELLES DE PERFORMANCE

Cette section décrit diverses mesures de performance, établit la différence entre synchronisation du marché et sélection de titres et suggère comment les fonctions de répartition des rendements peuvent être utilisées pour comparer la performance de deux fonds.

3.1 *La mesure de Sharpe*

La mesure de performance du portefeuille p de Sharpe (S_p) est calculée ainsi :

$$S_p = (E(R_p) - R_F)/(\mathrm{Var}(R_p))^{1/2}. \tag{4}$$

Le numérateur, qui donne la différence entre le rendement espéré d'un titre et le taux sans risque, constitue une prime de risque.

La mesure de Sharpe représente donc la prime par unité de risque total du portefeuille tel que mesuré par l'écart-type du rendement du portefeuille.

3.2 *La mesure de Treynor*

Cette mesure (T_p) est similaire à celle de Sharpe avec β plutôt que l'écart-type comme mesure de risque. On fait donc ici l'hypothèse que le portefeuille dont on mesure la performance se situe dans un contexte plus global bien diversifié. Plus précisément, on suppose que l'investisseur qui détient ce portefeuille est « lui-même » bien diversifié. Seul le risque systématique du portefeuille doit donc être considéré.

$$T_p = (E(R_p) - R_F)/\beta_p \tag{5}$$

Ces mesures de Sharpe et Treynor sont calculées en remplaçant les espérances, écarts-type et β par leurs estimés.

3.3 *La mesure de Jensen*

Cette mesure (J_p), tout comme celle de Treynor, fait l'hypothèse que l'individu détient un ensemble d'actifs bien diversifiés. Cette mesure est définie comme la différence entre le rendement d'un portefeuille et ce que ce rendement espéré serait sous le CAPM.

$$J_p = E(R_p) - \{R_F + [E(R_m) - R_F]\,\beta_p\} \tag{6}$$

On estime cette différence par l'ordonnée à l'origine de la droite de régression suivante :

$$R_{pt} - R_F = \alpha_p + \beta_p (R_{mt} - R_F) + \epsilon_{pt}. \quad (7)$$

3.4 *Synchronisation du marché et sélection de titres*

Certains auteurs tiennent compte, dans leur mesure de performance, de l'origine de cette performance. Celle-ci peut provenir de la faculté qu'a le gestionnaire de choisir des titres sous-évalués, appelée la sélection de titres, ou d'investir dans des titres plus risqués lorsque le marché est à la hausse et dans des titres moins risqués lorsque le marché est à la baisse, appelée la synchronisation du marché.

Treynor et Mazuy (1966) ont suggéré que le coefficient de régression β du rendement de portefeuille sur le rendement de marché devrait être aléatoire si le gestionnaire adoptait une stratégie de synchronisation du marché. Pour évaluer cette stratégie, ces auteurs ont utilisé le modèle de régression suivant[2].

$$R_{pt} = \alpha_p + \beta_p R_{mt} + C_p R_{mt}^2 + \epsilon_{pt} \quad (8)$$

Si le rendement du portefeuille croît avec le carré du rendement du marché, il sera d'autant plus élevé lorsque le marché est à la hausse, ce qui est consistant avec la stratégie de synchronisation du marché.

3.5 *La dominance stochastique*

On peut comparer la performance de deux portefeuilles en utilisant leur fonction de répartition. Posons $F(R)$ et $G(R)$, les fonctions de répartition des rendements R de deux portefeuilles. Si $F(R) < G(R)$ pour tous les rendements, on dit alors que F aura une dominance stochastique de premier ordre sur G. F sera préféré à G quelle que soit l'attitude face au risque d'un investisseur possédant une fonction d'utilité croissante ou la distribution des rendements, faisant preuve ainsi d'une performance supérieure.

De la même façon, si

$$\int_{-\infty}^{R} [G(t) - F(t)]\, dt \geq 0,$$

pour tout R avec inégalité stricte pour au moins un R (9)

c'est-à-dire que la différence cumulée entre les deux fonctions de répartition demeure toujours positive, on peut montrer que tous les individus ayant de l'aversion au risque préféreront le portefeuille F à G. On dit alors que F aura une dominance stochastique de deuxième ordre sur G[3].

2. Kon et Jen (1978, 1979) suggèrent plutôt la technique de *Switching Regression* pour tester la synchronisation du marché. Jog (1987) fournit des références pour des études empiriques sur ce sujet.

3. Lévy et Sarnat (1984) consacrent un chapitre complet, le sixième, aux règles de dominance stochastique pour l'analyse des investissements en incertitude.

4. CRITIQUES DES MESURES DE PERFORMANCE EN CONTEXTE MOYENNE-VARIANCE[4]

La validité du CAPM pour des fins de mesure de performance a été sérieusement remise en question par Roll (1977). Deux de ses conclusions principales sont que si la performance est mesurée par rapport à un indice de marché qui est expost efficient[5], alors aucun titre n'aura de performance supérieure et si la performance est mesurée par rapport à un indice qui est expost inefficient, alors n'importe quelle classification est possible, selon l'indice choisi. Mayers et Rice (1979) ont refuté la critique de Roll en utilisant un modèle d'information. Ils ont montré que l'analyse des résidus peut être utilisée pour mesurer la performance. Leur procédure a été critiquée par Verrechia (1980) et Dybvig et Ross (1985a).

Dybvig et Ross (1985a, 1985b) ont fait le point sur les mesures de performance en contexte moyenne-variance lorsqu'un indice inefficient est utilisé, et ont abordé les problèmes reliés à l'utilisation d'un modèle d'information. Leurs résultats peuvent être résumés ainsi:

> *« Assuming symmetric information and an inefficient index, we show that SML analysis can be grossly misleading, since, in general, efficient and inefficient portfolios can plot above and below the SML. » (Dybvig and Ross [1985b])*

> *« ... a manager who makes optimal use of superior information may plot above, on, or below the SML and may plot inside, on, or outside the efficient frontier... » (Dybvig and Ross [1985a]).*

Ces résultats suggèrent que d'autres techniques devraient être développées pour mesurer la performance.

Merton (1981) a proposé un modèle d'équilibre pour mesurer la performance de synchronisation de marché d'un GP. Pfleiderer et Bhattacharva (1983) et Gendron (1983) ont étudié les questions de synchronisation de marché et de sélection de titres à l'aide de modèles où le gestionnaire recevait un signal lui permettant de produire une distribution de rendement supérieure. Admati et Ross (1985) ont proposé un modèle d'équilibre d'anticipations rationnelles où tous les agents possèdent des informations privilégiées.

La prochaine section montre une façon de modéliser l'existence d'information supérieure chez un GP afin de mesurer sa performance.

5. MESURE DE PERFORMANCE EN PRÉSENCE D'ASYMÉTRIE DE L'INFORMATION

Cette section développe le modèle de Gendron (1983). Ce modèle est représentatif des divers modèles d'information suggérés dans la littérature pour la mesure de performance. Les modèles de Merton (1981) et Admati et Ross (1985) seront situés dans les sections 6 et 7 par rapport à ce modèle qui va comme suit.

Le GP a des croyances a priori à propos du rendement du marché. Il observe un certain signal à partir duquel il ajuste ses prévisions et procède à la sélection

---

4. Cette section et la suivante sont basées sur Gendron (1988).

5. L'ensemble efficient dans un contexte moyenne-variance comprend tous les titres ou portefeuilles tels que, pour un certain niveau de risque ou variance donné, aucun autre titre ou portefeuille n'a de rendement espéré supérieur. Dans le cadre du CAPM, le portefeuille de marché est efficient.

de son portefeuille ; c'est ce portefeuille qui sera utilisé pour l'évaluation de la performance.

La section 5.1 décrit le modèle pour la synchronisation du marché. L'évaluation de la performance et l'estimation des paramètres sont présentés aux sections 5.2 et 5.3. Il est finalement montré comment ce modèle peut être adapté à la sélection de titres, à la section 5.4.

5.1 *Le modèle pour la synchronisation du marché*

Posons,

W_o, W_1 :	les valeurs, respectivement de début et fin de période du portefeuille ;
X_m :	la proportion du portefeuille investie dans le marché ;
$\tau_m \equiv R_m - R_F$:	le rendement du marché en excès du taux sans risque ;
$\tau_p \equiv R_p - R_F$:	le rendement du portefeuille en excès du taux sans risque ;

$U(\tau) \equiv -(1/a) \cdot \exp(-a\tau)$: une fonction d'utilité exponentielle, où exp désigne l'exponentielle et a est une constante représentant l'aversion absolue au risque.

Le GP croit que la distribution de τ_m est normale de moyenne μ et variance connue σ^2.

$$\tau_m \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{10}$$

La valeur de sa gestion vient du fait qu'il puisse prédire, avec une certaine précision, le rendement du marché pour la période qui vient. Ceci peut provenir du fait qu'il possède de l'information supérieure à celle des autres GP, une habileté supérieure à traiter l'information ou une combinaison des deux.

Cette capacité de gestion supérieure est modélisée en disant que le GP observe un signal Y qui lui indique ce que sera le rendement du marché avec une erreur ϵ, normalement distribuée, de moyenne 0 et de variance σ_ϵ^2.

$$Y = \tau_m + \epsilon, \qquad \epsilon \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \tag{11}$$

À partir de ce signal, le GP ajuste ses prévisions. Dans ce cadre bayesien, on peut montrer que la distribution a postériori de τ_m étant donné le signal Y = y, est normale.

$$\tau_m | y \sim N(\mu', (\sigma')^2) \tag{12}$$

où :
$$1/(\sigma')^2 = 1/\sigma^2 + 1/\sigma_\epsilon^2$$
$$\mu' = (\sigma')^2 \, [\mu/\sigma^2 + y/\sigma_\epsilon^2]$$

La sélection de portefeuille est faite en choisissant X_m, la proportion investie dans le marché, qui maximise l'utilité espérée de la richesse W_1 de fin de période étant donné y où

$$W_1 = W_o(1 + R_F) + W_o X_m (R_m - R_F). \tag{13}$$

Puisque le rendement du portefeuille est une transformation linéaire de W_1 :

$$\tau_p = \{(W_1 / W_o) - 1\} - R_F \qquad (14)$$
$$= X_m \cdot \tau_m$$

et que la fonction d'utilité est exponentielle, la sélection de portefeuille peut se faire en choisissant X_m qui maximise l'utilité espérée du rendement du portefeuille étant donné le signal[6]

$$\text{Max}_{x_m}[E\{U(\tau_p|y)\}] = \text{Max}_{x_m}[E\{-(1/a)\exp(-a(\tau_p|y))\}] \qquad (15)$$

Puisque $(\tau_m|y)$ est normal, $(\tau_p|y)$ est normal et l'exponentielle en (15) est logonormale avec une moyenne de :

$$\exp\{E(.) - \text{Var}(.)/2\}.$$

On peut donc réécrire le problème de la façon suivante :

$$\text{Max}_{x_m}\{[E\{\tau_p|y\} - (a/2)\text{ Var }\{\tau_p|y\}].$$

Puisque de (14)

$$E\{\tau_p|y\} = X_m E\{\tau_m|y\}$$
$$\text{Var }\{\tau_p|y\} = X_m^2 \text{ Var }\{\tau_m|y\}$$

la condition de premier ordre donne

$$E\{\tau_m|y\} - a\, X_m \text{ Var}\{\tau_m|y\} = 0$$

ou

$$X_m = E\{\tau_m|y\} / [a \text{ Var }\{\tau_m|y\}]. \qquad (16)$$

En utilisant (11), on obtient le résultat suivant.

Proposition 1 : La stratégie de portefeuille qui maximise l'utilisé espérée du GP est donnée par :

$$X_m = (1/a)\,[\mu/\sigma^2 + y/\sigma_\epsilon^2]. \qquad (17)$$

La proportion investie dans le marché varie directement avec le rendement espéré du marché et sa précision $(1/\sigma^2)$ ainsi qu'avec le signal et sa précision $(1/\sigma^2{}_\epsilon)$. Ainsi un signal faible mais précis peut être déterminant dans la sélection de portefeuille.

On doit être prudent dans l'interprétation de $(1/a)$. Pour la fonction d'utilité exponentielle, a représente le coefficient d'aversion absolue au risque, défini comme $-U''(\cdot)/U'(\cdot)$. Dans notre cas, puisque l'argument de $U(\cdot)$ est une fonction de la prévision du GP, $(1/a)$ devrait être interprété comme la volonté du GP de miser sur sa prévision. Ceci avait été souligné par Jensen (1972, p. 3)[7].

6. On peut justifier ce comportement en supposant que le GP possède une partie du fonds qu'il gère ou que son salaire le pousse à agir comme si cela était le cas. Les problèmes d'agence seront brièvement considérés à la section 8.

7. Pour simplifier l'interprétation des résultats, on suppose que a ne peut prendre que des valeurs positives.

Connaissant X_m, on obtient de (14) le rendement du portefeuille en fonction du rendement du marché.

$$\tau_p = (\tau_m/a)\,(\mu/\sigma^2 + y/\sigma_\epsilon^2) \tag{18}$$
$$= (\tau_m/a)\,(\mu/\sigma^2 + \tau_m/\sigma_\epsilon^2 + \epsilon/\sigma_\epsilon^2).$$

Ce qui intéresse un investisseur, c'est le rendement espéré du portefeuille étant donné une certaine réalisation du rendement du marché. Ceci représente le produit que le GP a à offrir, c'est-à-dire ce que l'on peut espérer comme rendement d'un portefeuille, pour certain rendement de marché, si l'on suit ses conseils. Nous appellerons ce produit *fonction de rendement.*

Proposition 2 : La fonction de rendement offerte par le GP est donné par :

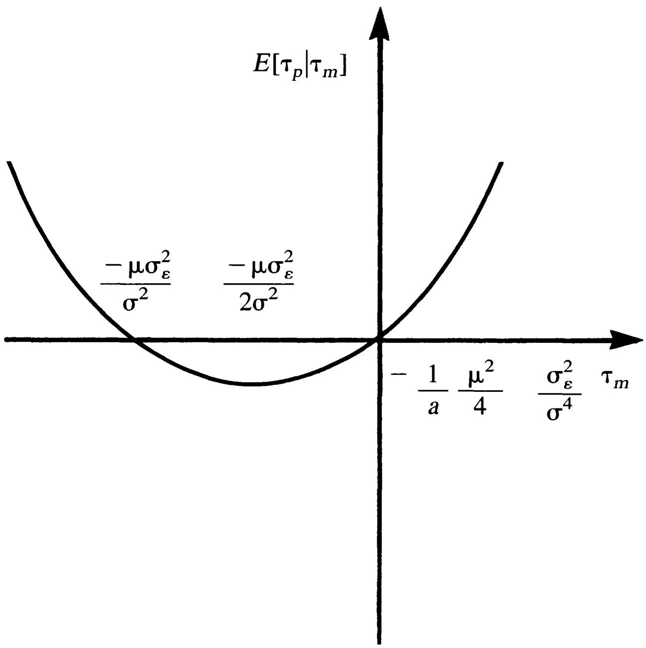
$$E[\tau_p|\tau_m] = \{\mu\,\tau_m/\sigma^2 + \tau_m{}^2/\sigma_\epsilon^2\}/\ a. \tag{19}$$

Les remarques suivantes s'imposent à propos de la fonction de rendement. D'abord, cette fonction ignore le risque associé à ϵ, qui est supposé diversifiable ; Merton (1981) discute du rôle de ce risque dans les mesures de performance. Ensuite la forme de cette fonction est quadratique, ce qui n'est pas inhabituel[8].

La fonction de rendement est illustrée à la figure 1.

FIGURE 1

LA FONCTION DE RENDEMENT



8. Des formes quadratiques apparaissent également dans ce contexte dans Traynor et Mazuy (1966), Jensen (1972), Pfleiderer et Bhattacharya (1983) et Admati et Ross (1985).

Si le GP doit faire face à des restrictions sur sa stratégie de placement, sa fonction de rendement sera affectée. Par exemple, s'il ne peut faire de ventes à découvert, sa fonction de rendement aura la forme illustrée à la figure 2 :

5.2 *Évaluation de la performance du GP*

Tel que mentionné précédemment, la fonction de rendement représente le produit du GP. Afin de mesurer sa performance, nous évaluons donc sa fonction de rendement. À cette fin, nous utilisons une procédure d'évaluation sans risque ou « *risk neutral valuation relationship* » (RNVR). On dit qu'une RNVR existe « si la valeur du titre contingent en début de période $W(p_o)$ peut être décrite comme une fonction de la valeur de l'actif sous-jacent (p_o), où :

$$W(p_o) = (1 + R_F)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(p_1)\, \bar{t}(p_1|p_o)\, dp_1$$

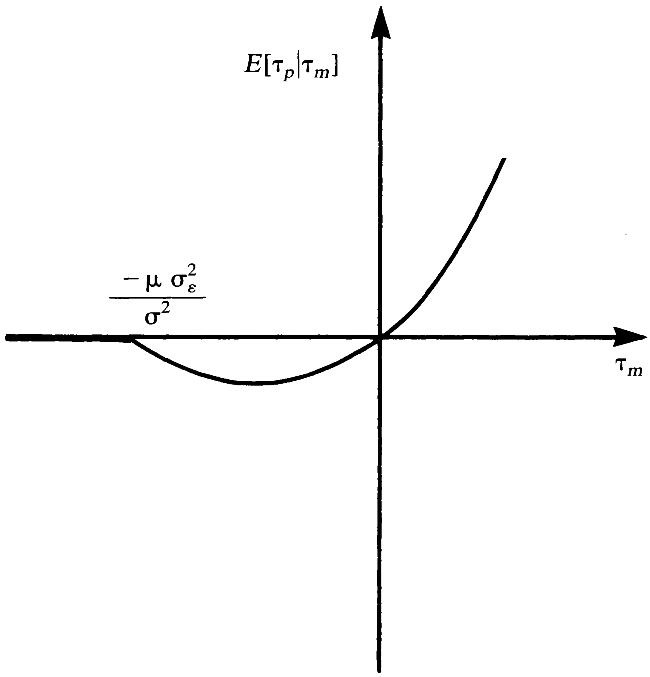
où (Brennan (1979, p. 57)

$g(p_1)$ valeur du titre contingent en fin de période en fonction de la valeur de fin de période du titre sous-jacent ;

$\bar{t}(p_1|p_o)$ fonction de distribution de la valeur de fin de période du titre sous-jacent étant donné sa valeur initiale dont la moyenne est p_o $(1 + R_F)$.

FIGURE 2

FONCTION DE RENDEMENT RESTREINTE



Dans notre modèle, le titre contingent est la fonction de rendement et le titre sous-jacent est le rendement sur 1 $ investi dans le marché.

Cette procédure d'évaluation est la même que si tous les investisseurs étaient neutres face au risque, ce qui n'est toutefois pas nécessaire. Par exemple, une RNVR tiendrait dans une situation de transactions continues et de non satiété des investisseurs, ou en situation de transaction non continues sous certaines hypothèses de distribution et d'attitude face au risque (Brennan, 1979). On suppose qu'une RNVR tient dans notre modèle.

Théorème 1 : Sous les hypothèses de notre modèle, la valeur de la performance du GP est donnée par :

$$(1 + R_F)^{-1} \,.\, (1/a) \,.\, (\sigma^2/\sigma_\epsilon^2). \tag{20}$$

Preuve : Posons Z la valeur de la performance du GP. Puisqu'une RNVR tient, on peut écrire l'équation d'évaluation suivante :

$$Z = (1 + R_F)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} E[\tau_p|\tau_m] \, d\,\bar{F}(\tau_m), \qquad \bar{F}(\tau_m) \sim N(0, \sigma^2)$$

Notons que la moyenne de $\bar{F}(\tau_m)$ est 0 plutôt que $(1 + R_F)$ puisque le taux sans risque a été soustrait des rendements. Utilisant (19), on obtient :

$$Z = (1 + R_F)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (1/a) \,.\, [\mu\tau_m/\sigma^2 + \tau_m{}^2/\sigma_\epsilon^2] \, d\bar{F}(\tau_m)$$

$$= (1 + R_F)^{-1} \,.\, (1/a) \,.\, (\sigma_m^2/\sigma_\epsilon^2) \qquad \text{Q.E.D.}$$

La valeur de la performance du GP augmentera avec la variabilité du rendement de marché, la précision de son signal et sa volonté de miser sur sa prévision. Puisqu'il n'y a que R_F et σ^2 de connu, nous devons estimer a et σ_ϵ^2.

5.3 *Estimation des paramètres*

On estime d'abord les paramètres de l'équation (18) qui sont ensuite combinés pour obtenir des estimés de a et σ_ϵ^2. L'accent circonflexe dénotera un estimé.

Le rendement du portefeuille est donné par l'équation (18).

$$\tau_p = \tau_m(\mu/a\sigma^2) + \tau_m^2(1/a\sigma_\epsilon^2) + \tau_m(\epsilon/a\cdot\sigma_\epsilon^2).$$

Puisque ϵ est multiplié par la variable indépendante, la variance de l'erreur ne sera pas constante dans une régression utilisant les moindres carrés ordinaires. On corrige pour ce problème d'hétéroscédasticité en réécrivant l'équation de la façon suivante

$$\tau_p/\tau_m = \mu/a\sigma^2 + \tau_m/a\sigma_\epsilon^2 + \epsilon/a\sigma_\epsilon^2. \tag{21}$$

En supposant $E(\epsilon_i.\epsilon_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $i, j = 1, \ldots, t$, et que les coefficients ne changent pas dans le temps, on peut utiliser les observations sur t périodes pour estimer les paramètres à l'aide d'une régression de la forme suivante :

$$Y = \alpha_1 + \alpha_2\,\tau_m + u \tag{22}$$

où :

$$u \sim N(0, \sigma_u^2)$$

$$\sigma_u^2 = [a\sigma_\epsilon]^{-2}.$$

À partir des estimés de la régression (22), les paramètres a, σ_ϵ^2 et u sont estimés ainsi :

$$\hat{a} = \hat{\alpha}_2/\hat{\sigma}_u^2 \tag{23}$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \hat{\sigma}_u^2/\hat{\alpha}_2^2 \tag{24}$$

$$\hat{\mu} = (\hat{\alpha}_2\ \hat{\alpha}_1/\hat{\sigma}_u^2)\cdot\sigma^2 \tag{25}$$

Les estimés des moindres carrés sont des estimés du maximum de vraisemblance. Selon le principe d'invariance (Zhena (1966)) (23), (24) et (25) sont donc aussi des estimés du maximum de vraisemblance. Notons que l'on suppose dans ce modèle que σ^2 est connu, mais qu'en pratique on utilisera un estimé de σ^2. Gendron (1988) illustre ces procédures à l'aide de données provenant de fonds mutuels canadiens.

5.4 *Sélection de titres*

Ce modèle peut être modifié pour tenir compte du cas où le GP observe des signaux sur chacun des N titres qui composent le marché.

Ceci est fait en redéfinissant les portefeuilles en termes de titres orthogonaux. La même procédure que dans le cas de la synchonisation du marché peut ainsi être appliquée. On peut montrer que la valeur totale de la performance du GP est donnée par la somme des valeurs de sa performance mesurée sur chacun des titres. (Voir Gendron (1988)).

6. LE MODÈLE DE SYNCHRONISATION DU MARCHÉ DE MERTON

Merton (1981) développe une théorie pour l'évaluation de la capacité de synchronisation du marché du GP lorsqu'il n'y a que deux prédictions possibles : le marché aura un rendement supérieur ou inférieur au titre sans risque.

Nous considérons dans cette section le cas le plus général de ceux étudiés par Merton, soit celui où les investisseurs ont de l'information différente et où la prévision du GP peut s'avérer incorrecte. Ce cas est d'abord présenté à la section 6.1 puis relié à la section 6.2 à la structure générale du modèle d'information développé à la section précédente.

6.1 *Le modèle de Merton*

Merton suppose que le GP investit 100 n_1% de son fonds dans le marché et 100[$1 - n_1$]% dans le titre sans risque si sa prévision est que le titre sans risque réalisera un rendement supérieur à celui du marché. Dans le cas contraire, les proportions sont 100 n_2% et 100[$1 - n_2$]% respectivement.

Utilisant une notation aussi près que possible de celle de Merton, posons

$\theta = 1$ si la prévision est correcte,

$\theta = 0$ si la prévision est fausse,

$$\begin{aligned} E[\theta|\tau_m] &= p_1 & \tau_m \leq 0 \\ E[\theta|\tau_m] &= p_2 & \tau_m > 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Merton montre que si, à l'équilibre, les titres sont prisés selon le CAPM alors la rémunération du GP devrait être

$$(p_1 + p_2 - 1)\,(n_2 - n_1)\, g \tag{27}$$

où g est le prix d'une option de vente avec un prix d'exercice de R_F.

6.2 *Relation avec le modèle général de synchronisation du marché*

Le résultat de Merton quant à la rémunération du GP, donnée par (27) peut être obtenu en utilisant le modèle général de synchronisation du marché de la section 5.2.

Étant donné la politique d'investissement du GP, le rendement du portefeuille sera donné par

$$\begin{aligned} \tau_p &= [n_2 - \theta(n_2 - n_1)]\,\tau_m & \tau_m \leq 0 \\ \tau_p &= [n_1 + \theta(n_2 - n_1)]\,\tau_m & \tau_m > 0. \end{aligned} \tag{28}$$

La fonction de rendement du GP est donc de (26).

$$\begin{aligned} E[\tau_p|\tau_m] &= [n_2 - p_1(n_2 - n_1)]\,\tau_m & \tau_m \leq 0 \\ E[\tau_p|\tau_m] &= [n_1 + p_2(n_2 - n_1)]\,\tau_m & \tau_m > 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Ceci équivaut, en tenant compte des exigences de rationalité suivantes $p_1 + p_2 > 1$ et $n_2 > n_1$, posées par Merton, à

$$E[\tau_p|\tau_m] = [n_2 - p_1(n_2 - n_1)]\,\tau_m + \text{Max}\,[0, (n_2 - n_1)(p_2 + p_1 - 1)\tau_m] \tag{30}$$

En utilisant une RNVR, comme plus tôt, pour l'évaluation de la fonction de rendement (30), on obtient la valeur Z.

$$\begin{aligned} Z &= (1 + R_F)^{-1} \int_{\infty}^{\infty} [n_2 - p_1(n_2 - n_1)]\tau_m \, d\bar{F}(\tau_m) \\ &\quad + (1 + R_F)^{-1} \int_{\infty}^{\infty} \text{Max}\,[0, (n_2 - n_1)(p_2 + p_1 - 1)\tau_m \, d\bar{F}(\tau_m) \\ &= 0 + [(n_2 - n_1)(p_2 + p_1 - 1)](1 + R_F)^{-1} \int_{R_F}^{\infty} \tau_m \, d\bar{F}(\tau_m) \\ &= (n_2 - n_1)(p_2 + p_1 - 1) \cdot g \end{aligned} \tag{31}$$

où g est la valeur d'une option d'achat avec un prix d'exercice de R_F.

Notons que, à l'équation (27), g représente une option de vente. Cependant, Merton souligne que dans ce cas vente et achat sont interchangeables (Merton (1981, p. 370)).

7. LE MODÈLE D'ANTICIPATIONS RATIONNELLES DE ADMATI ET ROSS

Dans les modèles considérés jusqu'à présent, bien que l'ensemble des individus possèdent une information homogène, il est possible pour certains GP d'avoir une information supérieure. Admati et Ross (1985) apportent une dimension supplémentaire en développant un modèle où les acteurs ont des croyances différentes et un comportement rationnel.

Dans ce modèle, les investisseurs possèdent de l'information privilégiée. L'attitude face au risque et la précision de l'information varie pour chacun. L'information privilégiée est agrégée et partiellement révélée par les prix d'équilibre des titres. Les investisseurs ont des anticipations rationnelles en ce sens qu'ils choisissent leur portefeuille optimal en maximisant l'utilité espérée de leur richesse de fin de période, étant donné leur information privilégiée et les prix d'équilibre qui reflètent l'information des autres investisseurs.

Le vecteur des prix d'équilibre dépend du rendement et de l'offre de chaque titre ainsi que des paramètres agrégés de l'économie. Ils dépendent plus particulièrement de la moyenne harmonique des coefficients d'aversion au risque et de la moyenne pondérée des matrices de précision où les poids sont donnés par les coefficients d'aversion au risque.

Les fonctions individuelles de demande sont données par l'équation suivante

$$D(y, p) = (1/a)\,\{E\,[F|y, p] - Rp\}\,/\mathrm{Var}[F|y, p]$$

où :

p : vecteur de prix ;

y : vecteur de signaux ;

F : vecteur de biens de consommation produits par les actifs risqués ;

R : vecteur de biens de consommation produits par l'actif sans risque.

On remarque la similarité entre cette équation et (16).

Les formes des espérance et variance conditionnelles qui, notons bien, dépendent du vecteur de prix, sont également similaires à celles obtenues à la section 5.

Admati et Ross étudient les mesures de performance traditionnelle basées sur la relation rendement-risque dans le cadre de leur modèle. Ces mesures devraient accorder une performance supérieure à un GP mieux informé ou possédant des signaux plus précis. Ils vérifient que ce n'est pas le cas, de façon similaire à Dybvig et Ross (1984a).

Ils expliquent l'échec de ces mesures en notant que l'espérance conditionnelle du rendement du GP étant donné le rendement du marché, la fonction de rendement dans notre modèle général, est quadratique. Notons qu'une forme quadratique est également obtenue pour la fonction de rendement à la proposition 2.

8. LA RÉMUNÉRATION DU GESTIONNAIRE

Dans le développement de la mesure de performance en présence d'asymétrie de l'information, nous avons fait l'hypothèse que le contrat de rémunération du GP le poussait à agir dans le meilleur intérêt des investisseurs.

La branche de l'économie de l'information qui s'intéresse aux relations contractuelles entre un « principal », l'investisseur dans ce cas-ci, et un « agent », le GP dans ce cas, en présence d'asymétrie de l'information s'appelle la *théorie de l'agence.*

On suppose ici que l'investisseur engage un agent, le GP, qui est mieux informé que lui pour gérer son portefeuille.

Bhattacharya et Pfleiderer (1985) étudient les problèmes de sélection des agents dont les capacités de prévision ne sont pas connues de tous et de l'obtention de l'information qu'ils possèdent. Le modèle qu'ils utilisent est similaire à celui développé à la section 5.

Kihlstrom (1986) analyse aussi le problème de rémunération des GP, mais dans le cadre du modèle plus restreint de Merton (1981) décrit en partie à la section 6. Il aborde les problèmes de « risque moral » et « d'anti-sélection ».

Le premier problème est présent lorsque la qualité de l'information du GP dépend de l'effort fourni par celui-ci et que l'investisseur ne peut contrôler cet effort. Le second problème survient lorsque la qualité de l'information du GP est déterminée par sa compétence qui n'est pas connue de l'investisseur. Ces problèmes sont évidemment analogues à ceux étudiés par Bhattacharya et Pfleiderer.

Ces deux articles constituent un bon point de départ pour ceux qui s'intéressent à la rémunération des GP en présence d'asymétrie de l'information.

CONCLUSION

La mesure de performance des gestionnaires de portefeuille, l'un des sujets d'importance majeure en finance, a subi de profonds chocs au cours des dernières années.

D'une part, les mesures traditionnelles de performance basées sur la relation rendement-risque ont fait l'objet de sévères critiques.

D'autre part, la mesure de performance est devenue un champ d'application privilégié de l'économie de l'information. En effet, une performance supérieure doit être associée à une information supérieure pouvant prendre la forme d'information privilégiée, d'une habileté supérieure à traiter l'information publique ou d'une combinaison des deux.

Le but de cet article était de faire le point sur la mesure de performance des gestionnaires de portefeuille.

Après avoir présenté les mesures traditionnelles de performance basées sur la relation rendement-risque, nous avons fait état des critiques de ces mesures, faisant ressortir leur caractère inapproprié.

L'accent a été mis sur les mesures de performance tenant compte explicitement de l'asymétrie de l'information. La dérivation d'un tel modèle a été présentée. Les modèles de synchronisation du marché de Merton et celui d'anticipations rationnelles de Admati et Ross ont aussi été brièvement abordés et mis en relation avec le modèle présenté. Finalement, il a été mentionné comment une autre facette de l'économie de l'information, soit la théorie de l'agence, intervenait dans la rémunération des gestionnaires.

Nous espérons que cet article contribuera non seulement à une meilleure compréhension de base des mesures de performance traditionnelles, mais surtout à une meilleure intégration des modèles basés sur l'économie de l'information.

BIBLIOGRAPHIE

ADMATI, A. et S. ROSS, « Measuring Investment Performance in a Rational Expectations Equilibrium Model », *The Journal of Business*, 58 (janvier 1985), pp. 1-26.

BHATTACHARYA, S. et P. PFLEIDERER, « Delegated Portfolio Management », *Journal of Economic Theory*, 36 (1985), pp. 1-25.

BRENNAN, M., « The Pricing of Contingent Claims in Discrete Time Models » *The Journal of Finance*, 34 (mars, 1979), pp. 53-68.

DEGROOT, M.H., *Optimal Statistical Decisions*, New York : McGraw-Hill, 1970.

DYBVIG, H. et S. ROSS, « Differential Information and Performance Measurement Using a Security Market Line », *The Journal of Finance*, 40 (juin 1985a), pp. 383-400.

DYBVIG, H. et S. ROSS, « The Analytics of Performance Measurement Using a Security Market Line ». *The Journal of Finance*, 40 (juin 1985b), pp. 401-416.

FAMA E.F., « Components of Investment Performance », *The Journal of Finance*, 27 (juin 1972), pp. 551-567.

GENDRON, M., « A Note on Performance Measurement », *Canadian Journal of Administrative Sciences*, à paraître, (1988).

GENDRON, M., « Performance Measurement in a Differential Information Framework », *Proceedings of the Canadian Association of Administrative Sciences*, Vancouver, B.C., 1983.

JENSEN, M., « Optimal Utilization of Market Forecasts and the Evaluation of Investment Performance », in G. Szego and K. Shell (eds.), *Mathematical Models in Investments and Finance*, Amsterdam : North-Holland, 1972.

JOG, V., « *Investment Performance of Pension Funds — A Canadian Study* », Canadian Journal of Administrative Sciences, vol. 3, n° 1, juin 1986, pp. 146-163.

KIHLSTROM, R., « Optimal Contracts for Security Analysts and Portfolio Managers », Working Paper #16-86, Wharton School, University of Pennsylvania, 1986.

KON, S.J, et F.C. JEN, « Estimation of time varying systematic risk and performance for mutual fund portfolios : An application of switching regressions », *The Journal of Finance*, 33 (mai 1978), pp. 457-475.

KON, S.J, et F.C. JEN, « The Investment performance of mutual funds : an empirical investigation of timing, selectivity and market efficiency », *The Journal of Finance*, 52 (avril 1979), pp. 263-289.

LEVY, H., et M. SARNAT, *Portfolio and Investment Selection : Theory and Practice*, Prentice-Hall, Toronto, 1984.

LINTNER, J., « Security prices, risk and maximal gain from diversification », *The Journal of Finance*, 20 (décembre 1965), pp. 587-615.

MARKOWITZ, H., « Portfolio Selection », *The Journal of Finance*, 7 (mars 1952), pp. 77-91.

MAYERS, D., et E. RICE, « Measuring Portfolio Performance and the Empirical Content of Asset Pricing Models », *The Journal of Financial Economics*, 7 (mars 1979), pp. 3-28.

MERTON, R., « On Marketing Timing and Investment Performance. I an Equilibrium Theory for Market Forecasts », *Journal of Business*, 54 (juillet 1981), pp. 363-406.

PFLEIDERER, P. et S. BHATTACHARYA, « A Note on Performance Evaluation », Technical Report No. 714, Stanford University, octobre 1983.

ROLL, R., « A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests », *The Journal of Financial Economics*, 4 (mars 1977), pp. 129-176.

SHARPE, W.F., « Capital asset prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk », *The Journal of Finance*, 19 (septembre 1964), pp. 425-442.

TOBIN, T., « Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk », *Review of Economic Studies*, (1958), pp. 65-86.

TREYNOR, J. et F. MAZUY, « Can Mutual Funds Outguess the Market ?, *Harvard Business Review*, 44 (1966), pp. 131-136.

VERRECHIA, R., « The Mayers-Rice Conjecture : A Counterexample », *The Journal of Financial Economics*, 8 (mars 1980), pp. 87-100.

ZEHNA, P., « Invariance of Maximum Likelihood Estimation », *Annals of Mathematical Statistics*, 37 (1966), p. 744.