

La stationnarité en économétrie et en macroéconomie : un guide pour les non initiés

Steve Ambler

Volume 65, numéro 4, décembre 1989

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/601512ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/601512ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)

1710-3991 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer cet article

Ambler, S. (1989). La stationnarité en économétrie et en macroéconomie : un guide pour les non initiés. *L'Actualité économique*, 65(4), 590–609.
<https://doi.org/10.7202/601512ar>

Résumé de l'article

Le but de ce texte est de présenter une introduction non technique à l'utilisation et à l'importance de séries chronologiques non stationnaires en économétrie et en macroéconomie. Les sujets suivants font l'objet de la présentation : la distinction entre tendances stochastiques et tendances déterministes; les tests d'hypothèse pour discriminer entre séries non stationnaires avec tendances stochastiques, d'une part, et, d'autre part, séries qui sont stationnaires autour de tendances déterministes; les conséquences de la non-stationnarité pour la théorie macroéconomique; les tests de stationnarité en présence de changements structurels; l'estimation de modèles économétriques avec variables qui sont individuellement non stationnaires.

*La stationnarité en économétrie et en macroéconomie : un guide pour les non initiés**

Steve AMBLER

Département des sciences économiques et

Centre de recherche sur les politiques économiques

Université du Québec à Montréal

RÉSUMÉ – Le but de ce texte est de présenter une introduction non technique à l'utilisation et à l'importance de séries chronologiques non stationnaires en économétrie et en macroéconomie. Les sujets suivants font l'objet de la présentation : la distinction entre tendances stochastiques et tendances déterministes ; les tests d'hypothèse pour discriminer entre séries non stationnaires avec tendances stochastiques, d'une part, et, d'autre part, séries qui sont stationnaires autour de tendances déterministes ; les conséquences de la non-stationnarité pour la théorie macroéconomique ; les tests de stationnarité en présence de changements structurels ; l'estimation de modèles économétriques avec variables qui sont individuellement non stationnaires.

ABSTRACT – The paper gives a non-technical introduction to non-stationary time series and considers their importance in macro-econometrics and macroeconomics. The following topics are discussed : the distinction between stochastic and deterministic trends ; statistical tests for discriminating between non-stationary series with stochastic trends and series which are stationary or which are stationary around a deterministic time trend ; the importance of unit roots for macroeconomic theory ; structural breaks and tests for stochastic trends ; the estimation of time series models with non-stationary variables ; the existence of stable relationships among variables which are individually non-stationary.

INTRODUCTION

La théorie standard de l'inférence statistique en économétrie classique repose sur l'hypothèse que les données utilisées sont *stationnaires*. Il y a plusieurs définitions possibles de la stationnarité, mais une définition intuitive et simple est la suivante : une variable stationnaire a une moyenne constante et une variance constante à travers les observations. Dans le cas des séries chronologiques, il s'agit d'une moyenne et d'une variance constantes à travers le temps. Également, il faut

* Ce texte a été conçu comme un outil pédagogique pour les étudiants de deuxième cycle en économie à l'UQAM. Je voudrais remercier Serge Aumont, Emanuela Cardia, Lucie Desrochers, Jean-Marie Dufour, Pierre Fortin, Pierre Mohnen, Alain Paquet, Louis Phaneuf, Daniel Racette et Jacques Raynauld pour leurs commentaires et suggestions, et le CRSH et le Fonds FCAR pour leur soutien financier.

que la dépendance entre deux observations soit reliée à leurs positions relatives dans la série (à la distance qui les sépare) et non à leurs positions absolues¹.

Puisque bon nombre des séries chronologiques utilisées en macro-économétrie affichent une tendance à croître dans le temps (PIB, consommation, stock monétaire, etc.), elles ne satisfont pas la condition d'avoir une moyenne constante. Pour cette raison, elles ne sont pas stationnaires. Cette constatation a donné naissance, il y a une quinzaine d'années, à une littérature volumineuse sur les conséquences de la non-stationnarité pour l'inférence statistique en macro-économétrie. Les chercheurs se sont intéressés aux questions suivantes, parmi d'autres :

- (1) Si les variables macroéconomiques ont une tendance à croître, quelle est la nature de cette tendance ? Il est possible de distinguer deux possibilités fondamentales : les tendances déterministes et les tendances stochastiques.
- (2) Est-ce que la reconnaissance de la non-stationnarité des séries chronologiques a des conséquences directes pour la théorie macroéconomique ?
- (3) Est-il possible de développer des tests formels de l'hypothèse nulle de la non-stationnarité ? Ceci permettrait de distinguer les séries non stationnaires des séries stationnaires.
- (4) Est-il possible qu'une série chronologique donnée soit stationnaire à part un changement (ou un nombre limité de changements) de sa moyenne ou de sa tendance déterministe ? Si c'est le cas, comment est-ce que ceci devrait affecter la méthodologie statistique pour discriminer entre séries stationnaires et séries non stationnaires ?
- (5) Si les séries chronologiques utilisées en macro-économétrie sont non stationnaires, est-ce qu'il faut les transformer pour les rendre stationnaires avant de les utiliser dans des études statistiques ou bien est-ce qu'il faut modifier les règles de l'inférence statistique pour tenir compte de leur non-stationnarité ?
- (6) Même si les variables macroéconomiques sont individuellement non stationnaires, est-ce qu'il pourrait y avoir des liens entre différentes variables qui soient stables à long terme ? Une autre façon de poser la même question est la suivante : est-il possible que des combinaisons linéaires de variables non stationnaires soient stationnaires, et, si oui, comment est-ce que l'on peut trouver ces combinaisons linéaires ?

Le but de ce texte est de répondre de façon intuitive à ces questions. Les réponses ne peuvent être définitives, mais il est possible de faire un bilan simple de l'état des connaissances actuelles². Les concepts seront illustrés à l'aide de données canadiennes sur le PIB et la consommation agrégée.

1. Strictement parlant, il faut que la fonction d'autocovariance d'une série y_t , $E(y_t y_s)$, dépende uniquement de l'écart entre t et s . Voir Harvey (1981, pp. 24-6).

2. Pour un autre survol clair et intuitif, voir Stock et Watson (1988a).

1. LA NATURE DE LA TENDANCE

Soit les variables non stationnaires x_t et y_t . Il y a une distinction fondamentale à faire entre deux types de tendance. D'une part, il y a la tendance déterministe :

$$x_t = \alpha + \beta t + u_t \quad (1)$$

où α et β sont des coefficients constants, et u_t est un terme aléatoire qui suit une distribution stationnaire. D'autre part, il y a la possibilité d'une tendance stochastique, dont un exemple très simple serait :

$$y_t = \beta + y_{t-1} + u_t \quad (2)$$

où, encore une fois, β est un coefficient constant et u_t est un terme aléatoire stationnaire. Si u_t suit une loi normale avec moyenne nulle et variance constante et n'est pas autocorrélé, le processus est appelé un processus de « marche aléatoire » (on peut penser à un ivrogne qui prend de façon aléatoire un pas à gauche ou un pas à droite, et qui n'a aucune tendance à revenir à son point de départ). Si le terme β est non nul, il y a néanmoins une tendance à aller dans une direction plutôt que l'autre (on peut penser au comportement probable de l'ivrogne sur une colline) ; une partie de la croissance de la variable est prévisible. La racine du polynôme caractéristique de ce processus est unitaire³ ; il est donc pratique courante de parler de variables ayant une racine unitaire si elles suivent des tendance stochastiques.

Les deux séries ont des comportements aléatoires radicalement différents. Suite à un choc donné au temps t_0 ($u_{t_0} \neq 0$), la série x_t dans (1) reviendra vers sa tendance à long terme ($\alpha + \beta t$). Dans ce sens, les effets d'un choc au temps t sont temporaires. Par contre, un choc au temps t aura un effet permanent sur le niveau de la variable y_t dans (2). La différence entre les effets d'un choc positif donné (d'une durée d'une période) dans les deux cas est illustrée par la figure 1. En outre, la figure illustre le comportement des deux séries suite à une séquence de chocs dans le cas où u_t suit un processus autorégressif d'ordre un. Nous supposons que $u_t = \theta u_{t-1} + \varepsilon_t$, où ε_t suit une loi normale avec moyenne nulle, variance constante et sans autocorrélation. Une série de deux cents observations sur ε_t a été engendrée à l'aide du logiciel Gauss. Nous supposons également que $\alpha = 0$, $\beta = 0,05$, et que $u_0 = 0$. Dans le cas de la série x_t , nous avons choisi $\theta = 0,95$ et une variance égale à 2,5 pour le choc ε_t , tandis que, dans le cas de la série y_t , nous avons choisi $\theta = 0,7$ et une variance de 0,1 pour le choc ε_t ⁴. Ce choix de paramètres permet d'illustrer l'idée qu'il peut être difficile de distinguer à l'œil entre tendances stochastiques et déterministes, d'où l'importance de développer des tests d'hypothèse formels. La discrimination statistique entre ces deux types de tendance fera l'objet d'une discussion dans la troisième section ci-dessous.

3. Voir Harvey (1981, pp. 24-26) pour une explication de ce concept.

4. La même série de valeurs pour ε_t est utilisée dans les deux cas.

2. CONSÉQUENCES POUR LA THÉORIE MACROÉCONOMIQUE

Dans un article célèbre, Nelson et Plosser (1982) soutiennent que la plupart des séries macroéconomiques contiennent des tendances stochastiques. Ils arrivent à la conclusion que les innovations (changements inattendus) des séries sont largement permanentes. Plusieurs chercheurs ont essayé d'en tirer des conclusions directes concernant la nature du cycle économique. Le raisonnement est le suivant :

- Nous observons que les chocs ont un effet permanent sur le PIB et sur d'autres variables réelles.
- Dans les modèles keynésiens du cycle économique, les chocs de demande sont les impulsions qui mettent le cycle en marche.
- Puisque nous ne pouvons pas admettre que les chocs de demande puissent avoir des effets permanents sur les variables réelles comme le PIB, nous devons conclure que les modèles keynésiens (ou tout type de modèle reposant sur les chocs de demande, comme le modèle de Lucas) ne peuvent expliquer la réalité. Ces théories sont rejetées par l'évidence statistique.
- Les modèles qui ne sont pas rejetés sont les modèles « réels » du cycle à la Kydland et Prescott (1982), qui reposent sur des chocs technologiques qui peuvent avoir des effets permanents.

Une argumentation de ce type a souvent été utilisée pour soutenir les modèles réels du cycle contre leurs principaux concurrents, les modèles keynésiens et les modèles fondés sur l'information imparfaite, où les chocs de demande sont privilégiés comme source principale des fluctuations économiques⁵. West (1988, p.202) résume le débat de la façon suivante :

« Campbell and Mankiw (1987) and Nelson and Plosser (1982) both argue that if the random walk approximation in fact is reasonable, there are important implications for business cycle theory. This is because movements in random walks are permanent... Both conclude ... that if the random walk characterization is accurate, an implication is that fluctuations in GNP are likelier to be driven by supply rather than by nominal demand shocks. »

Il est maintenant généralement admis que l'existence de racines unitaires au sein des agrégats réels n'entraîne pas de conséquences directes pour les théories du cycle économique. Une réponse à l'argument développé ci-dessus contient deux éléments clés. D'abord, il faut reconnaître que la même série peut subir l'influence de plus d'un choc. Par exemple, une série pourrait être la somme de deux composantes, de la manière suivante :

$$y_t = y_t^p + y_t^t \quad (3)$$

Une composante, la composante « permanente » y_t^p , pourrait être modélisée par l'équation (2), et donc serait une marche aléatoire. L'autre composante, la composante « temporaire » ou cyclique y_t^t , pourrait être modélisée par un processus

5. Pour un survol des théories modernes du cycle économique, voir McCallum (1988).

stochastique stationnaire⁶. La première étape de l'argument ci-dessus n'est pas justifiée⁷. Même si l'on démontre qu'il y a des chocs qui ont des effets permanents, cela ne démontre pas que tous les chocs qui influencent une variable ont des effets permanents. La deuxième étape du contre-argument est de démontrer (voir le texte récent d'Ambler et Phaneuf, 1989) que les modèles keynésiens sont compatibles avec des solutions à forme réduite qui dépendent de chocs ayant des effets permanents ainsi que de chocs ayant des effets temporaires⁸. Une fraction considérable des fluctuations du PIB peut être due à des chocs ayant des effets temporaires, même si le PIB contient une racine unitaire.

3. LES TESTS DE L'HYPOTHÈSE DE NON-STATIONNARITÉ

Souvent en économétrie et en statistique, l'hypothèse nulle est un point dans l'espace des paramètres (par exemple, quand on fait un test de la significativité d'une variable, l'hypothèse nulle est que le coefficient associé à cette variable égale zéro), tandis que l'hypothèse alternative est une région dans l'espace des paramètres. En partie pour cette raison, les tests qui ont été développés pour discriminer entre séries stationnaires et séries non stationnaires prennent comme hypothèse nulle la présence d'une racine unitaire. Dans la régression suivante :

$$y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4)$$

l'hypothèse nulle est donc $H_0 : \gamma = 1$. Dans la version la plus générale du test, on admet la possibilité de la présence simultanée d'une tendance déterministe et d'une tendance stochastique, comme c'est le cas dans l'équation (4). Également, on admet la possibilité d'un coefficient α non nul.

Il faut tout de suite faire face à un problème. Sous l'hypothèse nulle, la variable y_t n'est pas stationnaire, et donc les règles normales de l'inférence statistique ne peuvent pas être appliquées pour tester l'hypothèse. La statistique t que l'on pourrait calculer pour tester l'hypothèse $H_0 : \gamma = 1$ ne suit pas une distribution t de Student. Les premiers auteurs à faire face à ce problème sont les statisticiens Dickey et Fuller (1979, 1981) qui ont étudié la distribution asymptotique de l'estimateur de γ sous l'hypothèse nulle et qui ont tabulé ses valeurs critiques pour des échantillons de diverses tailles à l'aide de simulations Monte Carlo. Dans la

6. Pour pouvoir identifier les deux composantes (dans le sens économétrique), il faut faire une hypothèse concernant la corrélation entre la partie stochastique de la composante permanente et la partie stochastique de la composante cyclique (voir Watson, 1986).

7. Nelson et Plosser reconnaissent eux-mêmes la possibilité de plus d'un type de choc, mais ils attribuent la plus grande partie des fluctuations économiques aux effets de chocs qui affectent la composante permanente. D'autres auteurs ont démontré que le pourcentage des fluctuations que l'on peut attribuer à la composante permanente est très sensible aux hypothèses d'identification utilisées afin de pouvoir faire la décomposition (par exemple, voir la référence à l'article de Watson dans la note précédente).

8. D'autres auteurs ont poursuivi une autre voie pour répliquer à cet argument de l'école du cycle réel. Ils ont construit des modèles où il y a des équilibres multiples et où les chocs de demande peuvent faire se déplacer l'économie d'un équilibre stable à un autre équilibre stable. Les chocs de demande peuvent ainsi avoir des effets permanents (voir par exemple Rotemberg, 1987).

littérature macro-économétrique, on tombe souvent sur des références à des « tests Dickey-Fuller ». Il s'agit essentiellement d'un test de l'hypothèse que $\gamma = 1$ dans l'équation de régression (4).

Pour déduire la distribution de leur statistique, Dickey et Fuller ont recours à l'hypothèse maintenue que le terme d'erreur ε_t dans (4) n'est pas autocorrélé. Dans une foule de circonstances pratiques, cette hypothèse risque de ne pas être vraie. Si elle ne tient pas, les valeurs tabulées par Dickey et Fuller ne seront plus correctes. D'autres auteurs (et Dickey et Fuller eux-mêmes) ont essayé d'adapter le test au cas où ε_t suit un processus stochastique stationnaire relativement général. On rencontre souvent des références dans la littérature au test « Dickey-Fuller modifié », où on rajoute des retards de la variable endogène y_t pour tenir compte de la possibilité d'un terme d'erreur autocorrélé. Pour comprendre le raisonnement qui justifie cette stratégie, considérons le cas très simple où le terme d'erreur suit un processus AR(1). Supposons donc :

$$y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + u_t \quad (4')$$

où $u_t = \theta u_{t-1} + \varepsilon_t$, avec ε_t un terme d'erreur « bruit blanc », et où l'hypothèse nulle est toujours $H_0 : \gamma = 1$. Nous pouvons soustraire θ fois le premier retard de l'équation (4') d'elle-même pour obtenir :

$$y_t - \theta y_{t-1} = (1 - \theta)\alpha + (1 - \theta)\beta t + \theta\beta + \gamma y_{t-1} - \theta\gamma y_{t-2} + \varepsilon_t.$$

Des manipulations algébriques simples nous donnent l'équation suivante :

$$\Delta y_t = [(1 - \theta)\alpha + \theta\beta] + (1 - \theta)\beta t + (\theta - 1)(1 - \gamma)y_{t-1} + \theta\gamma \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

où « Δ » est l'opérateur de différence première⁹. Sous l'hypothèse nulle que $\gamma = 1$, le terme en y_{t-1} ne paraît pas dans l'équation. Cette équation est de la forme :

$$\Delta y_t = \alpha' + \beta' t + \gamma' y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \delta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (4'')$$

Cette équation est de la forme utilisée habituellement pour effectuer les tests Dickey-Fuller modifiés. La différence première de la variable dépendante est régressée sur une constante, une tendance déterministe, le premier retard du niveau de la variable dépendante, et finalement sur des retards de la différence première de la même variable. L'on peut démontrer que, sous certaines hypothèses techniques¹⁰, la statistique t pour le coefficient γ' suit la même distribution (à part, bien sûr, un changement de sa moyenne) que la statistique t pour γ dans (4). Les mêmes valeurs tabulées peuvent être utilisées pour déterminer les valeurs critiques que dans le cas du test Dickey-Fuller standard.

Ces hypothèses techniques ne sont pas faciles à vérifier. Il est possible de construire un test sous des hypothèses moins restrictives qui impliquent une

9. $\Delta x_t \equiv x_t - x_{t-1}$.

10. Il faut que Δy_t suive un processus AR(k) où la valeur de k est connue (voir Perron, 1988).

augmentation de la valeur de k dans (4") au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente. Si l'on admet la possibilité d'une forme très générale pour le terme d'erreur dans (4), la valeur minimale de k peut devenir relativement grande par rapport à la taille de l'échantillon. Le nombre de paramètres de nuisance qui est introduit ainsi réduit la puissance du test de l'hypothèse nulle et donc réduit sa capacité de discriminer entre les hypothèses alternatives.

Récemment, Pierre Perron et Peter Phillips (voir Perron, 1988) ont développé un autre test qui est robuste face à un terme d'erreur autocorrélé ε_t et qui repose sur une « correction non paramétrique » de la statistique qui élimine le biais introduit par l'autocorrélation de l'erreur. Il s'agit essentiellement d'utiliser l'équation de régression (4) sans modification, de calculer les statistiques t et F habituelles, et ensuite de les modifier pour tenir compte de la possibilité que le terme d'erreur soit autocorrélé. Perron et Phillips démontrent que les distributions asymptotiques des statistiques modifiées sont les mêmes que celles du modèle sans autocorrélation des erreurs. Les niveaux critiques des statistiques sont tels que tabulés par Dickey et Fuller dans leur série d'articles¹¹.

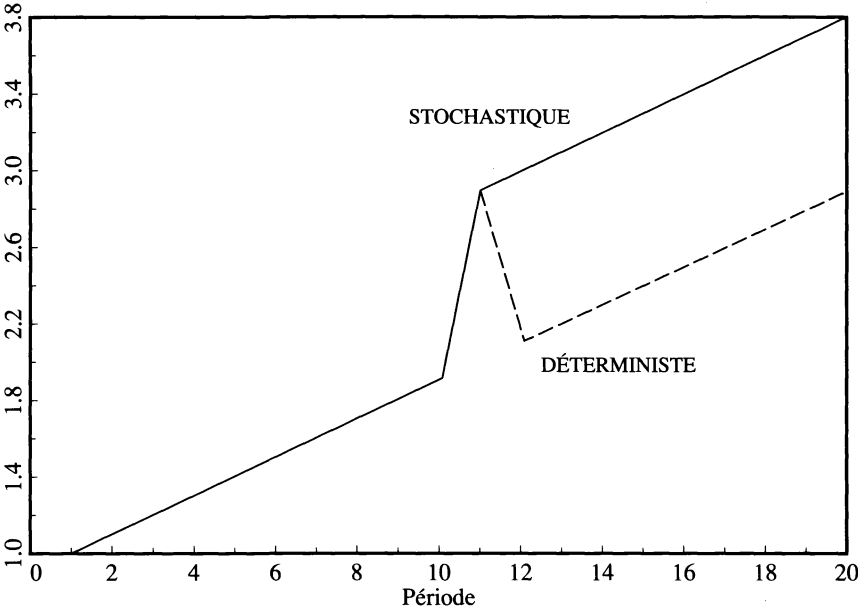
Afin d'illustrer l'utilisation de la méthodologie de Phillips et Perron, considérons le cas de deux séries chronologiques qui affichent une tendance à croître, le PIB réel et la consommation réelle agrégée canadiens. Nous utilisons des données trimestrielles ajustées¹². L'échantillon commence en 1947, premier trimestre, et se termine en 1988, dernier trimestre¹³. Le comportement des logarithmes des deux séries est illustré par la figure 2. Le tableau 1 donne les résultats des tests statistiques. Les niveaux critiques des statistiques proviennent d'un tableau du livre de Fuller (1976, p. 373). Quand les niveaux (mesurés en logarithmes) du PIB et de la consommation agrégée sont utilisés dans la régression (4), les statistiques t (ajustées par la correction de Perron et Phillips) sont plus faibles en valeur absolue que la valeur tabulée. Par contre, les premières différences des deux variables sont clairement stationnaires selon les résultats des tests. Le tableau 1 indique également les résultats de tests de stationnarité sur les séries artificielles qui sont illustrées par la figure 1. Il n'est pas possible de rejeter l'hypothèse nulle d'une racine unitaire pour la série qui en contient une par construction, tandis que l'on rejette l'hypothèse nulle pour la série qui suit une tendance déterministe par construction. Les tests indiquent que la première différence de la série avec la racine unitaire est stationnaire.

11. Il est nécessaire à ce stade de faire une mise en garde. Schwert (1987, 1989) démontre que si le processus qui engendre y_t contient une composante « moyenne mobile », les valeurs critiques en échantillon fini doivent être modifiées. L'utilisation des valeurs tabulées par Dickey et Fuller mènera le chercheur à rejeter trop souvent l'hypothèse d'une racine unitaire.

12. Ghysels (1987) étudie les conséquences de l'utilisation de données ajustées préalablement pour les effets saisonniers. Il préconise l'utilisation de données non ajustées et la modélisation simultanée de la non-stationnarité et des effets saisonniers. Afin de simplifier la discussion, et aussi puisque les données non ajustées sur le PIB réel ne sont pas disponibles, nous n'adoptons pas cette manière de procéder ici.

13. Les données sont tirées de la base CANSIM. Les numéros de série sont D20031 et D20131 respectivement pour le PIB et la consommation.

FIGURE 1
EFFETS D'UN SEUL CHOC



EFFETS D'UNE SUITE DE CHOCES

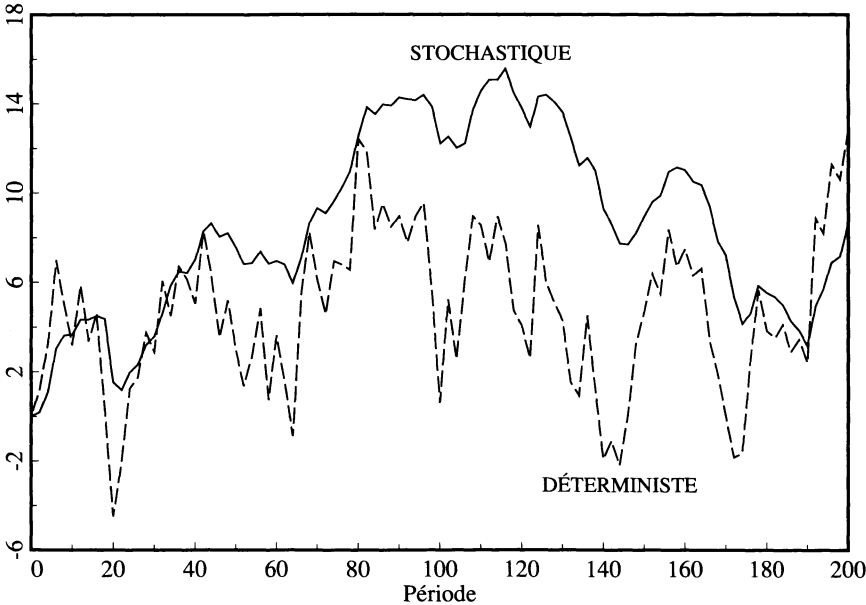


FIGURE 2
PIB ET CONSOMMATION CANADIENS

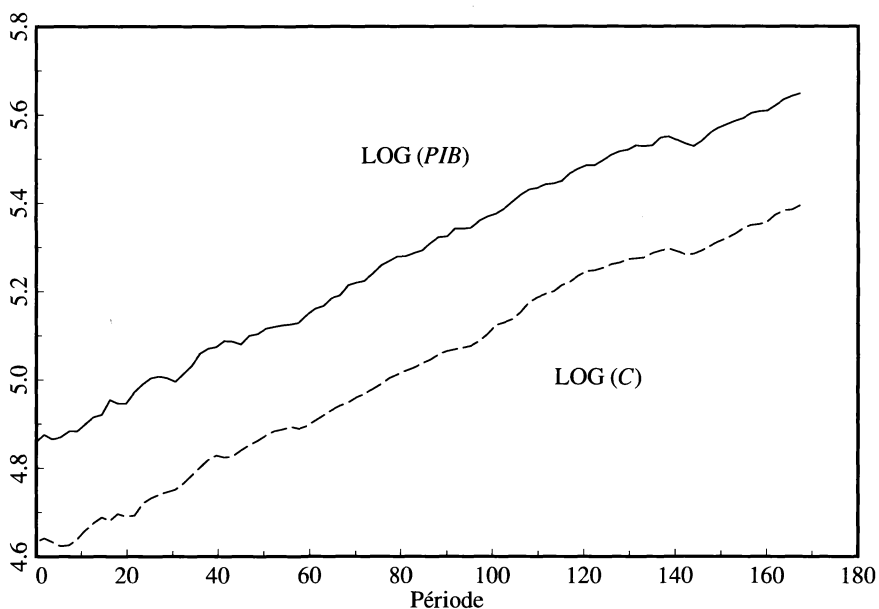


TABLEAU 1
TESTS DE STATIONNARITÉ

variable	γ estimé	t brute	t ajustée
$\log(PIB)$ (N)	0.97355	-1.2743	-1.2845
$\log(C)$ (N)	0.95892	-1.7956	-1.9788
$\log(PIB)$ (D)	0.05831	-12.185	-12.259
$\log(C)$ (D)	-0.11571	-14.845	-14.860
$\log(PIB) - \log(C)$ (N)	0.81198	-4.1474	-4.3223
résidu de régression de cointégration	0.80038	-4.4419	-4.7037
tendance stochastique engendrée (N)	0.98736	-1.6198	-1.8849
tendance stochastique engendrée (D)	0.64067	-6.5589	-6.3960
tendance déterministe engendrée (N)	0.87548	-3.5342	-3.7175

NOTES : La régression estimée est : $y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$. « N » entre parenthèse indique que le test porte sur le niveau de la variable. « D » entre parenthèse indique que le test porte sur sa différence première. La valeur critique des statistiques à 5% avec 168 observations est égale à -3.44 (Fuller, 1976, p. 373).

Outre la correction non paramétrique et ses propriétés, l'article de Perron fournit une « recette » détaillée pour le chercheur qui veut tester l'hypothèse d'une racine unitaire¹⁴. Le chercheur qui suit soigneusement cette recette pourrait avoir la conscience nette si ce n'était d'une petite complication soulevée par Perron lui-même dans un article ultérieur (sous presse), ce qui nous amène au troisième sujet de notre survol.

4. CHANGEMENTS STRUCTURELS ET TESTS DE STATIONNARITÉ

Considérons le cas d'une variable macroéconomique qui, par hypothèse, suit un processus stochastique stationnaire donné, à part un seul changement de sa moyenne. Un exemple du comportement de ce type de variable est illustré par la figure 3¹⁵. On peut se demander ce qui va arriver si l'on essaie d'appliquer un test de l'hypothèse nulle d'une tendance stochastique sans tenir compte de ce changement structurel. Intuitivement, il est clair que l'effet d'un changement de moyenne ressemble beaucoup à un choc qui a des effets *permanents*. On aurait tendance à croire que le fait de ne pas tenir compte du saut va diminuer la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle de non-stationnarité. Ceci est en fait le cas. La démonstration formelle de ce résultat se trouve dans le texte de Perron (sous presse)¹⁶.

Les résultats de Perron sont basés sur l'hypothèse d'un changement structurel donné à l'intérieur de l'échantillon. Ce changement structurel est *exogène* ; on ne teste pas la présence d'un changement structurel. La plupart du temps, l'économètre appliqué aura des *a priori* moins forts que Perron concernant l'existence d'une rupture structurelle à l'intérieur de l'échantillon qu'il utilise.

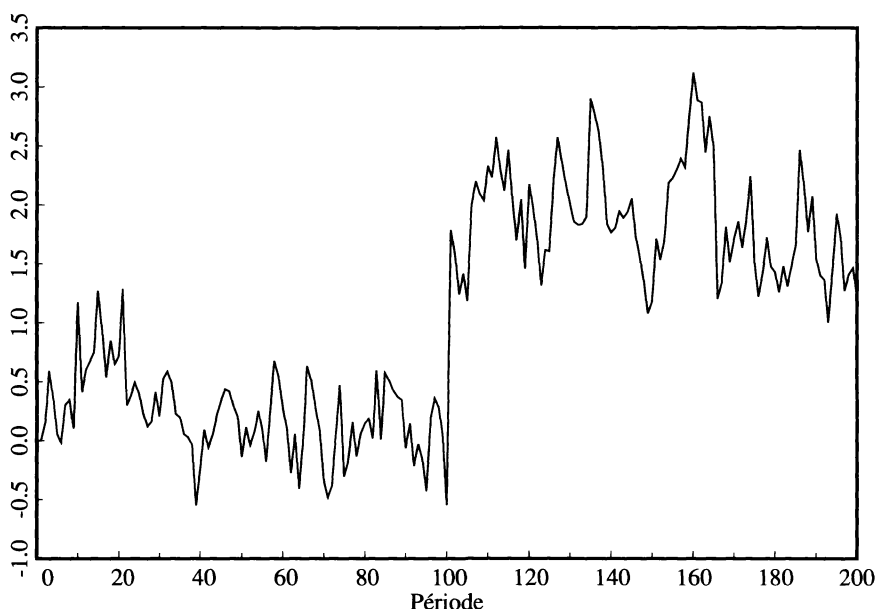
Un sujet de recherche actuel est le développement de tests formels de changement(s) structurel(s) qui peuvent être effectués conjointement avec des tests de stationnarité (voir le texte de Christiano, 1988, pour un exemple). Il existe d'autres façons, moins formelles, de détecter la présence de changements structurels avant de procéder à des tests de stationnarité. Une technique employée par Paquet (1988) consiste à calculer de façon récursive les fonctions d'autocorrélation d'une série chronologique. On calcule d'abord la fonction d'autocorrélation (d'ordre 1 à k) une première fois en utilisant un sous-échantillon des données à sa

14. Il faut d'abord estimer l'équation (4) pour voir si l'évidence permet de rejeter l'hypothèse nulle d'une racine unitaire. Si oui, le processus s'arrête. Si non, le résultat pourrait être dû à une faible puissance du test qui résulte de l'inclusion d'une tendance déterministe dans la régression quand ceci n'est pas justifié. Donc, si l'hypothèse nulle n'est pas rejetée, on procède à un test d'une nouvelle hypothèse nulle, $H_0 : (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$. Si cette hypothèse n'est pas rejetée, cela nous permet de réestimer l'équation (4) en excluant la tendance déterministe et de retester l'hypothèse nulle, $H_0 : \gamma = 1$. Cependant, la valeur critique de ce dernier test doit être ajustée pour tenir compte du fait que les hypothèses sont testées de façon séquentielle.

15. Nous avons créé une série de valeurs utilisant le processus $y_t = \alpha_t + \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$ où ε_t suit une loi normale avec moyenne nulle, variance unitaire constante et sans autocorrélation. α_t est égal à zéro pour les 100 premières observations, et est égal à deux pour les 100 dernières observations. θ est égal à 0,7.

16. Perron considère également le cas d'un changement dans la tendance déterministe, qui également rend plus difficile le rejet de l'hypothèse nulle d'une racine unitaire.

FIGURE 3
CHANGEMENT DE MOYENNE



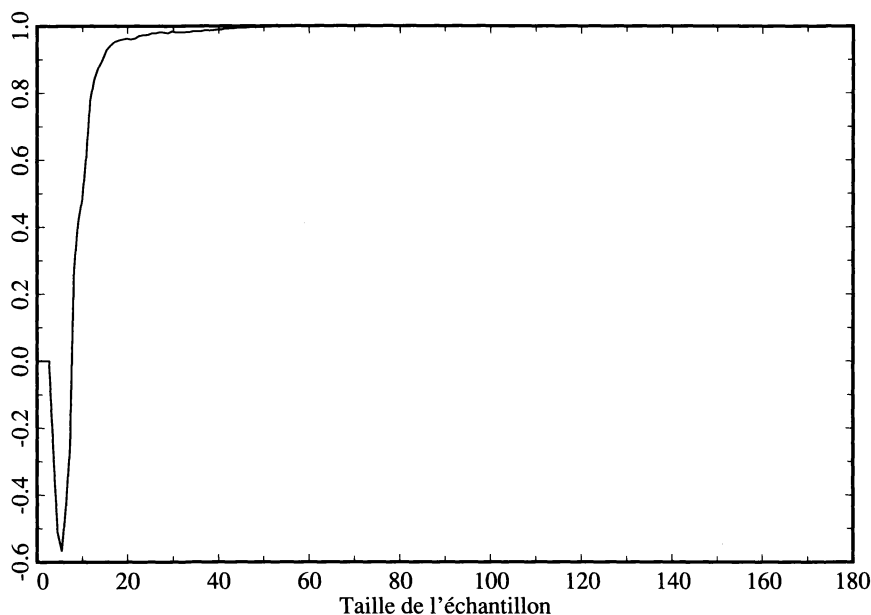
disposition. Si on a des observations pour les périodes 1 à T , on choisit un sous-échantillon allant de la période 1 à la période t , $k < t < T$. Ensuite, on recalcule les autocorrélations après avoir rajouté l'observation de la période $t + 1$, et ainsi de suite jusqu'à l'inclusion de la dernière observation. Il serait possible d'envisager le calcul de toute une batterie de statistiques récursives (moyenne, variance, autocorrélations partielles, etc.). Des changements structurels apparaîtront comme des « sauts » abrupts dans les graphiques des statistiques récursives¹⁷.

La fonction empirique d'autocorrélation de premier ordre, calculée de façon récursive, est illustrée pour le PIB canadien par la figure 4. Quand l'autocorrélation est estimée avec peu d'observations, l'estimateur est assez imprécis, et la fonction révèle un certain degré d'instabilité. Mais une fois que la taille de l'échantillon dépasse une vingtaine d'observations, la fonction récursive devient très stable. Cette stabilité est rassurante : elle indique que le non rejet de l'hypothèse de non-stationnarité pour le PIB canadien n'est probablement pas dû à un changement structurel à l'intérieur de l'échantillon.

Le fait de considérer un changement de moyenne à l'intérieur de l'échantillon comme un événement exogène soulève un point qui relève de la philosophie. Perron (sous presse) démontre que l'on peut rejeter l'hypothèse que le PNB américain contienne une racine unitaire, si sa chute en 1929 est considérée comme un

17. La significativité de ces sauts pourraient faire l'objet de tests d'hypothèse non paramétriques.

FIGURE 4
AUTOCORRÉLATION DU PIB



changement permanent de sa moyenne. Ceci revient à traiter la Grande Dépression comme un phénomène exogène et non pas comme une réalisation (bien qu'extrême) d'un processus stochastique donné. Bon nombre d'économistes pensent que la vocation de la théorie économique est justement d'expliquer des phénomènes importants comme la Grande Dépression, et donc de les traiter comme des événements endogènes.

5. COMMENT « EXTRAIRE LA TENDANCE » DES SÉRIES MACROÉCONOMIQUES ?

Il faut distinguer la « bonne procédure à suivre » dans le cadre d'études purement statistiques de celle à suivre dans le cadre de la modélisation théorique de phénomènes macroéconomiques. Dans ce dernier cas, il est généralement admis maintenant que les liens entre les fluctuations économiques cycliques et les fluctuations stochastiques de la croissance peuvent être importants et complexes. Si tel est le cas, il n'est pas réaliste de vouloir modéliser la composante cyclique des variables économiques en négligeant de modéliser les déterminants de la croissance. Un modèle adéquat du cycle économique doit probablement imbriquer un modèle de la croissance économique. En fait, il y a eu récemment une véritable renaissance de l'intérêt pour la modélisation de la croissance, avec une nouvelle génération de modèles qui l'endogénéisent (voir par exemple Aghion et Howitt, 1989 ; King et Rebelo, 1988 ; et Romer, 1986, 1988).

Dans le cadre d'une étude statistique, il est possible d'extraire une tendance déterministe en créant une variable transformée qui est mesurée comme la déviation par rapport à sa tendance déterministe. Pour la variable de l'équation (1) nous avons :

$$(x_t - \beta t) \equiv x_t^* = \alpha + \varepsilon_t. \quad (1')$$

La variable transformée x_t^* est stationnaire, et il est possible de procéder à l'estimation de la constante α et du processus stochastique ε_t . Cette procédure était la méthode habituelle employée par les économètres appliqués pour transformer les séries chronologiques avant la reconnaissance générale pendant les années '70 de la possibilité de l'existence de tendances stochastiques.

Dans le cas de la tendance stochastique, la transformation consiste à utiliser la différence première de la série. Utilisant l'équation (2), nous obtenons :

$$(y_t - y_{t-1}) = y_t^* = \beta + \varepsilon_t. \quad (2')$$

Encore une fois, la variable transformée y_t^* est stationnaire.

Qu'est-ce qui arrive si par erreur ou par inadvertance le chercheur essaie d'utiliser la mauvaise façon de transformer une variable non stationnaire ? Considérons le cas de la variable qui contient une racine unitaire, décrite par l'équation (2). Il est facile de transformer l'équation de la façon suivante :

$$y_t = y_0 + \beta t + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}. \quad (2'')$$

Exprimé ainsi, le processus de marche aléatoire ressemble au processus de tendance déterministe décrit par l'équation (1), mais la dépendance de y_t de toute la série des chocs passés est une différence cruciale. L'extraction de la tendance déterministe donne la variable transformée suivante :

$$(y_t - \beta t) = y_t^* = y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}. \quad (5)$$

Tel que démontré par Nelson et Kang (1981) dans un article influent, l'extraction d'une tendance déterministe d'une série qui contient une racine unitaire résulte en une série qui est extrêmement autocorrélée. Nelson et Kang appellent ce phénomène le problème de la « périodicité fictive ».

Considérons maintenant le cas où le vrai processus est une tendance déterministe. De l'équation (1) nous obtenons :

$$(x_t - x_{t-1}) \equiv x_t^* = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}. \quad (1'')$$

Encore une fois, un élément supplémentaire de corrélation du terme d'erreur est introduit par l'application erronée de cette procédure. Si ε_t suit une loi normale avec moyenne nulle et variance constante et n'est pas autocorrélé, le nouveau terme d'erreur $(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$ suit un processus de moyenne mobile non invertible (le processus n'est pas invertible à cause du coefficient unitaire sur le terme retardé ε_{t-1} ; voir Harvey, 1981, p. 29 pour une explication de ce concept) d'ordre un. Dans la plupart des cas, les conséquences d'un terme d'erreur composé comme celui de l'équation (7) sur l'inférence statistique sont moins graves que celles du terme d'erreur de (6).

Pour cette raison, la prudence risque de mener le chercheur à induire la stationnarité par l'application de l'opérateur de différence première dans les cas où il n'est pas sûr de la vraie nature de la tendance.

Si le chercheur ne transforme pas ses variables pour les rendre stationnaires avant de les utiliser dans ses régressions, il s'expose au danger d'y retrouver des « corrélations fictives ». L'article de Stock et Watson (1988a) contient une très bonne illustration de ce phénomène. Dans une étude Monte Carlo, ils engendrent des observations sur deux marches aléatoires qui sont parfaitement indépendantes par construction. Quand ils régressent une variable sur l'autre, ils trouvent généralement une relation statistiquement significative entre les variables (la relation s'avère significative selon les règles de l'inférence statistique standard, qui en fait ne sont pas valables dans cette situation)¹⁸.

Il y a une situation où le chercheur serait justifié de régresser une variable non stationnaire directement sur une autre variable non stationnaire : quand il existe une relation d'équilibre à long terme entre ces deux variables¹⁹.

6. RELATIONS À LONG TERME ENTRE VARIABLES : LA COINTÉGRATION

Certaines variables qui ont une tendance à croître semblent être liées par une relation stable. Un exemple simple serait celui du PIB et de la consommation agrégée. La part de la consommation dans le PIB varie dans le temps, mais il est peut-être raisonnable de supposer que cette variation ait le caractère d'un processus stochastique stationnaire.

Supposons que le logarithme du PIB puisse être décrit par un processus de marche aléatoire comme dans (2) :

$$y_t = \beta + y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2)$$

Soit la relation suivante entre la consommation et le PIB :

$$C_t / Y_t = K + e^{\mu_t} \quad (6)$$

où nous employons la convention qu'une majuscule dénote le niveau d'une variable et qu'une minuscule dénote le logarithme du niveau. Par hypothèse, μ_t est un processus stochastique stationnaire. Nous avons ainsi :

$$c_t - y_t = k + \mu_t. \quad (6')$$

Nous pouvons maintenant calculer le processus stochastique qui détermine l'évolution de c_t . Nous avons :

$$c_t - c_{t-1} = y_t - y_{t-1} + \mu_t - \mu_{t-1} \quad (7)$$

18. Pour une étude détaillée de ce problème, voir Granger et Newbold (1974).

19. L'utilisation de variables non stationnaires est également justifiée dans l'approche bayésienne à l'économétrie, dans le sens que les règles de l'inférence statistique bayésienne ne sont pas modifiées par la non-stationnarité des variables. Pour un survol et une défense de l'approche bayésienne en ce qui a trait à la non-stationnarité, voir l'article récent de Sims (1988). Pour une application aux effets saisonniers, voir l'article de Raynald et Simonato (1989).

et donc :

$$c_t = \beta + c_{t-1} + \varepsilon_t + \mu_t - \mu_{t-1}. \quad (8)$$

Donc, c_t contient une racine unitaire, mais sa tendance stochastique est étroitement liée à la tendance stochastique de y_t ; en fait, les deux tendances sont une seule tendance « commune ». L'équation (6') nous indique qu'il y a une combinaison linéaire de c_t et y_t qui est stationnaire. Si deux variables sont « intégrées d'ordre un » (contiennent chacune une seule racine unitaire), et s'il existe une combinaison linéaire de ces variables qui est stationnaire (« intégrée d'ordre zéro »), nous allons dire que les deux variables en question sont « cointégrées ».

Selon un théorème de Granger et Engle (1987), il existe pour des variables cointégrées une représentation en modèle de « correction des erreurs ». En général, pour deux variables y_t et c_t , un tel modèle peut être exprimé de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + A(L) \begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta c_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_t^1 \\ v_t^2 \end{bmatrix} - B\gamma' \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ c_{t-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

où B est un vecteur de coefficients d'ordre 2×1 ; $[v_t^1 \ v_t^2]'$ est un vecteur d'erreurs stochastiques non corrélées ; $[k_1 \ k_2]'$ est un vecteur de constantes ; $A(L)$ est un polynôme dans l'opérateur de retards L^{20} :

$$A(L) = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix} L + \begin{bmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{21}^2 & A_{22}^2 \end{bmatrix} L^2 + \begin{bmatrix} A_{11}^3 & A_{12}^3 \\ A_{21}^3 & A_{22}^3 \end{bmatrix} L^3 + \dots \quad (10)$$

et où γ est le vecteur de coefficients qui engendre la combinaison linéaire stationnaire de c_t et y_t . Le vecteur γ est appelé un « vecteur de cointégration ». Dans le cas de l'exemple développé ici, la représentation est particulièrement simple :

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta + k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ v_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ c_{t-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

où $v_t = \varepsilon_t + \mu_t$. Cette équation peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ v_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (c_{t-1} - y_{t-1} - k). \quad (12)$$

Le terme $(c_{t-1} - y_{t-1} - k)$ est le terme de « correction des erreurs » qui capte l'idée qu'une déviation par rapport à la relation d'équilibre à long terme entre y_t et c_t a tendance à disparaître graduellement ou à être « corrigée »²¹.

Tout comme il peut être dangereux de négliger la non-stationnarité de variables dans le cadre d'une étude statistique, il peut être dangereux de négliger des relations de long terme éventuelles entre les niveaux de variables qui ont été « stationnarisées » par l'application de l'opérateur de différence première. Stock et Watson (1988a)

20. Pour une variable x_t , $Lx_t \equiv x_{t-1}$.

21. Les modèles de correction des erreurs ont été développés avant que le lien entre correction des erreurs et cointégration soit découvert. Pour une application célèbre de cette technique, voir Davidson *et al* (1978).

donnent un exemple basé sur la consommation et le revenu permanent (dans leur exemple hypothétique le revenu permanent est par construction égal tout simplement au revenu courant plus un terme d'erreur et donc il est mesuré avec erreur par ce dernier). La régression qui utilise comme variable dépendante le changement du revenu sous-estime systématiquement la propension marginale à consommer du revenu permanent.

Des tests ont été développés pour détecter la présence de relations à long terme à l'intérieur d'un groupe de variables qui sont intégrées d'ordre un. Une méthode (Phillips et Ouliaris, 1987 ; et Stock et Watson, 1988b) utilise les composantes principales de n séries chronologiques différentes pour construire un test formel de l'hypothèse nulle que ces séries contiennent un nombre m (inférieur à n) de tendances communes²².

Dans le cas le plus simple de deux variables non stationnaires, une façon très simple de tester l'existence d'une relation à long terme est simplement de régresser le niveau d'une variable sur le niveau de l'autre. La théorie des « régressions de cointégration » a été développée dans un article important de Stock (1987). Le choix de la variable dépendante dans la régression est tout à fait arbitraire et n'influence pas les propriétés asymptotiques des estimateurs. Il est intuitivement clair que, si le coefficient estimé est celui qui donne la combinaison linéaire des deux variables qui est stationnaire, le terme d'erreur de la régression devient stationnaire. Sinon, le terme d'erreur de la régression sera lui-même non stationnaire, et la somme des résidus sera généralement beaucoup plus élevée en échantillon fini. Alors, la minimisation de la somme des carrés des erreurs implique le choix du coefficient qui engendre la combinaison linéaire stationnaire, si cela existe. Stock a démontré que l'estimation de ce « coefficient de cointégration » est biaisée en petits échantillons, mais que l'estimateur est convergent ; en outre, la convergence est plus rapide que dans le cas de l'estimation avec la technique des moindres carrés ordinaires quand les données utilisées sont stationnaires.

Il est possible d'illustrer la modélisation avec des variables qui sont cointégrées à l'aide de notre exemple du PIB et de la consommation agrégée canadiens²³. L'hypothèse d'un rapport stationnaire entre la consommation et le PIB implique un vecteur de cointégration égal à $[-1 \ 1]$, tel que démontré par l'équation (11). Par conséquent, nous n'avons pas besoin d'estimer le coefficient de cointégration. Le tableau 1 indique qu'il est possible de rejeter l'hypothèse nulle d'une racine unitaire pour la combinaison linéaire $(y_t - c_t)$.

Ce résultat est confirmé par une procédure qui n'utilise pas de raisonnement *a priori* pour imposer le vecteur de cointégration. Le tableau 2 donne les résultats d'une régression de cointégration où la variable dépendante est le niveau de la

22. Ambler (1988) utilise les composantes principales d'un ensemble de séries de façon plus informelle. Les statistiques t de tests Dickey-Fuller sur les composantes principales individuelles sont utilisées comme une statistique descriptive qui peut donner une idée du nombre de tendances communes.

23. Le lecteur pourra aussi consulter Hendry (1986) pour un survol de la modélisation économétrique avec variables cointégrées.

significatif, et indique qu'un écart entre la relation de long terme entre c_t et y_t a tendance à disparaître (ou à être « corrigé ») à un rythme de 11% par trimestre.

L'équation estimée ne permet pas d'expliquer un grand pourcentage des changements de la consommation agrégée, mais la significativité des variables explicatives est incompatible avec la théorie simple de la détermination de la consommation basée sur le revenu permanent et sur les attentes rationnelles. Tel que démontré par Hall (1978), cette théorie a pour conséquence que la consommation courante, étant basée sur une estimation optimale de la part des agents de leur revenu permanent, devrait refléter toute l'information relative au revenu permanent. Par conséquent, le changement de la consommation agrégée devrait être impossible à prévoir sur la base de l'information disponible aux agents économiques.

7. CONCLUSIONS

La question de la présence ou l'absence de la stationnarité des séries chronologiques macroéconomiques continuera de préoccuper les chercheurs théoriques et appliqués. Ce survol rapide des techniques et des enjeux devrait permettre au lecteur de mieux comprendre la littérature sur le sujet et d'effectuer ses propres tests d'hypothèse dans le cadre de ses travaux empiriques.

BIBLIOGRAPHIE

- AGHION, P. et P. HOWITT, (1989), « A Model of Growth through Creative Destruction », manuscrit, MIT.
- AMBLER, S., (sous presse), « Does Money Matter in Canada ? Evidence from a Vector Error Correction Model », *Review of Economics and Statistics*.
- AMBLER, S. et L. PHANEUF, (1989), « Aggregate Disturbances, Dynamic Propagation and the Persistence of Output and Unemployment Fluctuations », cahier de recherche 3, Centre de recherche sur les politiques économiques, UQAM.
- CAMPBELL, J. and N.G. MANKIW, (1987), « Are Output Fluctuations Transitory ? », *Quarterly Journal of Economics*. v. 102, pp. 857-80.
- CHRISTIANO, L. (1988), « Searching for a Break in GNP », Federal Reserve Bank of Minneapolis working paper 416.
- DAVIDSON, J.E.H., D.F. HENDRY, F. SRBA et S. YEO (1978), « Econometric Modeling of the Aggregate Time-Series Relationship Between Consumers' Expenditure and Income in the United Kingdom », *Economic Journal*. v. 88, pp. 661-92.
- DICKEY, D. et W. FULLER (1979), « Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root », *Journal of the American Statistical Association*. v. 74, pp. 427-31.
- DICKEY, D. et W. FULLER (1981), « Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root », *Econometrica*. v. 49, pp. 1057-72.
- FULLER, W.A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*. New York, John Wiley.

- GHYSELS, E. (1987), « Cycles and Seasonals in Inventories : Another Look at Non-Stationarity and Induced Seasonality », cahier de recherche 8718, Département de science économique, Université de Montréal.
- GRANGER, C.W.J. et R. ENGLE (1987), « Dynamic Model Specification with Equilibrium Constraints : Co-integration and Error Correction », *Econometrica*. v. 55, pp. 251-76.
- GRANGER, C.W.J. et P. NEWBOLD (1974), « Spurious Regressions in Econometrics », *Journal of Econometrics*. v. 2, pp. 111-20.
- HALL, R.E. (1978), « Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis : Theory and Evidence », *Journal of Political Economy*. v. 86, pp. 971-987.
- HARVEY, A.C. (1981), *The Econometric Analysis of Time Series*. Oxford, Philip Allan.
- HENDRY, D. (1986), « Econometric Modelling with Cointegrated Variables : An Overview », *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. v. 46, pp. 201-12.
- KING, R. and S. REBELO (1988), « Business Cycles with Endogenous Growth », manuscrit, University of Rochester.
- KYDLAND, F. et E. PRESCOTT (1982), « Time to Build and Aggregate Fluctuations », *Econometrica*. v. 50, pp. 1345-70.
- MCCALLUM, B.T. (1988), « Postwar Developments in Business Cycle Theory : A Moderately Classical Perspective », *Journal of Money, Credit and Banking*. v. 20, no. 3, pp. 459-71.
- NELSON, C.R. et H. KANG (1981), « Spurious Periodicity in Inappropriately Detrended Time Series », *Econometrica*. v. 49, pp. 741-51.
- NELSON, C.R. et C.I. PLOSSER (1982), « Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series », *Journal of Monetary Economics*. v. 10, pp. 139-62.
- PAQUET, A. (1988), « An Empirical Investigation of the Real Interest Rate Differential Between Canada and the United States », manuscrit, University of Rochester.
- PERRON, P. (1988), « Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series : Further Evidence from a New Approach », *Journal of Economic Dynamics and Control*. v. 12, pp. 297-332.
- PERRON, P. (sous presse), « The Great Crash, the Oil Price Shock and the Unit Root Hypothesis », *Econometrica*.
- PHILLIPS, P.C.B. et S. OULIARIS (1987), « Testing for Cointegration using Principle Components », *Journal of Economic Dynamics and Control*. v. 12, pp. 205-30.
- RAYNAULD, J. et J.-G. SIMONATO (1988), « Seasonal BVAR Models », manuscrit, Institut d'économie appliquée, École des Hautes Études Commerciales.
- ROMER, P. (1986), « Increasing Returns and Long Run Growth », *Journal of Political Economy*. v. 94, pp. 1002-37.

- ROMER, P. (1988), « Endogenous Technical Change », manuscrit, University of Chicago.
- ROTEMBERG, J. (1987), « The New Keynesian Microfoundations », dans S. FISCHER (éd.), *NBER Macroeconomics Annual 1987*. Cambridge, MA MIT Press.
- SCHWERT, G.W. (1987), « Effects of Model Specification on Tests for Unit Roots in Macroeconomic Data », *Journal of Monetary Economics*. v. 20, pp. 73-103.
- SCHWERT, G.W. (1989), « Tests for Unit Roots : A Monte Carlo Investigation », *Journal of Business and Economic Statistics*. v. 7, pp. 147-60.
- SIMS, C. (1988), « Bayesian Skepticism on Unit Root Econometrics », *Journal of Economic Dynamics and Control*. v. 12, pp. 463-74.
- STOCK, J. (1987), « Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Co-integrating Vectors », *Econometrica*. v. 55, pp. 1035-56.
- STOCK J. et M. WATSON (1988a), « Variable Trends in Economic Time Series », *Journal of Economic Perspectives*. v. 2, pp. 147-74.
- STOCK, J. et M. WATSON (1988b), « Testing for Common Trends », *Journal of the American Statistical Association*. v. 83, pp. 1097-1107.
- WATSON, M.W. (1986), « Univariate Detrending Methods with Stochastic Trends », *Journal of Monetary Economics*. v. 18, pp. 49-75.
- WEST, K. (1988), « On the Interpretation of Near Random Walk Behavior in GNP », *American Economic Review*. v. 78, pp. 202-9.