Revue des sciences de l'éducation

Le thème de la mesure à l’école élémentaire

Fernand Lemay

Volume 1, numéro 2-3, automne 1975

URI : https://id.erudit.org/iderudit/900012ar
DOI : https://doi.org/10.7202/900012ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (imprimé)
1705-0065 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Lemay, F. (1975). Le thème de la mesure à l’école élémentaire. *Revue des sciences de l'éducation*, *1*(2-3), 129–138. https://doi.org/10.7202/900012ar

Le thème de la mesure à l'école élémentaire

Fernand Lemay *

LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA MESURE

Un idéal maintes fois exprimé veut que le problème didactique fondamental en soit un de *genèse du savoir* plutôt que de transmission de connaissances. Il se pourrait fort bien, lorsqu'il s'agit du thème de la mesure des grandeurs, que la poursuite de cet idéal s'avère extrêmement stimulante pour les enseignants aussi bien que pour les jeunes élèves. Hans Steiner souligne en effet que

> « *Une grande déficience de l'enseignement traditionnel des mathématiques est la façon de présenter les mesures de longueurs, d'aires, de volumes. Le plus souvent, aucune préparation à la genèse des concepts, ni de définitions conceptuelles n'étaient données mais seulement des formules* ». *(« La géométrie dans les programmes scolaires », Regional Seminar, Cairo, 1970, Trad. Provencher et Courteau).*

Cette critique pourrait rappeler aux plus vieux leur « formulaire de toisé », tandis qu'aux yeux des plus jeunes elle pourrait se justifier par la position suivante, souvent prise par des personnalités en vue du monde de l'enseignement :

> « *... la mesure est essentiellement un processus d'attribution de nombres pour comparer des attributs communs de certains objets* ».

Ce dernier point de vue semble trahir l'influence de la mathématique formelle. Lorsque la mathématique propose une définition abstraite de la mesure telle, par exemple, que la suivante,

> « *Une mesure (positive) sur un clan* $\mathcal{C}$ *(c'est-à-dire un ensemble de parties d'un ensemble de référence E stable relativement aux opérations de réunion et de différence) est une application* $\mu : \mathcal{C} \to R_+$ *telle que* $\mu(\emptyset) = 0$ *et* $\mu(A) = \Sigma\mu(A_n)$ *pour toute partition dénombrable* (A_n), $(A_n \in \mathcal{C})$, *de* $A \in \mathcal{C}$,

* Lemay, Fernand : professeur, Université Laval.

et qu'elle fait de cette définition le *point de départ* d'une importante théorie, elle n'en embrasse pas moins une expérience millénaire qu'elle idéalise et assume en voulant en dégager ce qui du point de vue mathématique paraît être l'essentiel. Est-ce à dire que la didactique s'imposera comme tâche de *vulgariser* les notions évoluées et stables auxquelles la science est parvenue, les *illustrant* par certaines des concrétisations particulières dont elles sont issues ? Est-ce à dire qu'il faudra proposer aux élèves de parcourir la *démarche historique* mais en évitant systématiquement les écueils, en optant inévitablement pour les décisions que l'histoire a révélées correctes ? Il est évident que ni l'une ni l'autre de ces voies ne souscrit aux plus exigeants critères de la motivation intrinsèque. La didactique n'atteindra ses objectifs qu'en respectant ses préoccupations propres, notamment *la recherche de défis primitifs que renfermaient les situations originales* qui ont mené à la construction des notions mathématiques, de même que *l'élaboration de situations dynamiques nouvelles proportionnées à la personnalité des élèves.*

La *genèse historique* correspond à la démarche effective de l'humanité dans la conquête d'un savoir ; d'autres chemins, qui n'ont pas eu cours, peuvent être imaginés, ce sont les *genèses virtuelles.* Les formes axiomatiques du savoir, par exemple, sont des genèses virtuelles très précises et expurgées de tout errement. Un idéal didactique serait d'identifier certains des défis fondamentaux que l'univers pose à tout enfant et de les utiliser pour construire des situations scolaires permettant aux jeunes élèves de traiter de questions relevant d'une motivation authentique et de réaliser par le fait même, dans une ambiance stimulante, les genèses naturelles et spontanées de leur propre savoir.

MESURE vs NOMBRES

Bien que, dans la définition précédente de la mesure, on puisse mettre au point des *interprétations* des termes E et $\mathcal{B}$ qui permettraient d'intégrer ce que nous savons de l'évaluation des longueurs, des étendues, des masses, etc., cette définition n'en renferme pas moins certains éléments qui la rendent stérile dans la perspective de l'enseignement élémentaire. Ainsi *elle présuppose la possession du système des nombres réels et ne fait pas mention explicitement des grandeurs.*

La familiarisation avec le système des nombres est-elle une condition préalable pour s'initier à la mesure ?

Une réponse affirmative à ce problème signifierait l'impossibilité d'entreprendre sérieusement la genèse de l'idée de mesure des grandeurs au niveau élémentaire et impliquerait la nécessité de reporter le problème au secondaire. Écoutons encore, à ce sujet, Hans Steiner :

> « ... *on est en train de concevoir de nouvelles façons d'enseigner les mesures. Comme les nombres rationnels y sont intimement reliés, leur développement peut faire partie intégrante du programme d'enseignement de la mesure.* »

Il n'est pas rare de voir proposer un retour à la genèse historique comme offrant la voie la plus sûre pour l'enseignement des mathématiques traditionnelles, mais encore faut-il que cette genèse nous soit suffisamment connue. De toute façon, si l'on en croit Bourbaki

> « ... *le problème de la mesure des grandeurs est à l'origine de la notion de nombre réel* » (*Topologie générale*, ch. V).

Sans vouloir nous engager dans un débat hors de notre compétence, on peut donc sérieusement se demander si les constructions usuelles du corps des nombres (rationnels, réels, ...) par extensions successives à partir des nombres naturels, correspondent effectivement à la progression historique ou si, au contraire, ce qui devait devenir le système des nombres réels n'aurait pas été rencontré très tôt globalement (quoique implicitement). Dans cette hypothèse les nombres réels auraient pu apparaître en quelque sorte comme *résidu abstrait de l'idée de grandeur.* Les constructions modernes du système des nombres réels par extensions successives se ramènerait à de simples genèses virtuelles bien distinctes de la démarche historique. Ces genèses, tout en répondant admirablement bien aux impératifs de la mathématique formelle, pourraient ne pas correspondre aux motivations spontanées des élèves. En tout cas *si la notion de nombre est issue de l'idée de grandeur, ce serait commettre un cercle vicieux évident que d'affirmer que la mesure des grandeurs se réduit à une simple attribution de nombres.*

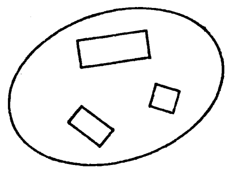
Envisager pour l'école une genèse de la mesure qui dispense d'imposer aux élèves le problème des extensions successives des systèmes de nombres et même qui ferait des systèmes de nombres (Q_+, Q, R, ...) un *sous-produit de l'exploration des grandeurs,* c'est peut-être envisager une réforme capitale. Un tel projet est contenu à l'état latent dans nos présents propos.

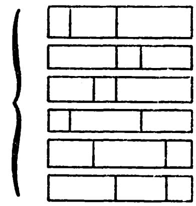
LES PREMIERS PAS VERS L'ÉTUDE DE LA MESURE À L'ÉCOLE

L'idée qu'il est indispensable de disposer d'un domaine dont les grandeurs sont *indéfiniment divisibles* pour que la mesure nous conduise aux nombres rationnels est très répandue. Pourtant il est connu qu'un « *domaine discret* » ne comprenant pas de grandeurs arbitrairement petites peut tout aussi bien nous conduire à Q_+ et même, nous le verrons, à Q. Il n'est donc pas inutile d'indiquer comment la question pourrait être traitée dans les premières années de l'école en recourant à un domaine de grandeurs des plus simples, les longueurs associées aux réglettes Cuisenaire. Nous ferons porter cette réflexion sur trois points : *le domaine de grandeurs sous-jacent, les actions, le calcul.*

I. Le domaine de grandeurs sous-jacent

Les réglettes Cuisenaire permettent, et de plusieurs manières, de *composer* des « trains », c'est-à-dire des suites de réglettes placées bout-à-bout :





Il n'en faut pas davantage pour s'impliquer déjà dans une première classification des trains : *deux trains étant classés comme ensembles ou déclarés équivalents (par rapport à cette classification) s'ils peuvent se « recouvrir » mutuellement.* Ce qui reste de la notion de trains quand on ne fait plus la distinction entre trains équivalents n'est autre que la *notion de longueur* associée aux trains. C'est ainsi que derrière le donné physique des réglettes, on est conduit à concevoir *l'ensemble L des longueurs des trains possibles.*

Après avoir adopté cet ensemble de grandeurs, *L,* il nous faudra encore le munir d'une *structure* appropriée déterminée par une *loi de composition interne entre éléments de L :* le composé de deux longueurs (réalisées par des trains particuliers) sera la longueur du train formé en mettant ces deux trains bout-à-bout. La longueur ainsi formée étant naturellement indépendante des trains particuliers qui auront représenté les longueurs données, nous obtenons ainsi une loi de composition *entre éléments de L.* Nous noterons cette loi de composition (de même que la loi de composition des trains) par le signe T.

C'est un des caractères simples mais extrêmement fructueux du matériel Cuisenaire que les réglettes de même couleur soient aussi de même longueur et réciproquement. L'on dispose par ce fait, dès le départ, et indépendamment de tout savoir « numérique » ou de toute forme de comptage, d'un *vocabulaire spontané* permettant de *dire* puis, le moment venu, d'*écrire* les faits que l'on observe et les relations que l'on découvre dans le domaine de grandeurs (L, T) :

$$V = r\mathrm{T}R, \qquad B\mathrm{T}n = m\mathrm{T}m, \qquad b\mathrm{T}r\mathrm{T}v\mathrm{T}R = \mathrm{O}, \qquad etc.$$

C'est la surabondance des trains (des trains distincts peuvent déterminer la même longueur) qui conduit à la classification en longueurs et qui de ce fait livre la notion de longueur. C'est aussi la loi T qui permet de dépasser la collection initiale des dix longueurs fournies par les réglettes de chacune des dix couleurs en permettant de composer indéfiniment de nouvelles longueurs et d'effectuer toutes sortes d'incursions dans l'univers des « grandes » longueurs et des « grands » nombres (ceux-ci par le biais des trains blancs par exemple).

L'invention et la mise au point de *systèmes de numération* est un peu l'histoire de ces incursions et de la manière de dominer la prolifération des grandeurs en recherchant systématiquement des *systèmes de générateurs minimaux.* Précisons quelque peu en essayant de former un système de générateur des longueurs qui soit le plus simple possible. Commençons avec une paire de réglettes blanches. On peut alors former des trains ø, *b*, *b*T*b* que nous désignerons par les nombres de blanches qui les composent : *0, 1, 2.* Il serait superflu de se donner une longueur *r* (puisque *r* = *b*T*b*) ; donnons-nous plutôt une paire de réglettes vertes ; nous avons maintenant le

$$\left\{ \begin{matrix} v & b \\ v & b \end{matrix} \right\}$$

qui permet de former les trains ø, *b*, *b*T*b*, *v*, *v*T*b*, *v*T*b*T*b*, *v*T*v*, *v*T*v*T*b*, *v*T*v*T*b*T*b* que l'on peut aussi désigner par des symboles rappelant leur composition en vertes (s'il y en a) et en blanches respectivement :

0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22.

Nous sommes donc en possession des 3^2 premières longueurs, de sorte que l'on peut bien se départir des longueurs intermédiaires *r, R, j, V, n, m.* Adjoignons une paire de réglettes de la longueur suivante ; nous aurons maintenant le système de générateurs

$$\left\{ \begin{matrix} B & v & b \\ B & v & b \end{matrix} \right\}$$

qui produira les 3^3 premières longueurs notées par référence à leur composition en bleues, vertes et blanches respectivement :

0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22,
100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122,
200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222.

On peut donc constater que l'on peut déterminer de « grandes » longueurs sans asservissement au comptage ; en effet nous avons eu accès à l'intervalle $[0, 3^3[$ (non seulement au plan pratique mais surtout au niveau de la communication et de l'écriture) par recours aux seuls chiffres *0, 1, 2.* Le matériel n'offre plus de nouvelles couleurs pour poursuivre le processus et parvenir à un système de générateurs plus « puissant ». C'est de cette « difficulté » que naîtra notre désir d'explorer et d'imaginer les *actions* susceptibles de nous livrer de nouvelles longueurs.

II. Les actions

De même que l' « escalier » des dix longueurs *b, r, v, ... B, O* est bien davantage qu'un simple ensemble ordonné, mais possède un *schéma de génération* qui se manifeste par le fait que *chaque « marche » engendre la suivante par adjonction de b,* de même l'ensemble formé de *b, v, B* renferme implicitement un schéma de génération. *Comment v se forme-t-il à partir de b ? Comment B se forme-t-il à partir de v ? Comment une prochaine réglette devrait-elle être formée à partir de la bleue ?* Bien sûr chaque longueur dérive de la précédente en la *triplant,* mais on pourrait tout aussi bien dire que *v* résulte de l'*adjonction d'une réglette rouge à la blanche* et que *B résulte de l'adjonction de V à la réglette v* et bien d'autres choses encore.

Et nous voilà engagé dans une réflexion sur les *transformations de l'ensemble L en lui-même : en quoi par exemple l'une des transformations*

$$\begin{cases} T_1 : \textit{tripler}, \\ T_2 : \textit{adjoindre une rouge}, \end{cases}$$

pourrait-elle être privilégiée aux dépens de l'autre ?

On ne peut éclairer cette question qu'en se rapportant à la structure de l'ensemble L, c'est-à-dire à sa loi de composition $\top$. Le domaine de grandeurs L ne prend sa vraie richesse que par la possibilité de composer les longueurs ; sans la loi $\top$, L ne serait qu'un ensemble « amorphe ». Aussi y a-t-il lieu lorsqu'on opère quelque transformation sur L de se demander si cette transformation *respecte la structure* ou si au contraire elle en fournit une image « infidèle » dans laquelle *les relations issues de la structure* seront faussées.

Le sous-ensemble $\{b, r, v\}$ par exemple porte une grande variété de « liens » dont les suivants :

$b \top b = r$	$r \top r = b \top v$
$b \top r = v$	*etc.*
$b \top b \top b = v$	

Qu'advient-il de ce sous-ensemble $\{b, r, v\}$ et du complexe de relations qu'il supporte lorsque, par exemple, on effectue la transformation T_1 ?

$\{b, r, v\}$	*devient*	$\{v, V, B\}$
$b \top b = r$	"	$v \top v = V$
$b \top r = v$	"	$v \top V = B$
$b \top b \top b = v$	"	$v \top v \top v = B$
$r \top r = b \top v$	"	$V \top V = v \top B$
etc.		

Sous l'effet de T_1, le sous-ensemble $\{b, r, v\}$ se transforme à nouveau en un sous-ensemble de L ; les « liens algébriques » entre éléments de L se transforment en de nouvelles relations et, semble-t-il, il en ira de même pour n'importe quel sous-ensemble de L. Ainsi la transformation T_1 *livre une image fidèle du système* (L, 9).

Quant à la transformation T_2 (adjoindre la longueur rouge), elle produirait les changements suivants :

$\{b, r, v\}$	*devient*	$\{v, R, j\}$	
$b \top b = r$	"	$v \top v = R$	*(faux)*
$b \top r = v$	"	$v \top R = j$	(")
$b \top b \top b = v$	"	$v \top v \top v = j$	(")
$r \top r = b \top v$	"	$R \top R = v \top j$	*(vrai)*
etc.			

Comme on l'observe, la transformation T_2 *détériore le complexe des relations observables dans le système structuré* (L, T) et ne peut pas par conséquent être de la « même qualité » que T_1.

C'est donc la présence d'une structure dans le domaine de grandeurs L qui impose une sélection dans la classe des transformations que l'on effectue dans l'ensemble L.

Comment les transformations ainsi mises en évidence se caractérisent-elles ?

Pour qu'une transformation opère fidèlement dans (L, T) *il suffit*

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{x \,\mathrm{T}\, y} \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\quad T \quad} \begin{array}{|c|c|}\hline T(x) & T(y) \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{T(x \,\mathrm{T}\, y)} \\ \hline\end{array}$$

que son effet soit le même qu'on l'effectue « globalement » ou « par morceaux » (puisque toute relation algébrique dérive de la constatation de quelque équivalence entre trains).

Les « actions simples » seront donc les transformations de l'ensemble L qui sont compatibles avec le complexe des relations algébriques inhérentes à ce système de grandeurs (L, T) (†). Leur inventaire se réduira dans le cas présent aux seules opérations « *n-upler* » $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

III. *Le calcul*

Ayant justifié au plan de la réflexion didactique le recours à la notion d'*action simple,* nous allons maintenant évoquer une situation susceptible de nous entraîner dans la *confection de diagrammes d'actions* et vers leur *exploitation algébrique.*

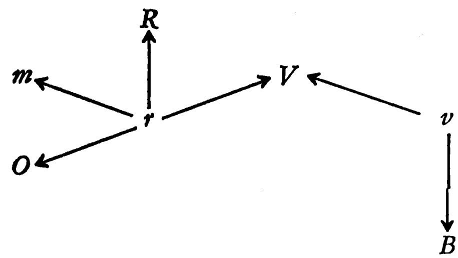
Proposons par exemple d'engendrer des longueurs à partir de r. La longueur b est alors « inaccessible » par rapport à r car on refusera l'opération « prendre la moitié » prétextant qu'elle n'est pas toujours « exécutable » (en fait « prendre la moitié » n'est pas partout définie dans L). De même v est inaccessible ; on refusera d'accepter la description « $b\mathrm{T}r$ » prétextant peut-être que l'on cherche des descriptions qui reposent exclusivement sur la réglette de départ, ce qui n'est pas le cas de l'opération « adjoindre une blanche » (en fait les actions simples sont des opérations « unaires » et non pas binaires). On aboutira inévitablement à un premier diagramme

$$\begin{tikzcd} m & R & V \\ & r \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[dl] & \\ O & & \end{tikzcd}$$

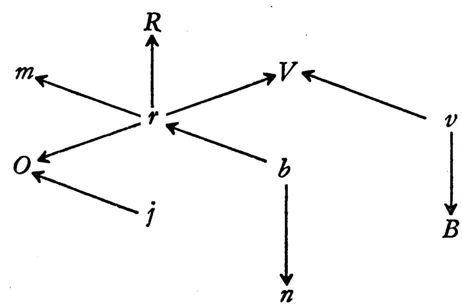
† Formellement on peut identifier la structure T à un graphe $\mathrm{T} \subset LxLxL$ et appliquer à cet « objet » l'extension d'une transformation T au produit cartésien $LxLxL$; on a alors $T(\mathrm{T}) \subset \mathrm{T}$.

établissant certaines connexions entre les grandeurs *r, R, V, m* et *dont les flèches représentent des actions simples de la forme « n-upler ».*

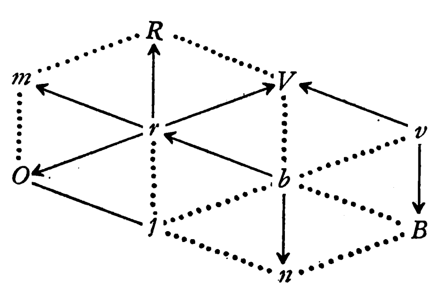
N'ayant pu former la longueur *v,* on examinera ensuite les longueurs accessibles par rapport à *v* pour parvenir obligatoirement au diagramme suivant :



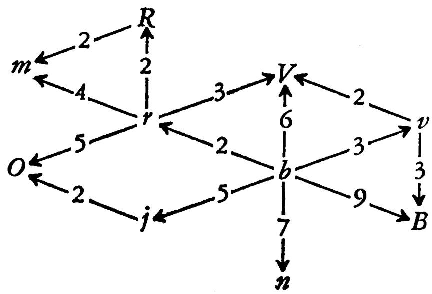
Enfin, dans la même veine, on pourrait maintenant relier *j, b* et *n* au même réseau d'actions :



On pourrait maintenant tenter de prolonger le diagramme en cherchant de nouvelles flèches aux endroits où il n'y en a pas. Ce n'est pas toujours possible mais on pourra parvenir au prolongement suivant :



Il reste que là où deux longueurs ne sont liées par aucune action *simple,* elles n'en sont pas moins liées par une *action* composée d'actions simples. Déjà on atteint à une surabondance de connexions entre un même couple de grandeurs nous conduisant à définir une *équivalence entre les actions :*



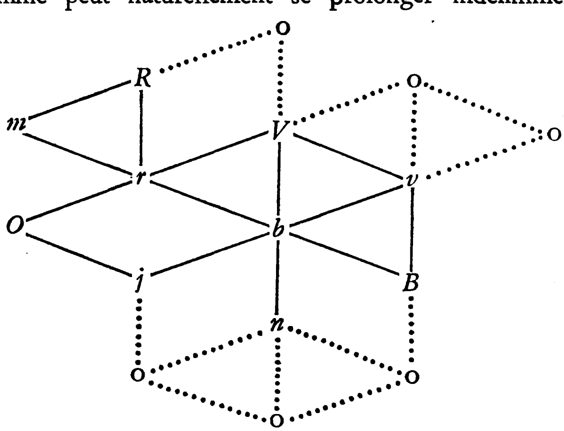
$2 \circ 2 = 4,\ 2 \circ 3 = 3 \circ 2 = 6,\ 2 \circ 5 = 5 \circ 2,\ 3 \circ 3 = 9, \ldots,$ mais aussi $3' \circ 2' = 6'$, $2 \circ 5' = 5' \circ 2,\ 2 \circ 3' \circ 5 \circ 2' \circ 5' \circ 9 = 3, \ldots$

Ces relations mettront bientôt en évidence la *commutativité* et l'*associativité de l'opération de prolongement d'un chemin par un autre.* Ces propriétés conduiront aussi à reconnaître qu'il y a toujours entre deux longueurs quelconques un chemin comportant au plus deux flèches (dont une à contresens) et justifieront alors l'introduction de la notation fractionnaire.

Enfin, notant par exemple que $b \top r = v$, et si x, y, z désignent des chemins issus d'un élément arbitraire de L et aboutissent respectivement à b, r, v, alors $x + y = z$. Ainsi on pourra obtenir, entre autres, les relations additives suivantes :

$1 + 2 = 3$	*(Chemins issus de b),*
$2' + 1 = 3 \circ 2'$	(" " " *r),*
$6' + 3' = 2'$	(" " " *V),*
etc.	

Le diagramme peut naturellement se prolonger indéfiniment :



et donner lieu à toutes sortes d' « exercices lacunaires »,

*

* *

Remarques :

1) Nous avons noté la loi de composition dans *L* par le signe T afin de souligner le fait que *le calcul ne s'exécute pas au niveau de la matière sous-jacente.* En effet *le calcul concerne les nombres (mesures, actions), c'est-à-dire les « liens » ou rapports de grandeurs et non ces grandeurs elles-mêmes.*

2) On peut évidemment fonder sur l'emploi systématique des *actions* une nouvelle approche aux systèmes de nombres et à la conquête des algorithmes de calcul, mais ce n'est pas ici notre propos.

3) Notons qu'à aucun moment il n'a été nécessaire de désigner de *grandeur unitaire* dans *L.*