Éducation et francophonie

La compréhension de concepts mathématiques chez des élèves anglophones en immersion française au secondaire

The comprehension of mathematics concepts among Anglophone students in French immersion high school

La comprensión de conceptos matemáticos entre los alumnos anglófonos en inmersión en francés en secundaria

Réjean Pépin et Jean Dionne

Volume 25, numéro 1, printemps 1997

L'apprentissage et l'enseignement des sciences et des mathématiques dans une perspective constructiviste

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1080651ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1080651ar

Éditeur(s)

Association canadienne d'éducation de langue française

ISSN

0849-1089 (imprimé)
1916-8659 (numérique)

Citer cet article

Pépin, R. & Dionne, J. (1997). La compréhension de concepts mathématiques chez des élèves anglophones en immersion française au secondaire. *Éducation et francophonie*, *25*(1), 85–110. https://doi.org/10.7202/1080651ar

Résumé de l'article

L'immersion est un mode d'apprentissage d'une langue seconde dont la popularité est croissante. Mais encore faut-il s'assurer que la maîtrise de cette langue seconde ne s'acquiert pas aux dépens d'une compétence véritable dans les autres matières scolaires, dont les mathématiques. C'est pour répondre à de telles inquiétudes en dépassant les habituelles mesures de rendement scolaire que cette étude sur la compréhension de trois concepts mathématiques – point, distance et cercle – a été menée. Elle permet de constater, d'une part, qu'il est possible de décrire et d'évaluer de façon opérationnelle la compréhension de concepts mathématiques et, d'autre part, que la compréhension des trois concepts élaborés par les élèves anglophones d'un programme d'immersion française s'avère, sinon parfaite, du moins suffisante pour reconnaître la qualité et la valeur des apprentissages réalisés.

La compréhension de concepts mathématiques chez des élèves anglophones en immersion française au secondaire

Réjean PÉPIN
École Sir James Dunn, Ontario, Canada

Jean DIONNE
Université Laval, Québec, Canada

RÉSUMÉ

L'immersion est un mode d'apprentissage d'une langue seconde dont la popularité est croissante. Mais encore faut-il s'assurer que la maîtrise de cette langue seconde ne s'acquiert pas aux dépens d'une compétence véritable dans les autres matières scolaires, dont les mathématiques. C'est pour répondre à de telles inquiétudes en dépassant les habituelles mesures de rendement scolaire que cette étude sur la compréhension de trois concepts mathématiques – point, distance et cercle – a été menée. Elle permet de constater, d'une part, qu'il est possible de décrire et d'évaluer de façon opérationnelle la compréhension de concepts mathématiques et, d'autre part, que la compréhension des trois concepts élaborés par les élèves anglophones d'un programme d'immersion française s'avère, sinon parfaite, du moins suffisante pour reconnaître la qualité et la valeur des apprentissages réalisés.

ABSTRACT

The comprehension of mathematics concepts among Anglophone students in French immersion high school

Réjean PÉPIN
Sir James Dunn School, Ontario, Canada

Jean DIONNE
Laval University, Québec, Canada

Immersion is an acknowledged popular method of teaching a second language. Care must be taken, however, to ensure that this second language is not learned to the detriment of real competence in other subjects, such as mathematics. This study on the understanding of three mathematical concepts - point, distance and circle - was carried out in order to meet these concerns by bypassing the usual methods of assessing academic performance. It shows that on the one hand, the understanding of mathematical concepts can be described and operationally assessed, and on the other hand, that while the understanding of the three concepts, eélaboréated by English-speaking students in a French immersion program, may not be perfect, it is at least sufficient to acknowledge the qualitéy of the learning accomplished.

RESUMEN

La comprensión de conceptos matemáticos entre los alumnos anglófonos en inmersión en francés en secundaria

Réjean PÉPIN
Escuela Sir James Dunn, Ontario, Canadá

Jean DIONNE
Universidad Laval, Quebec, Canadá

La inmersin es una manera de aprender una segunda lengua cuya popularidad ha sido reconocida. Pero hay que cerciorarse de que la adquisicin de la segunda lengua no se realiza en detrimento de una verdadera competencia en otras materias escolares, entre ellas las matemticas. Con el fin de dar una respuesta a este tipo de inquietud, e ir ms all las clsicas escalas de rendimiento acadmico, hemos realizado este estudio sobre la comprensin de tres conceptos matemticos : el punto, la distancia y el crculo. Este estudio nos ha permitido constatar, por una parte, que es posible describir y evaluar la comprensin de conceptos matemticos de manera operacional. Por otra parte, que la comprensin de los tres conceptos realizada por los alumnos anglfonos de un programa de inmersin en lengua francesa es, sino perfecta por lo menos suficiente como para reconocer la calidad y el valor de lo aprendido.

Introduction

L'immersion, définie comme une forme d'éducation bilingue dans laquelle une langue seconde est utilisée en plus de la langue maternelle de l'élève pour l'enseignement pendant une partie de sa formation primaire ou secondaire (Genesee, 1983, p. 3; notre traduction), est un phénomène relativement récent dans l'histoire de l'éducation canadienne : on s'entend pour en situer les débuts en 1965 à Saint-Lambert, en banlieue de Montréal. Depuis, la popularité de l'immersion n'a cessé de croître, notamment parce qu'on a constaté qu'en adoptant une langue seconde comme langue d'enseignement de la majorité des matières il est possible de rendre fonctionnellement bilingues des classes entières d'élèves (Bordeleau *et al.*, 1988). Ce qui n'a pas empêché certaines inquiétudes de se manifester : de nombreux éducateurs et éducatrices s'interrogent notamment sur le danger de voir le développement cognitif des enfants retardé par la présence de deux langues.

L'adoption d'une langue seconde comme langue d'enseignement dans un domaine plus particulier, comme celui des mathématiques, soulève également quelques craintes chez les élèves et chez leurs parents. Les mathématiques sont en effet perçues comme une discipline d'une importance primordiale, mais souvent difficile. Le choix d'une langue seconde comme véhicule d'enseignement ne vient-il pas ajouter à cette difficulté, introduisant un élément susceptible de nuire à la compréhension des élèves, voire de compromettre leurs chances de succès? Cette crainte se prolonge en une autre plus générale. La nécessité d'assurer la continuité des apprentissages est un principe pédagogique bien connu; or beaucoup d'élèves qui, à une étape donnée de leur parcours scolaire, pensent à l'immersion ont jusque-là étudié dans leur langue maternelle et prévoient poursuivre dans cette même langue maternelle des études ultérieures où les mathématiques risquent d'intervenir à divers titres. Ne serait-il pas préférable dans ces conditions de limiter l'immersion aux matières comme l'histoire, la géographie, les arts langagiers, où les risques de causer des torts paraissent moindres?

Problématique

Les questions soulevées dans les brefs paragraphes d'introduction traduisent des préoccupations bien présentes chez les personnes – élèves, enseignants, parents... – impliquées dans un programme d'immersion française pour anglophones de niveau secondaire en Ontario. Diverses études ont heureusement rapporté des résultats susceptibles d'apaiser une part de leurs inquiétudes. En effet, les recherches menées depuis 1960 ont permis de mettre en évidence plusieurs effets positifs du bilinguisme sur le développement cognitif (Peal et Lambert, 1962; Balkan, 1970; Lambert et Tucker, 1972; Cummins et Gulutsan, 1974). Quelques notes discordantes sont toutefois apparues : Skutnabb-Kangas et Toukomaa (1976) ont ainsi observé des enfants finlandais qui, ayant migré en Suède, ont obtenu des résultats inférieurs aux normes des tests d'habileté verbale en suédois comme en finlandais. Ces mêmes enfants ont aussi donné des signes de déficit cognitif, n'arrivant pas à développer leur potentiel linguistique dans les deux langues. De telles observations ont forcé les chercheurs et chercheuses à pousser davantage leurs investigations. Les travaux de Lambert (1974; 1977; 1984), de Cummins (1976; 1977; 1978; 1984) et de Hamers et Blanc (1983) ont notamment mis en évidence l'importance de tenir compte du statut de chacune des langues en présence. Il en ressort que, dans des conditions où la langue maternelle de l'enfant n'est pas socialement dévalorisée en regard de la langue seconde, les élèves en immersion ne courent guère de risques d'accuser un retard significatif sur les plans linguistique et conceptuel par rapport à leurs pairs qui étudient dans leur langue maternelle. Au contraire, dans certains cas, ils seraient même avantagés, l'obtention d'un seuil élevé de compétence bilingue pouvant contribuer favorablement à leur développement cognitif. Les recherches portant sur l'apprentissage des mathématiques viennent confirmer les conclusions précédentes : les élèves anglophones en immersion qui suivent leurs cours de mathématiques en français réussissent aussi bien que leurs pairs qui suivent les mêmes cours dans leur anglais maternel (Lambert et Tucker, 1972; Swain et Lapkin, 1981; 1982; Genesee, 1983).

Les inquiétudes évoquées paraissent donc vaines, les questions posées semblant bien avoir eu des réponses satisfaisantes... jusqu'à ce qu'on se rende compte que les conclusions rapportées s'appuient sur les comparaisons de résultats obtenus de tests standardisés mesurant essentiellement le rendement scolaire. Pour les chercheurs et chercheuses, le recours à de tels tests est tentant : ils sont largement disponibles, faciles à administrer, les données sont simples à traiter et conduisent à des mesures que l'on interprète de manière presque immédiate et qui paraissent objectives. Burns (1986) critique pourtant vertement cette centration étroite sur le rendement scolaire qui, dit-il, a permis de conclure que non seulement l'immersion fonctionnait, mais qu'elle fonctionnait extrêmement bien. Le rendement scolaire n'est que la variable la plus facilement mesurable, la plus séduisante pour le public, mais aussi la plus trompeuse en éducation, alors que sont ignorées les caractéristiques particulières du programme comme celles de l'élève : par exemple, on fait toujours passer les tests standardisés par écrit, négligeant ainsi des dimensions linguistiques cruciales.

Les critiques à l'encontre des tests de rendement scolaire débordent d'ailleurs le contexte de l'immersion. Nantais (1989) insiste sur la conception réductionniste des mathématiques et de l'apprentissage des mathématiques qui les sous-tend. Ces tests, explique-t-elle, ne mesurent que la performance et sont centrés sur l'obtention de réponses justes; s'y limiter, c'est prétendre que de telles réponses et les bonnes notes qui les sanctionnent donnent un reflet fidèle de ce qui a été enseigné, appris, compris. Or, de nombreuses études ont mis en évidence le fait que la compréhension des concepts n'est pas nécessairement liée aux résultats scolaires (Erlwanger, 1973; Dionne, 1988).

L'enseignement des mathématiques, croyons-nous, doit aller au-delà des bonnes réponses, au-delà des règles et des formules qui y conduisent, au-delà des problèmes stéréotypés susceptibles d'apparaître aux examens et autres tests. Il a pour mission générale de développer chez les élèves une créativité authentique, d'engendrer chez ces personnes un esprit d'invention suffisant pour qu'elles puissent affronter des situations inédites et faire évoluer leurs connaissances. Il doit en particulier les amener à la compréhension des notions mathématiques : par compréhension, nous entendons la structuration des connaissances, l'établissement de relations entre les divers éléments de cette connaissance (Dionne, 1995, p. 196). Bien établi, ce réseau permettra le transfert des connaissances à des situations originales et à l'acquisition de savoirs neufs. Pour être significative et cohérente avec cette mission de l'enseignement des mathématiques, c'est de cette compréhension que doit s'assurer l'évaluation. Alors seulement pourra-t-elle convaincre de l'efficacité réelle de ce qui a été fait en classe, de la qualité des apprentissages réalisés.

Ce qui vient d'être dit de l'enseignement des mathématiques en général vaut aussi pour celui proposé dans un contexte immersif. D'autant qu'une évaluation portant sur la compréhension chez les élèves en immersion permettrait de répondre moins superficiellement qu'on ne l'a fait jusqu'ici aux inquiétudes des parents; elle leur donnerait une meilleure idée des apprentissages réels de leurs enfants et de leurs chances de succès lors d'études ultérieures.

C'est ainsi que nous avons formulé notre question générale de recherche : le fait d'étudier les mathématiques dans une langue seconde, en l'occurrence le français en contexte immersif, a-t-il un impact sur la compréhension des concepts? Pour trouver une réponse à une telle question, nous avons dû faire certains choix : choix d'un modèle pour décrire la compréhension de manière opérationnelle et choix d'un ou de quelques concepts pour y limiter notre étude, car il ne pouvait être question d'évaluer la compréhension de tous les concepts mathématiques abordés dans le programme. Au chapitre du modèle, nous avons retenu le modèle de compréhension constructiviste élargi de Herscovics et Bergeron (1988); en ce qui concerne les concepts, nous nous sommes arrêtés à la notion de cercle, de même qu'à celles de point et de distance, nécessaires à l'étude de la première.

Modèle de compréhension constructiviste élargi

Le modèle élaboré par Herscovics et Bergeron (1988) propose deux paliers : le premier dérive la compréhension des concepts physiques préliminaires; et le second s'attache à la compréhension des concepts mathématiques émergents.

Le premier palier présente une hiérarchie de trois niveaux de compréhension :

- La *compréhension intuitive* d'une notion a trait à la perception globale de cette notion; résultant d'une forme de pensée essentiellement basée sur la perception sensorielle, le plus souvent visuelle, elle ne fournit que des approximations non numériques rudimentaires;
- La *compréhension procédurale logico-physique* a trait à l'acquisition de procédures s'exerçant sur des objets ou des transformations physiquement perceptibles que l'élève peut relier adéquatement à ses connaissances intuitives et utiliser de façon appropriée;

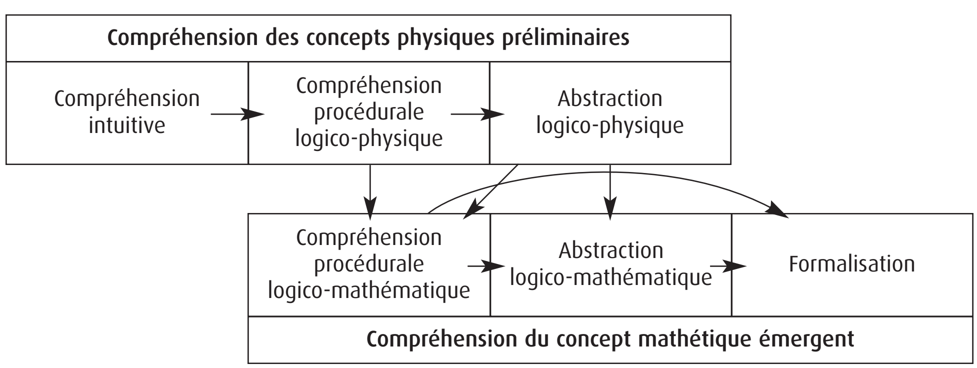
- L'*abstraction logico-physique* a trait à la construction d'invariants par rapport à des transformations spatiotemporelles, à la réversibilité et à la composition des transformations ainsi qu'à des généralisations les concernant.

Le second palier comprend non pas des niveaux de compréhension, mais trois composantes :

- La *compréhension procédurale logico-mathématique* a trait à l'acquisition de procédures logico-mathématiques explicites que l'élève peut relier aux notions physiques sous-jacentes et utiliser de façon appropriée;
- L'*abstraction logico-mathématique* a trait à la construction d'invariants logico-mathématiques reliés aux invariants logico-physiques pertinents, à la réversibilité et à la composition de transformations et opérations logico-mathématiques et à leur généralisation;
- La *formalisation* a d'abord trait à la symbolisation des notions pour lesquelles une certaine compréhension procédurale ou un certain degré d'abstraction existent déjà. On l'associe également à l'usage de définitions, axiomes et preuves qui sont souvent liés à la recherche de justifications mathématiques.

L'intérêt de cette perspective sur la compréhension, c'est qu'elle décrit un processus dans lequel l'élève part de ses intuitions qu'il ou qu'elle précise en représentations physiques, celles-ci s'intériorisant ensuite pour devenir représentations mentales, le tout fournissant une base solide, génératrice de sens pour les représentations symboliques conventionnelles. Avec une telle description, on se retrouve donc au cœur de la démarche d'apprentissage, celle où l'on peut le mieux juger de la valeur d'un enseignement en s'appuyant sur la qualité des connaissances construites par l'élève, ce qui correspond à nos préoccupations. La démarche décrite n'est cependant pas linéaire : l'élève peut par exemple passer directement de procédures physiques à des procédures mathématiques ou arriver à des abstractions mathématiques depuis leurs pendants physiques. La même absence de linéarité existe entre les composantes du second palier, puisqu'il est possible de formaliser certaines procédures avant de passer par l'abstraction. C'est ce qu'illustre le diagramme qui apparaît ci-dessous.

Modèle de compréhension constructiviste élargi



Compréhension du concept de cercle

Le choix de modèle étant posé, restait à fixer celui d'un concept : il en fallait un qui soit suffisamment important pour permettre un jugement significatif sur la compréhension des élèves. Rapidement, la géométrie analytique s'est imposée comme champ intéressant de sélection, puisqu'elle se situe au confluent de la géométrie et de l'algèbre, deux des grands thèmes de l'enseignement secondaire. De plus, le modèle convient bien à la description des concepts qu'on y trouve, les aspects géométriques et algébriques présentant des aspects très visuels et d'autres plus formellement mathématiques, ce qui fournit naturellement des critères pour les deux paliers. La notion de droite déjà étudiée par Boukhssimi (1990) nous a un moment intéressés; mais comme c'est la toute première abordée par les élèves en géométrie analytique, le concept de cercle qu'ils et qu'elles étudient un peu plus tard nous a semblé plus représentatif de ce que les élèves apprennent une fois acquise une certaine expérience dans le domaine. De plus, c'était là l'occasion d'enrichir nos connaissances en procédant à l'analyse d'un concept encore non traité dans la perspective du modèle.

Les objectifs spécifiques de recherche dont nous voulons faire état dans ces pages sont ainsi devenus les suivants :

1. Décrire la compréhension du concept de cercle en nous basant sur le modèle constructiviste élargi de Herscovics et Bergeron (1988).
2. Décrire la compréhension construite par des élèves anglophones suivant des cours de mathématiques au secondaire en immersion française.

La première étape du travail a donc été celle de l'analyse du concept de cercle dans le cadre du modèle constructiviste élargi. Pour décrire la compréhension de ce concept, nous avons procédé en trois temps. Le premier temps a été celui d'un remue-méninges (« *brainstorming* ») où, en nous appuyant sur les descriptions des diverses cases du modèle, nous avons formulé une première série de critères. Ce premier temps nous a aussi permis, à l'instar de ce qui s'était produit dans l'étude de Boukhssimi (1990) sur le concept de droite, d'identifier deux notions préalables à l'élaboration de la compréhension du cercle, les notions de point et de distance. Le concept de point avait déjà été analysé par Boukhssimi (1990), alors que, pour l'étude de la distance, nous avons pu nous inspirer des travaux de Hraud (1989a et b) sur la longueur et sa mesure, y adjoignant simplement des éléments de géométrie analytique pour parler de distance entre deux points placés dans un système d'axes. Les tableaux 2 et 3 résumant les critères de compréhension de ces deux notions se trouvent en annexe et les lectrices ou lecteurs intéressés par des explications plus détaillées pourront se référer aux travaux de Boukhssimi et de Hraud donnés en bibliographie. Le deuxième temps de l'analyse conceptuelle du cercle a été celui de l'enrichissement où, faisant appel aux hélas trop rares recherches se rapportant à la connaissance de cette figure, recherches notamment de Piaget *et al.* (1948) ainsi que d'Artigue et Robinet (1982), nous avons approfondi plusieurs des critères retenus et en avons ajouté quelques autres. Le troisième temps nous a conduits à la construction du tableau de critères, sorte de matrice cognitive que l'on retrouve au tableau 1 et dont nous allons décrire brièvement les divers éléments dans les paragraphes qui suivent.

Tableau 1. **Compréhension du cercle suivant le modèle élargi**

Compréhension du concept physique du cercle		
Compréhension intuitive	**Compréhension procédurale**	**Abstraction logico-physique**
Reconnaissance visuelle de la forme circulaire d'un objet.	Tracé d'un cercle avec une ficelle fixée à un point.	Reconnaissance de l'invariance du rayon à l'intérieur d'un même cercle.
	Preuve de Piaget : trouver où placer des billes pour qu'elles soient à égale distance d'un point fixe.	Reconnaissance de l'invariance d'un rayon d'un cercle soumis à une translation, à une rotation ou à une symétrie.
	Preuves du collier : former un cercle à l'aide d'un collier, d'abord sans point centre donné, puis avec.	Le centre d'un cercle détermine une famille de cercles concentriques.
	Reconnaissance des figures tracées au compas.	
Compréhension du concept mathématique du cercle		
Compréhension procédurale	**Abstraction logico-mathématique**	**Compréhension formelle**
Détermination de l'appartenance d'un point au graphique d'un cercle par mesure à l'aide d'une règle ou d'un compas.	Détermination du centre et du rayon d'un cercle à partir d'une équation standard.	Correspondance entre l'équation et les points du cercle : tout point du cercle satisfait à l'équation et inversement.
Détermination algébrique de l'appartenance d'un point au graphique (comparaison de la mesure des rayons).	Cercle vu comme ensemble infini de points.	Si le centre est (0,0) et le rayon est r, l'équation est $x^2 + y^2 = r^2$.
Détermination de l'équation d'un cercle dans des cas numériques particuliers : passage de la propriété géométrique des points du cercle à une expression algébrique.	Reconnaissance de l'invariance de la relation entre les coordonnées des points.	Si le centre est (h,k) et le rayon est r, l'équation est $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.
	L'équation est une représentation de la relation entre les coordonnées des points du cercle.	Recours à d'autres formes de l'équation du cercle.

Compréhension du concept physique de cercle

Le cercle, rapportent Artigue et Robinet (1982), est considéré comme une figure pour laquelle l'illusion de transparence est des plus fortes et dont la connaissance est souvent assimilée à sa reconnaissance perceptuelle. S'il est sans doute prématuré de parler de connaissance achevée, l'idée de perception sensorielle correspond assez précisément à la description de l'intuition présentée dans notre modèle. C'est pourquoi nous avons retenu la reconnaissance visuelle de la forme circulaire comme critère de la compréhension intuitive.

Le compas est un instrument simple qui permet à des enfants même très jeunes de tracer des cercles. Il ne faudrait cependant pas méprendre l'utilisation adéquate de l'outil pour la reconnaissance des raisons de cette adéquation, lesquelles tiennent essentiellement à la définition du cercle comme lieu géométrique des points équidistants d'un centre. Les critères de compréhension procédurale doivent témoigner de cette reconnaissance en acte. C'est ainsi que nous avons retenu l'épreuve dite de Piaget dans laquelle l'élève doit trouver où placer des billes pour qu'elles soient à égale distance d'un point fixe et l'épreuve du collier où il ou elle doit former un cercle à l'aide d'un collier, le centre pouvant ou non être donné. À ces critères s'ajoutent la procédure permettant de tracer un cercle à l'aide d'une ficelle fixe à un point de même que la capacité de reconnaître des figures qui peuvent être tracées au compas.

Quant à l'abstraction logico-physique, elle se manifestera notamment par la reconnaissance de l'invariance du rayon à l'intérieur d'un même cercle, par la reconnaissance de l'invariance du rayon d'un cercle soumis à une translation, à une rotation ou à une symétrie. Par ailleurs, étant donné un point centre, il existe une infinité de possibilités de placer des points autour de ce centre de manière à ce qu'ils en soient équidistants. Cela nous amène à un critère lié à une forme de généralisation de la définition du cercle, la reconnaissance du fait que le centre d'un cercle détermine une famille de cercles concentriques.

Compréhension du concept mathématique de cercle

Le second palier, dit logico-mathématique, nous amène peu à peu vers la géométrie analytique. Le point de départ procédural demeure physique, puisqu'il est encore question de gestes de mesure, les instruments étant cependant plus sophistiqués qu'au palier précédent : l'élève pourra déterminer l'appartenance d'un point à un cercle par une mesure à l'aide de la règle ou d'un compas. Par la suite, connaissant les coordonnées du centre, celles d'un point et la longueur du rayon, il ou elle pourrait procéder algébriquement à cette détermination en ayant recours à la formule de la distance entre deux points. De là, troisième critère, il lui serait possible de traduire la propriété géométrique commune à l'ensemble des points du cercle en une expression algébrique et de déterminer l'équation de ce cercle particulier, la longueur du rayon et les coordonnées du centre étant données.

Les critères de l'abstraction logico-mathématique se situent dans le prolongement des précédents. Le premier a trait à la réversibilité, puisque l'élève doit cette fois pouvoir déterminer le centre et le rayon d'un cercle dont on lui fournit l'équation; autrement dit, au-delà de la compréhension procédurale lui permettant d'arriver à l'équation d'un cercle, l'élève peut maintenant reconnaître qu'une équation de tel type correspond à un cercle et il ou elle peut en extraire des informations sur le centre et le rayon. Le second critère a trait à la généralisation, l'élève arrivant à considérer le cercle comme un ensemble infini de points. L'élève serait de même en mesure de reconnaître le pattern invariant liant les coordonnées d'un point du cercle, pattern plus complexe que celui existant entre les points d'une droite, puisqu'ici on se retrouve avec des expressions du second degré. Dernier critère, enfin, l'élève verrait l'équation comme une représentation de cette relation entre les coordonnées des points du cercle.

Les critères de la compréhension formelle nous plongent encore plus profondément dans l'univers de la géométrie analytique. Le premier a trait à la correspondance entre équation et points du cercle, les coordonnées de tout point du cercle devant satisfaire l'équation et, inversement, toute paire de coordonnées satisfaisant l'équation déterminant un point appartenant au cercle. Les deux critères suivants touchent la reconnaissance de la forme d'équations particulières, celle du cercle centré à l'origine ($x^2 + y^2 = r^2$) et celle du cercle centré en un point autre $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Un quatrième critère porte sur le recours à d'autres formes de l'équation du cercle et sur la capacité de passer d'une forme à l'autre.

Cette analyse sommairement résumée du concept de cercle demeurait jusqu'à un certain point théorique dans la mesure où les critères retenus n'avaient pas tous fait l'objet d'observations même si certains avaient été inspirés par les travaux d'autres chercheurs et chercheuses. Mais cette description explicite de la compréhension du cercle et de son équation, premier objectif de notre travail, nous fournissait tout de même une base intéressante sur laquelle élaborer les instruments d'investigations – tests écrits et protocoles d'entrevues – nécessaires à l'atteinte de notre deuxième objectif.

Méthode de la recherche

Dans ce qui suit, nous décrirons brièvement ces tests et protocoles, de même que la manière dont nous les avons utilisés aux fins de l'évaluation de la compréhension et les modalités d'analyse des réponses obtenues.

Outils d'investigation

L'entrevue est l'outil que nous avons privilégié pour scruter en profondeur la compréhension du cercle chez quelques élèves. Le protocole d'entrevue comportait trois parties, la première touchant la notion de point, la deuxième, celle de distance et la troisième, le concept de cercle proprement dit. Les concepts préliminaires ont été inclus, car l'étude de la compréhension de ces concepts est nécessaire à celle du cercle lui-même. Pour chacune des trois notions, des tâches et des questions ont été préparées en fonction des divers critères des cases du tableau en décrivant la compréhension. Dans les lignes qui suivent, nous présentons les questions relatives à la compréhension du concept de cercle (questions numérotées ECn pour Entrevue Cercle n° n); le lecteur ou la lectrice pourra constater que ces questions et ces tâches collent généralement bien aux critères donnés dans le tableau 1 même si, au moment de l'analyse des réponses, nous avons évité d'en faire une lecture trop étroite, certaines réponses pouvant fournir des indices liés à d'autres critères de compréhension qu'à celui objet de notre attention au moment de formuler la question.

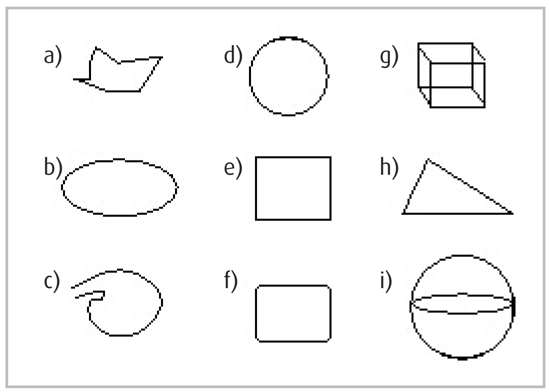
L'entrevue démarre avec une question d'introduction très ouverte : (EC1) Qu'est-ce qu'un cercle? Le but est ici de dégager une première idée générale, l'élève pouvant répondre par une définition livresque ou plus personnelle, par une liste de propriétés ou, encore, en donnant une indication vague – quelque chose de rond… – accompagnée ou non d'exemples d'objets circulaires. Les questions suivantes sont plus directement rattachées à des niveaux et critères particuliers.

Compréhension intuitive – Il n'y a ici qu'une seule question :

EC2

Parmi les formes suivantes, dans la figure 1, lesquelles selon toi sont des cercles? Pourquoi?

Figure 1.



Compréhension procédurale logico-physique – Les tâches touchent directement les preuves retenues comme critères, celle de Piaget et la double preuve du collier, de même que la reconnaissance de figures tracées au compas.

EC3

Peux-tu placer les billes suivantes pour qu'elles soient à égale distance du point A? (On remet à l'élève sept billes et une feuille où se trouve un point A.)

EC4 *Question :*

a. Forme un cercle à l'aide d'un collier de billes.
b. Qu'est-ce qui te fait croire que ce que tu as fait est effectivement un cercle?

EC5 *Question :*

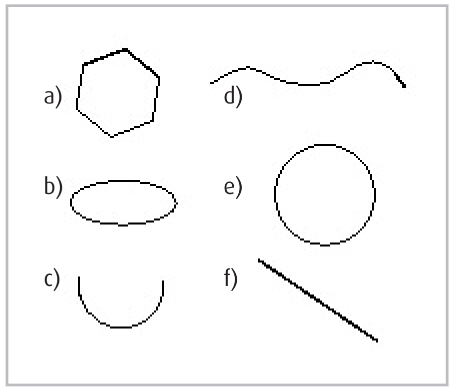
a. Forme un cercle à l'aide d'un collier de billes et d'un point fixe donné.
b. Qu'est-ce qui te fait croire que ce que tu as fait est effectivement un cercle?
c. Y a-t-il d'autres façons d'effectuer ceci? Combien? (Cette question EC5c touche le troisième critère de l'abstraction logico-physique)

EC6 *Question :*

a. Parmi les formes suivantes, dans la figure 2, lesquelles pourrais-tu reproduire à l'aide d'un compas?

b. Pourquoi as-tu choisi ces formes en particulier et non pas les autres?

Figure 2.



Abstraction logico-physique – Ici, une question préliminaire (EC7) doit nous permettre de nous assurer que les élèves connaissent bien les mots rayon et centre, faute de quoi les questions subséquentes perdraient tout leur sens.

EC7 *Question :*

a. Peux-tu m'expliquer ce qu'est le rayon d'un cercle?

b. Peux-tu m'expliquer ce qu'est le centre d'un cercle?

EC8

Dans le cercle suivant, nous avons tracé un rayon.

a. Ce cercle possède-t-il d'autres rayons? Combien?

b. Peux-tu tracer deux autres rayons?

c. Si la longueur du rayon que nous avons tracé est de 3 cm, quelle est la longueur de chaque rayon que tu as tracé toi-même?

EC9

Étant donné un cercle fixé à l'aide d'une aiguille sur une feuille de papier, cercle sur lequel apparaît le tracé d'un rayon de longueur connue :

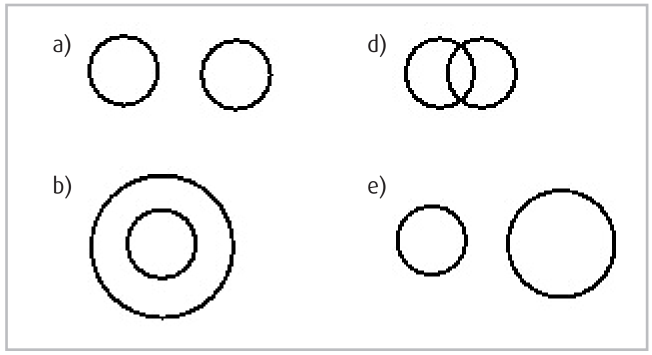
a. Demander à l'élève de déterminer la longueur du rayon après avoir fait subir une rotation au cercle.

b. Demander à l'élève de déterminer la longueur du rayon après avoir fait subir une translation au cercle en le déplaçant sur la feuille.

EC10

Nomme toutes les choses que possèdent en commun les cercles suivants :

Figure 3.



Compréhension procédurale logico-mathématique – La première des deux questions (EC11) touche simultanément les deux premiers critères de cette composante, l'intervieweur devant simplement noter la procédure, physique ou plus algébrique, utilisée par l'élève.

EC11 *Question :*

a. Détermine les points qui appartiennent au graphe d'un cercle de rayon 5 et centré à l'origine.
b. Détermine les points qui appartiennent au graphe d'un cercle de rayon 6 et centré à (2,-3).

EC12

En utilisant la définition du cercle :

a. Détermine l'équation d'un cercle de rayon 6 et centré à l'origine.
b. Détermine l'équation d'un cercle de rayon 5 et centré à (-4,5).

Abstraction logico-mathématique – L'élément délicat ici est de bien s'assurer que les calculs ne sont pas simplement effectués mécaniquement, mais qu'ils ont un sens pour l'élève.

EC13

Détermine le centre et le rayon des cercles suivants :

a. $x^2 + y^2 = 49$
b. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 121$

EC14 *Question :*

a. Les points A (-10,0), B(10,0) et C (6,-8) sont situés sur un cercle centré à l'origine. Situe ces points dans le plan cartésien (qui est donné avec la tâche).

b. Peux-tu déterminer d'autres points qui sont situés sur ce cercle?
c. $(2x21^{\frac{1}{2}}, 4)$ et $(5, 5x3^{\frac{1}{2}})$ sont deux autres points du cercle[1]; combien penses-tu qu'il y a de points sur le cercle? Combien sur l'arc BC?

Compréhension formelle – La compréhension formelle exige peu de vérifications dans la mesure où il est relativement facile de voir si l'élève peut utiliser le symbolisme de façon adéquate. L'important est de s'assurer du sens attribué aux symboles et aux équations, ce que permet l'ensemble des questions qui précèdent. C'est pourquoi on ne retrouve qu'une seule question spécifique ici.

EC15

Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui représentent l'équation d'un cercle?

a. x2 + y = 4
b. x2 - y2 = 16
c. y2 = 4 - x2
d. 3x2 + 3y2 - 16 = 0
e. 4x2 - 9 - 4y2 = 2
f. 5x2 + 6y2 = 12

Ces questions constituaient l'armature de notre protocole d'entrevue sur le cercle. D'autres questions de la même eau, c'est-à-dire se rapportant de la même manière aux critères concernés, nous ont servi à aborder les préconcepts de point et de distance. Nous ne pouvons les donner en détail, faute d'espace, mais elles sont faciles à deviner et nous y ferons référence de manière suffisamment explicite au moment de parler des réponses obtenues de manière à ce qu'il n'y ait pas de confusion ou d'ambiguïté dans l'esprit des lecteurs et lectrices. Par ailleurs, nos questions sur le point sont en fait celles proposées par Boukhssimi (1990), où l'on pourra les retrouver avec toutes les explications utiles.

Une fois cette armature établie, des sous-questions ont été prévues afin d'aider au besoin les élèves à expliciter leurs procédures ou raisonnements, car ce que nous visions, c'était une mise à jour des processus de pensée de ces élèves. Ces sous-questions varient en fonction des tâches, mais se ramènent le plus souvent à des interrogations du genre : Pourquoi as-tu fait cela? Peux-tu me décrire comment tu as fait? Peux-tu me redire ceci dans tes propres mots? Comment expliquerais-tu cela à quelqu'un qui n'en a jamais entendu parler?... Ajoutons que l'entrevue se voulait semi-structurée, l'intervieweur conservant le loisir d'ajouter encore d'autres questions d'éclaircissement au besoin. Les entrevues ont été enregistrées sur bandes magnétoscopiques afin de garder des traces des actions et réactions des élèves autant que de leurs propos, notamment parce que certaines tâches supposaient le recours à du matériel.

1. Notons que dans le questionnaire original, en version imprimée, le symbole de racine carrée était utilisé dans la formulation des points du cercle. Puisque le symbole de racine carrée n'est pas un caractère disponible en HTML, une notation exponentielle a été utilisée pour remplacer la notation originale.

Un test écrit a aussi été proposé, test qui avait pour but de nous permettre d'évaluer plus globalement la compréhension acquise par l'ensemble des élèves; cela supposait encore une fois que l'on puisse dépasser les réponses fournies par ces élèves pour atteindre les processus de pensée sous-jacents. C'est en cela que notre test se distingue de ceux servant généralement à mesurer le rendement scolaire. S'appuyant, comme l'entrevue, sur les divers critères décrivant la compréhension du point, de la distance et du cercle, ce test est composé de questions ouvertes reprenant toutes les questions et tâches de l'entrevue qui pouvaient être présentées par écrit sur chacun de ces concepts. Cependant, en ce qui concerne le cercle, nous avons délaissé les questions EC4, EC5, EC9 et EC13 qui ne se prêtaient pas à cette forme écrite, quelques abandons analogues s'avérant nécessaires pour les deux concepts préliminaires de point et de distance.

Un des problèmes centraux de notre expérimentation avait trait à la langue que nous devions utiliser pour des entrevues d'élèves anglophones en immersion française. Après avoir exploré les écrits se rapportant à cette question et procédé à une pré-expérimentation, nous sommes arrivés à la conclusion qu'il était approprié d'avoir recours au français avec eux, puisque c'était la langue de leurs apprentissages. Un problème semblable se posait pour les tests écrits. Nous l'avons résolu suivant la même logique.

Choix des participants et collecte des données

En vue d'atteindre notre objectif de description de la compréhension construite par des élèves anglophones suivant des cours de mathématiques au secondaire en immersion française, nous avons choisi vingt-deux élèves suivant ou ayant suivi le cours de mathématiques avancées de douzième année dans un tel programme d'immersion, dix-neuf à qui nous avons administré le test écrit et trois que nous avons individuellement soumis à l'entrevue. Le groupe qui a répondu aux questions du test écrit était constitué de quatorze filles et de cinq garçons. Il comportait sept sujets jugés faibles par les autorités de l'école, c'est-à-dire des sujets dont le rendement scolaire était inférieur à la moyenne, six sujets moyens et six forts. Quant aux personnes retenues pour les entrevues, il y avait une fille et deux garçons, la première considérée comme forte, les deux autres comme moyen et faible respectivement.

Modalités de l'analyse

Avant de dégager nos conclusions, nous préciserons brièvement les modalités de l'analyse. Nous avons commencé par regarder le test écrit, lequel comportait trois parties : une sur le point, une sur la distance entre deux points et une sur le cercle. Pour chacune de ces trois parties, nous avons d'abord analysé, question par question, les réponses fournies par nos dix-neuf élèves afin d'obtenir une description globale de la compréhension manifestée par ces participants et participantes à la recherche. L'analyse de l'entrevue a suivi. Les modalités d'analyse des réponses ont été sensiblement les mêmes, si ce n'est qu'au lieu de simples réponses écrites nous avions les transcriptions des propos des élèves et les bandes magnétoscopiques grâce auxquelles nous pouvions tenir compte des manipulations effectuées. Ainsi, dans l'épreuve dite de Piaget (trouver où placer les billes pour qu'elles soient à égale distance d'un point fixe) ou dans celle du collier, nous avons pu rendre compte des autres réactions : expressions du visage, hésitations, silences, gestes de la main… La matière a été enrichie aussi par le fait qu'au moment de l'entrevue elle-même les réponses moins limpides ont amené des sous-questions d'éclaircissement. Tout cela explique la profondeur plus grande que nous pouvions légitimement espérer atteindre.

La plupart des questions du test comme de l'entrevue étaient directement reliées à l'un ou l'autre des critères particuliers de compréhension de l'un des trois concepts. L'analyse d'une réponse consistait donc à décider, à partir de ce que l'élève avait écrit sur sa feuille ou dit et fait devant la caméra, s'il avait satisfait au critère visé. Cette interprétation et ce jugement devaient toutefois dépasser le caractère bon ou mauvais de la réponse pour s'attacher aux processus de pensée, seuls indicateurs valables de compréhension : c'est ainsi que nous n'avons tenu compte des réponses au test que si elles étaient accompagnées d'une justification.

Nous avons évité le recours aux statistiques dans notre analyse car ce recours nous paraissait inapproprié : à cause du faible nombre de participants et participantes d'abord, mais aussi parce que le fait de décrire la compréhension en s'appuyant, par exemple, sur le nombre de critères satisfaits s'avérait réducteur, voire insignifiant. Nous pouvions faire œuvre plus utile, nous a-t-il semblé, en décrivant en mots la compréhension comme elle s'était manifestée chez les élèves.

Conclusions des analyses

Nous pouvons maintenant résumer les descriptions tout juste évoquées. Suivant notre plan d'analyse, nous nous arrêterons d'abord aux descriptions plus globales émergeant des réponses au test pour nous concentrer ensuite sur les entrevues. Dans chacun des cas, nous aborderons dans l'ordre les concepts de point, de distance, puis de cercle.

Conclusions de l'analyse des réponses au test

Au palier logico-physique de la compréhension du point, les dix-neuf élèves ont facilement satisfait chacun des critères de l'intuition, deux personnes manifestant déjà une compréhension qui allait au-delà de cette intuition pour rejoindre l'abstraction, pourtant non visée par les tâches et questions proposées : elles ont en effet reconnu dès ce moment le caractère immatériel du point, les autres élèves ne reconnaissant ce caractère qu'un peu plus tard, au moment de répondre aux questions touchant directement l'abstraction. Ces connaissances ont évidemment rendu caduques les questions sur la procédure permettant d'arriver au point par réduction d'une figure géométrique initiale…

Au palier logico-mathématique, tous les élèves ont fait preuve d'une compréhension remarquablement semblable, notamment au chapitre des procédures, où la plupart n'ont guère éprouvé de difficulté à passer du point euclidien au point algébrique situé numériquement par rapport à une origine sur une ligne ou dans un plan, et au chapitre de la formalisation où, au contraire, très peu sont arrivés au recours à un point généralisé (x,y) pour représenter n'importe quel point du plan. Et pour ce qui est de l'abstraction, si la plupart ont réussi à établir la correspondance biunivoque entre les points du plan et les couples ordonnés, les élèves ont moins bien saisi le phénomène du changement d'échelle.

Au palier logico-physique de la compréhension de la notion de distance, les dix-neuf élèves ont répondu de manière satisfaisante à l'ensemble des questions touchant les aspects intuitifs où on leur demandait d'évaluer ou de comparer visuellement des distances, tous choisissant alors de s'exprimer en termes qualitatifs, parfois fort nuancés. Ils ont ensuite fait preuve d'une belle maîtrise des procédures, qu'il s'agisse de comparer directement des distances, de les ordonner ou de les comparer à l'aide d'un intermédiaire. Quant à l'abstraction, la plupart ont perçu deux invariants, celui qui a trait au sens de la mesure et celui de la distance dans une translation.

Toujours pour la distance, mais au palier logico-mathématique cette fois, on retrouve une grande similitude entre les procédures élaborées par les élèves, qui n'ont guère éprouvé de mal à calculer des distances horizontales et verticales dans un plan. Par contre, une grande majorité d'entre eux n'ont pas réussi à évaluer les autres distances sans recourir directement à la formule qu'ils n'ont par ailleurs pas pu expliquer. Une seule question de cette partie du test portait sur l'abstraction mathématique, question touchant l'invariance de la distance dans un changement de repère : ce type de changement ayant déjà été source de difficultés avec le point, nous n'avons pas été surpris de voir la moitié seulement du groupe donner une réponse satisfaisante. Enfin, très peu d'élèves ont semblé être arrivés à la formalisation de la distance, leurs réponses s'avérant souvent nébuleuses…

Nous arrivons enfin au cercle lui-même pour lequel la compréhension des participants et participantes n'a pas beaucoup dépassé le palier logico-physique. Au chapitre de l'intuition, les réponses obtenues forment deux catégories : certains sujets se sont attachés au cercle comme ensemble de points, les autres le définissant comme une figure ou une forme géométrique. On peut aussi noter que plusieurs ont préféré des descriptions personnelles (et justes!) aux définitions scolaires habituelles. La plupart ont semblé satisfaire aux critères de la compréhension procédurale même si la tâche qui consistait à dessiner sept billes à égale distance d'un point donné a causé quelques problèmes qui montrent qu'une telle question se prête mieux à une entrevue avec manipulation de vraies billes qu'à un examen écrit. De même, une majorité ont fait preuve d'une compréhension abstraite logico-physique de la notion de cercle en ayant notamment reconnu les invariants qui la caractérisent.

Quant à la compréhension logico-mathématique, les réponses se sont révélées décevantes. Au chapitre des procédures, une douzaine d'élèves ont pu expliquer comment décider de l'appartenance d'un point au graphe d'un cercle, mais quatre seulement sont parvenus à trouver l'équation du cercle de rayon 5 centré à (-4,5). Il n'y a guère à dire des critères de l'abstraction et de la formalisation, sinon qu'ils n'ont pas été atteints par la plus grande partie des personnes interrogées.

On l'aura constaté à la lecture de ce qui précède, le test a fourni des indications précieuses sur la compréhension élaborée par nos élèves, indications sur lesquelles nous reviendrons. Il a aussi montré ses limites qui tiennent pour beaucoup à son caractère d'examen écrit. C'est ainsi que plusieurs critères – les preuves traitant de procédures logico-physiques comme celles du collier constituant les exemples les plus flagrants – se prêtent mal ou pas du tout à des questions posées sous cette forme. Par ailleurs, l'analyste s'est trouvé fort dépourvu devant la brièveté de plusieurs réponses et l'impossibilité de les faire clarifier ou expliciter. L'entrevue devait permettre de résoudre ces problèmes et d'approfondir notre compréhension de celle des élèves.

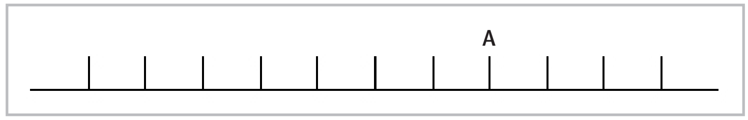
Conclusions de l'analyse des réponses à l'entrevue

Comme nous l'espérions, les entrevues conduites auprès de trois élèves, une fille et deux garçons, ont permis un approfondissement du regard jeté sur cette compréhension. Dans les paragraphes qui suivent, nous en décrivons certains aspects particuliers dans le but de mettre en lumière des caractéristiques importantes du savoir dont elle et ils se sont dotés. Nous traiterons dans l'ordre de chacun des trois concepts de point, de distance et de cercle en regardant d'abord, pour chacun, la compréhension logico-physique pour ensuite nous attacher à la compréhension logico-mathématique.

Au palier physique de la compréhension du point, les élèves étaient d'abord priés de désigner parmi plusieurs figures celles qui pouvaient représenter un point. Tous se sont rabattus sur les figures les plus petites, associant fréquemment le point à une forme circulaire pleine. Une autre figure a aussi été unanimement retenue, un petit x évoquant pour la plupart l'intersection de deux droites; un des garçons s'est distingué par une explication plus littéraire que mathématique, le x lui rappelant la marque identifiant le point d'enfouissement des trésors sur les cartes des livres de son enfance... Lorsqu'on leur demande de placer des points avant ou après un autre ou entre deux points sur une courbe, les élèves interrogés choisissent le point le plus à gauche possible comme premier point de la courbe pour situer à sa droite ceux qui viennent après, quoique deux des élèves reconnaissent explicitement le caractère arbitraire de ce choix. Enfin, dans leur esprit, le point paraît conserver une certaine dimension, bien que celle-ci soit vraiment minuscule : une courbe comprend bien une multitude indénombrable de points à leurs yeux, mais elle et ils ajoutent qu'une courbe plus courte en comporte moins. Les élèves projettent de la sorte la logique du fini sur leur intuition, encore vague il est vrai, de l'infini.

Pour aborder le point algébrique au palier logico-mathématique, une droite numérique où seuls les intervalles et un point identifié par la lettre A sont marqués (voir la figure 4) est proposée aux élèves, qui doivent localiser ce point A.

Figure 4.



Deux des élèves reconnaissent spontanément avoir besoin d'une origine, qu'ils choisissent en expliquant son caractère conventionnel. Pour sa part, le troisième attribue d'abord une valeur arbitraire au point A et trouve ensuite l'origine en donnant une valeur unitaire aux intervalles marqués sur le segment de droite. Les trois élèves interviewés font par ailleurs preuve d'une excellente compréhension du plan cartésien, deux d'entre eux y faisant même spontanément et explicitement référence pour situer un point donné sur une surface. Tous les trois reconnaissent le caractère biunivoque de la correspondance entre les points du plan et les couples ordonnés de nombres réels et aucun n'est abusé par le changement d'échelle qui déplace le point sur la feuille sans en modifier les coordonnées. Ces élèves témoignent ainsi de leur maîtrise de l'abstraction logico-mathématique du point, alors qu'aucun n'avait satisfait au critère de l'abstraction logico-physique qui exige la reconnaissance de l'immatérialité du point : cela illustre bien la non-linéarité du modèle évoqué lors de la présentation de celui-ci.

Les trois élèves ont fait preuve d'une excellente compréhension du concept physique de distance. Personne n'a eu de mal à estimer et comparer visuellement des distances, la demoiselle manifestant toutefois un peu de frustration lorsqu'elle a été empêchée de recourir à procédures plus précises. Ces procédures plus précises étaient bien maîtrisées, qu'il s'agisse de la superposition directe des distances à comparer, stratégie retenue par l'un des interviewés, ou du recours à un objet intermédiaire – feuille, crayon, règle... – pour reporter une distance sur l'autre, recours que les trois ont décrit à un moment ou à un autre de l'entrevue. C'est au chapitre de l'abstraction que nous avons eu les plus belles surprises! D'abord parce que, contrairement à ce que nous avions observé avec le test, tous les sujets ont reconnu l'invariance de la distance par rapport au sens du mesurage, par rapport à la translation et par rapport à la rotation. Cette rotation a toutefois causé certains problèmes à notre sujet féminin, plus préoccupé par l'oubli de la formule permettant de calculer les coordonnées des points dans une telle rotation que par la distance séparant ces points. Notre surprise s'explique aussi par la qualité des réponses : deux des élèves, associant sans doute l'idée de distance à celle de déplacement, ont traité celle-ci comme une quantité vectorielle en précisant que les transformations mentionnées laissaient la distance intacte comme quantité tout en modifiant sa direction.

La même qualité dans la compréhension s'est retrouvée au palier logico-mathématique. Tous ont su calculer rapidement des distances parallèles aux axes du plan cartésien, de même qu'une distance oblique à l'aide du théorème de Pythagore, sauf que l'un des garçons s'est d'abord payé un petit détour par un calcul de pente de droite. Tous ont de même reconnu que le fait de changer de système d'axes, et donc d'échelle, pour représenter deux points ne modifiait pas la mesure de la distance les séparant, même si l'image de la distance se voyait affectée par le changement. Priés de calculer des distances entre points dont les coordonnées étaient littérales, les trois ont facilement réussi à le faire en s'appuyant encore une fois aussi spontanément qu'explicitement sur le théorème de Pythagore, l'un d'entre eux signalant même que ce qu'il obtenait lui rappelait ce qu'il fallait faire pour trouver le rayon d'un cercle… ce qui nous amène à notre dernier concept.

Au palier logico-physique de la compréhension du cercle, tout se passe sans trop de problèmes. Nos trois sujets décrivent le cercle en s'appuyant sur l'idée d'équidistance exprimée fort clairement en leurs propres mots et réussissent parfaitement l'épreuve de Piaget en expliquant à l'avance qu'ils vont esquisser la forme d'un cercle. Par la suite, les élèves obtiennent le même succès aux épreuves demandant de former un cercle avec un collier et reconnaissent facilement les divers invariants rattachés à l'abstraction physique du cercle.

Au palier logico-mathématique, deux des élèves interrogés ont réussi à déterminer algébriquement l'appartenance d'un point un cercle en utilisant le théorème de Pythagore pour évaluer la distance de ce point au centre du cercle. Ces deux élèves ont de plus explicité des moyens physiques de déterminer cette appartenance, par mesurage à l'aide d'une règle, d'un compas, d'une ficelle… Il et elle sont aussi parvenus à retrouver l'équation du cercle à partir de la définition, basée sur l'équidistance des points au centre, qu'il et elle en avaient donnée. Le troisième n'y arrive pas, plus occupé à se rappeler la formule du cercle que de réfléchir. De tels efforts de mémoire sont d'ailleurs une constante de cette partie de l'entrevue, particulièrement mais non exclusivement chez ce troisième élève qui a réalisé correctement presque toutes les tâches à l'aide des équations canoniques rattachées au cercle, avouant toutefois ne pouvoir expliquer d'où venaient ces formules, comme il les appelle. Ses deux collègues ont pu, tout comme lui, déterminer le centre et le rayon de cercles dont on leur a fourni l'équation et identifier, parmi plusieurs, les équations qui correspondaient à des cercles, mais jamais ils n'ont réussi à expliquer pourquoi ces équations étaient telles, alors qu'ils avaient réussi à en reconstruire de semblables juste avant : un peu comme si l'exercice de la mémoire venait bloquer l'intelligence des notions. Aucune de ces personnes n'a montré qu'elle voyait bien l'équation du cercle comme une relation entre les coordonnées des points le constituant, un des garçons parvenant toutefois à trouver des points du cercle en donnant des valeurs x et en calculant les y correspondants à l'aide de la formule x2 + y2 = r2, mais nous n'avons pu savoir s'il y arrivait en toute connaissance de cause ou d'une manière plutôt mécanique, en appliquant une recette dont il avait déjà prouvé l'efficacité. Comme quoi il n'est pas toujours facile de saisir les processus de pensée…

Cela vient clore le portrait, sans doute un peu sommaire dans sa brièveté, de la compréhension des concepts de point, de distance et de cercle manifestée par les élèves que nous avons interviewés.

Puisqu'il faut conclure...

Notre première conclusion veut faire écho à ce qui a été dit de la compréhension dans la partie exposant la problématique. D'inspiration constructiviste, notre propos insistait sur l'importance de cette compréhension pour assurer la pérennité et le progrès des savoirs des élèves. Réflexion sans doute fondée, mais qu'il faut encore pouvoir incarner dans la pratique. Le présent travail a justement fourni une illustration de ce qui est possible, ce chapitre en décrivant de manière opérationnelle la compréhension de trois concepts. Le modèle constructiviste élargi de Herscovics et Bergeron a permis de voir cette compréhension non comme un état dans lequel on tomberait subitement sans trop savoir comment ni pourquoi, mais comme un processus, une démarche de construction de sens, ce qui s'avère une perspective particulièrement inspirante pour l'enseignement.

Ce travail illustre de même la possibilité d'évaluer cette compréhension sans en trahir l'essentiel, c'est-à-dire en dépassant les trop habituelles mesures du rendement scolaire pour se concentrer sur la pensée de l'élève et obtenir ainsi une image plus juste de la qualité réelle des apprentissages réalisés. Une telle forme d'évaluation permet de mettre en lumière des phénomènes parfois surprenants dont la prise de conscience pourrait aider une meilleure adaptation de l'enseignement aux besoins des élèves. On imagine mal en effet se lancer dans une étude des équations du cercle avec des élèves pour qui toute courbe convexe ferme peut constituer un cercle et qui affirment sans sourciller que la forme dessinée par des points équidistants d'un point centre pourrait être un carré, à condition bien sûr que celui-ci soit parfait... D'autres phénomènes font aussi réfléchir comme celui, non rapporté dans notre brève présentation des analyses, des trois élèves interviewés dont le premier réflexe a été de décrire le rayon d'un cercle comme son demi-diamètre au lieu d'aller directement à l'essentiel. On sent là l'influence des formules enseignées et des exercices de manuels où le diamètre est souvent donné de préférence au rayon.

Notre recherche se voulait par ailleurs une réaction constructive face à des inquiétudes bien légitimes d'éducateurs et d'éducatrices s'interrogeant sur l'impact de la langue d'enseignement sur la compréhension des élèves en mathématiques, inquiétudes émergeant à la suite de la popularité croissante des programmes d'immersion. Ce que nous avons observé est rafraîchissant, car nous avons rencontré des élèves en immersion dont la compréhension, si elle n'est pas achevée, témoigne d'apprentissages d'une belle qualité. Leurs connaissances des concepts de point et de distance s'avèrent raisonnablement complètes même si le test a révélé quelques faiblesses, l'évaluation de distances obliques amenant par exemple des élèves à utiliser une formule qu'ils et elles ne pouvaient guère expliquer. Par contre, les trois élèves interviewés n'ont pas eu trop de mal à évaluer cette distance en utilisant les outils mathématiques de façon intelligente, manifestement non mécanique. De même, si plusieurs élèves soumis au test ont semblé éprouver des problèmes avec les changements de repères et avec le recours aux coordonnées littérales, ces difficultés ne se sont pas manifestées lors des entrevues avec leurs trois collègues. De là à conclure que le test ne permet peut-être pas aux élèves de démontrer toute la qualité de leurs savoirs, il n'y a qu'un pas que nous ne pouvons ici franchir, mais cela ouvre la porte à des réflexions et à des recherches encore à faire. Les résultats de l'étude de la compréhension du concept de cercle lui-même sont aussi intéressants : là encore, l'entrevue a montré des élèves capables de réflexion même si celle-ci a souvent été bloquée par le recours aux formules mémorisées. Le test a été moins révélateur, montrant simplement des élèves souvent un peu désemparés face aux questions posées, élèves dont les connaissances restent encore à parfaire.

Une question demeure : ces élèves ont-ils été désavantagés du fait qu'ils ont étudié en français, une langue qui n'est pas leur langue maternelle? Malgré le caractère relativement rassurant de nos conclusions précédentes, nous ne pouvons encore répondre de façon claire à cette question : car pour parler d'élèves avantagés ou désavantagés, il nous reste à les comparer à leurs confrères et consœurs qui ont poursuivi leurs études dans leur anglais maternel afin de constater si l'un ou l'autre groupe fait preuve d'une compréhension plus achevée. Nous pourrons faire état de nos conclusions à ce chapitre dans un prochain article, tout en demeurant conscients que ces conclusions demeureront encore partielles, ne touchant que quelques concepts qui ne sont pas, il s'en faut de beaucoup, toutes les mathématiques enseignées au secondaire. Il restera aussi à mettre en évidence des mécanismes, mécanismes socioconstructivistes notamment, pouvant expliquer ces conclusions. C'est là une tâche ardue, certes, mais qui pourra être source de connaissances nouvelles et fructueuses pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Références bibliographiques

ARTIGUE, M. et ROBINET, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 3*(l), 5-64.

BALKAN, L. (1970). *Les effets du bilinguisme français-anglais sur les aptitudes intellectuelles.* Bruxelles : AIMAV.

BORDELEAU, L. G., CALVÉ, P., DESJARLAIS, L. et SÉGUIN, J. (1988). *L'éducation française en Ontario à l'heure de l'immersion.* Toronto : Conseil de l'éducation franco-ontarienne.

BOUKHSSIMI, D. (juin 1990). *Analyse épistémologique des influences d'un logiciel et des interventions du maître sur la compréhension de la droite et de son équation* (thèse de doctorat). Université Laval, Québec.

BURNS, G. E. (1986). French immersion implementation in Ontario. Some theoritical, policy, and applied issues, *Canadian Modern Language Review, 41*(3), 572-591.

CUMMINS, J. P. et GULUTSAN, M. (1974). Some effects of bilingualism on cognitive functioning. Dans L. Carey (dir.), *Bilingualism, Biculturalism and Education. Proceedings from the Conference at Collège Universitaire St-Jean*. University of Alberta.

CUMMINS, J. (avril 1976). The Influence of bilingualism on cognitive growth. A synthesis of research findings and explanatory hypotheses. *Working Papers on Bilingualism*, Nº. 9. Toronto : The Ontario Institute for Studies in Education, 1-43.

CUMMINS, J. (mai 1977). Immersion education in Ireland : A critical review of Macnamara's Findings. *Working Papers on Bilingualism*, Nº. 13. Toronto : The Ontario Institute for Studies in Education, 121-127.

CUMMINS, J. (mai 1978). The cognitive development of children in immersion programs. *The Canadian Modern Language Review*, *34*(5), 856-883.

CUMMINS, J. (1984). *Bilingualism and Special Education. Issues in Assessment and Pedagogy*. Clevedon : Multilingual Matters (6).

DIONNE, J. (1988). *Vers un renouvellement de la formation et du perfectionnement des maitres du primaire : le problème de la didactique des mathématiques*. Montréal : Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal.

DIONNE, J. (1995). Partie 5 : Mathématiques. Dans L. Saint-Laurent *et al.* (dir.), *Programme d'intervention auprès des élèves risque. Une nouvelle option éducative* (p. 189-250). Boucherville : Gaétan Morin éditeur.

ERLWANGER, S. H. (1973). Benney's conception of rules and answers in IPI mathematics. *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, *1*(2), 7-26.

GENESEE, F. (mars 1983). Bilingual education of majority language children. The immersion experiments in review. *Applied Psycholinguistics*, *4*(1), 1-46.

HAMERS, J. F. et BLANC, M. (1983). *Bilingualité et bilinguisme*. Bruxelles : Pierre Mardaga.

HÉRAUD, B. (juillet 1989a). Analyse conceptuelle de la longueur et de sa mesure. Dans G. Vergnaud (dir.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of PME (International Group for the Psychology of Mathematics Education*) (vol. 2) (p. 83-90). Paris.

HÉRAUD, B. (novembre 1989b). Difficultés conceptuelles lies à l'apprentissage des mesures de longueur et d'aire. Dans *Actes du Deuxième Congrès des Sciences de l'éducation de langue française du Canad*a (vol. 2) (supplément) (p. 640-1 640-8). Sherbrooke.

HERSCOVICS, N. et BERGERON, J. C. (novembre 1988). An extended model of understanding. Dans *Proceedings of the Tenth Annual Meeting PME-NA* (p. 15-22). Dekalb, Illinois.

LAMBERT, W. E. et TUCKER G. R. (1972). *Bilingual Education of Children : The St. Lambert Experiment*. Rowley, MA : Newbury House Publishers.

LAMBERT, W. E. (1974). Culture and Language as Factors in Learning and Education. Dans F. Aboud et R.D. Meade (dir.), *Cultural Factors in Learning*. Bellinqham : Western Washinqton State College.

LAMBERT, W. E. (1977). Effects of Bilingualism on the Individual. Dans P. A. Hornby (dir.), *Bilingualism : Psychological, Social and Educational Implications* (p. 15-27). New York : Academic Press.

LAMBERT, W. E. (1984). An overview of issues in immersion education. Dans *Studies on Immersion Education : A Collection for United States Educators*, préparé sous la direction de l'Office of Bilingual Bicultural Education. Sacramento : California State Department of Education.

NANTAIS, N. (mars 1989). *Élaboration et expérimentation de la mini-entrevue comme outil d'évaluation de la compréhension mathématique au primaire* (thèse de doctorat). Université de Montréal.

PEAL, E. et LAMBERT, W. E. (1962). The Relation of Bilingualism to Intelligence. *Psychological Monographs : General and Applied*, *27*(76), 1-23.

PIAGET, J., INHELDER, B. et SZEMINSKA, A. (1973). *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris : Presses universitaires de France.

SKUTNABB-KANGAS, T. et TOUKOMAA, P. (1976). *Teaching Migrant Children Mother Tongue and Learning the Language of the Host Country in the Context of the Socio-Cultural Situation of the Migrant Family*. Helsinki : The Finnish National Commission for UNESCO.

SWAIN, M. et LAPKIN, S. (1981). *Bilingual Education in Ontario. A Decade of Research*. Toronto : Ontario Institute for Studies in Education.

SWAIN, M. et LAPKIN, S. (1982). *Evaluating Bilingual Education : A Canadian Case Study*. Clevedon et Toronto : Multilingual Matters (2) et The Ontario Institute for Studies in Education.

Annexe

Tableau 2. **Compréhension du point suivant le modèle élargi**

Compréhension du concept physique de point		
Compréhension intuitive	**Compréhension procédurale**	**Abstraction logico-physique**
Le point a une forme circulaire.	Le point résulte des divisions successives d'une figure initiale; la forme du point dépend de celle de la figure et de la technique de réduction utilisée.	Le point n'est pas matériel; il n'a ni forme ni dimension.
Le point possède une dimension.		
Position approximative d'un point par rapport à un autre.		
Compréhension du concept mathématique (algébrique) de point		
Compréhension procédurale	**Abstraction logico-mathématique**	**Compréhension formelle**
Passage du point euclidien au point algébrique.	Correspondance biunivoque entre les points du plan et les couples ordonnés.	Recours aux coordonnées (x,y) d'un point quelconque du plan.
Recours aux coordonnées numériques.	Un changement d'échelle modifie la position d'un point dans le plan.	
Repérage d'un point dans un système d'axes.		

Tableau 3. **Compréhension de la distance suivant le modèle élargi**

Compréhension du concept physique de distance		
Compréhension intuitive	**Compréhension procédurale**	**Abstraction logico-physique**
Référence visuelle : un objet peut être plus ou moins distant d'un autre objet.	Comparaison directe de deux distances en déplaçant les objets définissant ces distances (point de départ et point d'arrivée).	La distance est invariante : • par rapport à une translation du plan; • par rapport à une rotation du plan; • au sens du mesurage (dist. AB = dist. BA).
Comparaison par estimation : un objet A est à une moins grande distance, une aussi grande distance ou une plus grande distance d'un objet B que d'un objet C.	Comparaison de plusieurs distances : • la distance séparant deux objets dans une série continue; • sérier un ensemble de distances.	
La distance est une grandeur unidirectionnelle non mesurée.	Mesure comparative avec intermédiaire : recours à un tiers objet pour effectuer la comparaison entre les distances.	
Compréhension du concept mathématique de distance		
Compréhension procédurale	**Abstraction logico-mathématique**	**Compréhension formelle**
Recours à des unités identiques bien juxtaposées pour couvrir la distance.	Invariance de la mesure de la distance entre deux points par rapport aux transformations évoquées dans l'abstraction logico-physique.	Mesure de la distance à l'aide d'unités conventionnelles.
Recours à quelques unités, puis à une seule qui est reportée.	Liens entre les aspects contradictoires de la distance et de la mesure : la distance est une invariante même si sa mesure s'exprime de diverses manières.	Utilisation de ces dernières sous forme symbolique.
Mesure des distances horizontales et verticales par comptage et par différence des abscisses et des ordonnées.	Relation inverse entre le nombre-mesure et la dimension de l'unité.	Utilisation de la règle pour mesurer en établissant : • le lien entre les graduations et les unités; • la distinction entre repérage des extrémités et distance réelle entre ces extrémités.
Calcul de la distance entre deux points à l'aide de la relation de Pythagore.	Mesures non entières : choix de l'unité en fonction de la précision souhaitée.	