Cahiers de la recherche en éducation

Statut accordé au symbolisme et contrôle exercé sur une solution algébrique par les futurs enseignants d'adaptation scolaire et sociale

Sylvine Schmidt

Volume 6, numéro 1, 1999

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1017013ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1017013ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke

ISSN

1195-5732 (imprimé)
2371-4999 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Schmidt, S. (1999). Statut accordé au symbolisme et contrôle exercé sur une solution algébrique par les futurs enseignants d'adaptation scolaire et sociale. *Cahiers de la recherche en éducation*, *6*(1), 109–138. https://doi.org/10.7202/1017013ar

Résumé de l'article

Cette étude traite des difficultés que de futurs enseignants en adaptation scolaire et sociale éprouvent lorsqu'ils ont à passer de l'arithmétique à l'algèbre. À partir d'entrevues individuelles, elle met en lumière le statut accordé au symbolisme par certains d'entre eux, et le type de contrôle qu'ils exercent sur une solution algébrique. De leurs commentaires ont été dégagés, entre autres, le sens qu'ils accordent à la lettre et à l'équation, et la prise de distance des significations contextuelles dont ils sont ou non capables. Les résultats indiquent des pistes d'intervention pour la formation en didactique des mathématiques.

Cahiers de la recherche en éducation, vol. 6, nº 1, 1999, p. 109 à 138

CRÉ

Statut accordé au symbolisme et contrôle exercé sur une solution algébrique par les futurs enseignants d'adaptation scolaire et sociale

Sylvine **Schmidt**
Université de Sherbrooke

Résumé – Cette étude traite des difficultés que de futurs enseignants en adaptation scolaire et sociale éprouvent lorsqu'ils ont à passer de l'arithmétique à l'algèbre. À partir d'entrevues individuelles, elle met en lumière le statut accordé au symbolisme par certains d'entre eux, et le type de contrôle qu'ils exercent sur une solution algébrique. De leurs commentaires ont été dégagés, entre autres, le sens qu'ils accordent à la lettre et à l'équation, et la prise de distance des significations contextuelles dont ils sont ou non capables. Les résultats indiquent des pistes d'intervention pour la formation en didactique des mathématiques.

Introduction

Le questionnement à l'origine de cette étude émane des observations relatées par Chevallard (1984, 1989) de même que Lee et Wheeler (1989) au sujet de la dichotomie qui s'installe entre arithmétique et algèbre chez des élèves ayant reçu des enseignements dans ces deux domaines. Pour plusieurs élèves, arithmétique et algèbre constituent des univers séparés n'ayant rien à voir l'un avec l'autre, autant dans leurs approches que dans les solutions qui en découlent: les divergences dans les résultats obtenus par ces deux méthodes dans un contexte de preuve ou de généralisation par exemple (Lee et Wheeler, 1989), loin de les ébranler, semblent au contraire aller de soi. Ce phénomène peut être attribuer à des sources diverses.

Pour notre part, nous explorons ce qui concerne l'enseignant, plus particulièrement les futurs maîtres. Comme le soutient Schubauer-Leoni (1989),

> *les actes, par lesquels le maître met les élèves face au problème, sont fortement marqués par le rapport que l'enseignant entretient a priori avec le problème; ce marquage se traduit en indices explicites d'attentes spécifiques adressées aux élèves: lorsqu'il présente l'activité, selon les consignes choisies, mais aussi selon la manière de mettre en scène, de cadrer le savoir et de le situer par rapport aux savoirs anciens censés être connus des élèves, le maître structure, oriente la prise en charge du savoir par l'élève* (p. 352).

Ainsi, le rapport au savoir mathématique développé par l'élève porte en soi la marque du rapport entretenu par le maître face au savoir spécifique en jeu, il est teinté par celui-ci. Il est donc d'une grande importance d'examiner le rapport que les maîtres et tout autant les futurs enseignants ont développé eux-mêmes relativement aux savoirs qu'ils auront à enseigner, et dans le cas qui nous intéresse ici plus particulièrement, le rapport qu'ils entretiennent avec l'arithmétique et l'algèbre.

Cette problématique débouche ainsi, de manière incontournable, sur la formation initiale des enseignants et, en ce qui nous concerne, elle nous conduit à nous intéresser particulièrement à la formation des futurs enseignants en adaptation scolaire et sociale. Conformément aux exigences du ministère de l'Éducation, ces derniers sont appelés à intervenir au primaire et au secondaire auprès d'une clientèle qui présente des difficultés d'apprentissage ou de comportement, une déficience intellectuelle, visuelle ou auditive, ou des handicaps multiples. La formation des futurs enseignants en adaptation scolaire et sociale les prépare à intervenir en relation de soutien avec des enseignants des classes régulières et à prendre en charge la responsabilité d'un groupe ou d'une classe d'élèves. La multiplicité des tâches qu'on attend d'eux dans divers champs et divers contextes rend extrêmement complexe et fort exigeant sur le plan de la formation professionnelle l'acte d'enseigner. Comme plusieurs de ces futurs enseignants en adaptation scolaire et sociale auront à intervenir au primaire et au secondaire, ils devront enseigner éventuellement l'algèbre. Se pose alors la question de leur compétence à mener à bien les actions didactiques pertinentes lors de la transition de l'arithmétique à l'algèbre par les élèves. Quel rapport ces futurs enseignants entretiennent-ils avec ces deux domaines ? Sur quelle base choisiront-ils les situations didactiques susceptibles de favoriser ce passage entre l'arithmétique et l'algèbre ? Saisissent-ils eux-mêmes la pertinence de l'algèbre et ont-ils recours à ce mode de traitement face à certaines situations ? Pourront-ils être à l'écoute des raisonnements des élèves et saisir les difficultés qu'ils rencontrent dans la transition de l'arithmétique à l'algèbre ? Sauront-ils les orienter vers une voie féconde ?

Guidée par ces questions, nous avons mené une recherche auprès d'étudiants inscrits dans un programme d'enseignement en adaptation scolaire à l'Université du Québec à Montréal et à l'Université de Sherbrooke. Notre objectif n'est pas de comparer les deux groupes, mais de donner à la recherche plus d'envergure aux résultats éventuels. Le cadre de référence utilisé pour l'analyse des données suit immédiatement ; il débouche naturellement sur la méthodologie. Viennent enfin quelques résultats particulièrement intéressants relativement aux difficultés que les apprentis enseignants rencontrent eux-mêmes lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre.

1. Cadre de référence

Quelques recherches ont jeté un certain éclairage sur l'articulation arithmétique-algèbre, quoique cela se soit produit dans le cadre restreint des difficultés liées au seul passage de l'arithmétique à l'algèbre chez des élèves, principalement au moment des débuts de l'apprentissage de l'algèbre. Ces recherches ont mis en évidence certains changements fondamentaux nécessaires à cet apprentissage, notamment dans la signification accordée aux écritures symboliques : interprétation attribuée à la lettre et aux conventions d'écriture (Booth, 1984), conceptions rattachées à la notion d'égalité (Bélanger et Erlanger, 1983 ; Kieran, 1981) et aux opérations (Collis, 1974).

L'algèbre ne peut toutefois être réduite à la seule utilisation du symbolisme. L'histoire des mathématiques (Charbonneau et Lefebvre, 1992) montre en effet que l'algèbre existait en tant que mode de raisonnement sous une forme rhétorique bien avant que les quantités inconnues soient représentées par un symbole. Dans cette perspective, Bednarz et Janvier (1996) ont analysé les raisonnements utilisés par les élèves dans le cadre spécifique de la résolution de problèmes ; ils se sont intéressés aux continuités et discontinuités qu'on peut repérer dans les raisonnements que les élèves élaborent spontanément. Cette recherche a mis en évidence les changements conceptuels que nécessite pour les élèves ce passage à l'algèbre. Les difficultés majeures que ciblent ces chercheuses concernent a) l'acceptation de penser en termes d'une inconnue et d'opérer sur celle-ci comme si elle était connue (certains élèves s'y refusent catégoriquement), b) la prise en compte de l'ensemble des relations en présence dès le départ de la résolution (en arithmétique, les élèves s'engagent dans la résolution en procédant de façon séquentielle, en s'appuyant successivement sur des données connues), et c) l'acceptation de prendre une distance vis-à-vis du contexte (la référence au contexte constituant ici un obstacle à la résolution).

Par ailleurs, des analyses épistémologiques (Charbonneau, 1996; Radford, 1996) permettent également de situer certains sauts conceptuels qui ont marqué historiquement l'émergence de la pensée algébrique, faisant ici ressortir des oppositions entre raisonnements arithmétiques et algébriques (pour une analyse détaillée, voir Schmidt, 1994). Ces types de raisonnement s'apparentent à deux modes de démonstration utilisées par les Grecs dans l'antiquité. L'arithmétique procède de manière synthétique du connu vers l'inconnu, ce qui est recherché apparaissant au terme du processus de résolution. L'algèbre adopte par opposition une démarche analytique procédant de l'inconnu vers le connu. Dans ce cas, l'engagement dans le problème passe par une prise en compte de la grandeur (ou des grandeurs) inconnue(s) dès le départ et par la capacité d'opérer sur celle-ci en faisant comme si le problème était résolu. De plus, l'analyse historique montre que deux rôles ont été attribués successivement aux écritures symboliques: un rôle «désignatoire» et un rôle «opératoire». Seul ce dernier constitue la marque distincte de l'algèbre.

Autre changement conceptuel important: au fil des manipulations algébriques, les significations contextuelles ne suffisent plus à assurer la justesse de la démarche empruntée dans la résolution (comme c'est le cas en arithmétique). Une distance vis-à-vis du contexte s'installe et contribue à une désémantisation de la résolution (Pycior, 1984). La certitude du raisonnement juste doit alors prendre appui sur un système de déduction logique de type formel. Le contrôle que le sujet exerce sur la résolution en arithmétique et en algèbre n'est ainsi pas du même ordre.

En somme, les diverses difficultés observées chez les élèves dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre trouvent leur source dans des changements fondamentaux qui touchent à la nature même des raisonnements mis en place, à la signification des écritures symboliques et à la nature du contrôle exercé dans les deux domaines. Qu'en est-il des futurs enseignants en adaptation scolaire et sociale ? Quelques éléments de réponse à cette question suivront la présentation de l'approche méthodologique utilisée dans le cadre de cette recherche.

2. Méthodologie

2.1 Épreuve écrite

Une première épreuve a été mise au point pour déterminer si les étudiants en adaptation scolaire et sociale utilisent l'algèbre pour résoudre certains problèmes qui en requièrent l'emploi et l'arithmétique lorsque celle-ci se révèle plus appropriée ou, au contraire, si certains d'entre eux ont plutôt tendance à se cantonner exclusivement dans l'arithmétique ou dans l'algèbre, quel que soit le type de problème à résoudre. Ainsi, la nature même des problèmes constitue une variable importante pour notre recherche. Certains problèmes retenus dans cette épreuve doivent solliciter un engagement arithmétique, d'autres, un engagement algébrique. Le choix des problèmes a suivi le cadre de référence établi par Bednarz et Janvier (1996) qui convient à l'analyse *a priori* des problèmes dans une perspective apparentée à nos propres intérêts de recherche.

Dans une phase initiale, une épreuve écrite comprenant huit problèmes présentés en désordre sur une base aléatoire : quatre problèmes « arithmétiques » et quatre problèmes « algébriques »[1], ainsi catégorisés à partir de la grille d'analyse utilisée (voir ces problèmes en annexe) a été présentée à deux groupes d'étudiants (Université du Québec à Montréal, 65 sujets ; Université de Sherbrooke, 59 sujets). Les critères suivants ont permis de classifier les différentes procédures employées par les futurs enseignants.

1 Un problème en soi ne peut être qualifié d'arithmétique ou d'algébrique, seul le mode de résolution peut l'être. La désignation utilisée ici renvoie à la grille d'analyse des problèmes de Bednarz et Janvier (1996) qui, en faisant ressortir la structure de problème (par exemple, le type de lien établi entre les données connues et inconnues) permet d'identifier les situations qui susciteront davantage de résolution arithmétique ou algébrique (une relation donnée entre deux grandeurs connues permettant d'évoluer du connu vers l'inconnu favorisera, par exemple, une démarche de type arithmétique). Nous utiliserons tout de même cette appellation afin de préciser le type de relation établi entre les données.

Procédure arithmétique – Une procédure est jugée «arithmétique» lorsque, à l'analyse, il ressort que le sujet a entrepris une démarche où il a pris constamment appui sur des nombres connus pour effectuer les opérations successives qu'il pensait requises, l'inconnue recherchée apparaissant au terme du processus de résolution.

Procédure algébrique – Une procédure est jugée «algébrique» lorsque le sujet a axé sa démarche de résolution sur un nombre inconnu, momentanément remplacée par une quelconque notation (une lettre ou un mot). Ce substitut lui est utile pour organiser globalement les relations fournies dans le problème, mais surtout pour effectuer les opérations nécessaires. À l'intérieur de sa démarche, le sujet opère directement sur l'inconnue, ce qui lui permet d'évoluer de l'inconnu vers le connu.

2.2 Entrevues individuelles

L'épreuve écrite initiale a permis, grâce à l'analyse subséquente des procédures de résolution utilisées pour chacun des problèmes, l'identification précise des sujets qui ont eu recours essentiellement à l'arithmétique pour résoudre les huit problèmes de ce test. Dans les deux groupes, 24 étudiants[2] ont été retenus pour participer à une entrevue individuelle, dans l'intention de mieux comprendre les raisons qui les amènent à se cantonner dans ce mode particulier de raisonnements. Les deux questions qui ont guidé l'élaboration du protocole d'entrevue s'énoncent ainsi: Quelles sont les difficultés qu'on peut repérer lorsque ces étudiants utilisent d'eux-mêmes ou contraints par l'intervieweur un certain symbolisme? Devant une solution algébrique erronée, sont-ils en mesure de repérer la difficulté sous-jacente du solutionneur fictif? Une première partie de ce protocole demande de la part des sujets de résoudre des problèmes «algébriques»; pour les besoins de ce texte, nous nous en tiendrons aux solutions à ce seul problème présenté sous deux versions différentes:

Problème «Arsène Ponton»

Première version – Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, et il donne 16000$ de moins à Sophie qu'à Marie. Si sa fortune s'élève à 208000$, combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?

2 De ces 24 étudiants, 8 sont de l'UQAM et 16 de Sherbrooke. Il nous est paru inutile d'établir des distinctions entre les modes de résolution employés par ces deux catégories d'étudiants.

Deuxième version – Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, et il donne 17000$ de moins à Sophie qu'à Marie. Si sa fortune s'élève à 200000$, combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?

Très rapidement, il est possible de voir le mode de traitement que l'étudiant favorise pour la résolution de ce problème; il est en outre possible d'examiner l'utilisation d'un certain symbolisme à laquelle celui-ci se prête spontanément ou non. Pour les sujets qui utilisent l'arithmétique, il est prévu de leur demander expressément, à la suite de leur première résolution, d'utiliser l'algèbre pour résoudre à nouveau ce problème. Par cette tactique, nous forçons les étudiants à développer une démarche algébrique, ce qui permet d'observer dans l'action les difficultés qu'ils peuvent rencontrer dans l'utilisation de l'algèbre.

Dans une deuxième partie, cette solution algébrique fictive d'un élève est présentée:

Problème «Livres et disques»

Brigitte va au magasin. Elle achète le même nombre de livres et de disques. Les livres coûtent 2$ chacun et les disques coûtent 6$ chacun. Elle dépense en tout 40$. Combien de livres et combien de disques a-t-elle achetés?

La réponse de Jean:

$2x + 6y = 40$,	comme $x = y$, je peux écrire
$2x + 6x = 40$	
$8x = 40$	Cette dernière équation indique que 8 livres coûtent 40$, donc un livre coûte 5$

Que penses-tu de la solution de Jean?

Dans cette solution fictive, l'élève se méprend dans l'interprétation qu'il accorde à l'équation: $8x = 40$. Le nombre 8 devient pour lui le nombre d'items, alors qu'il renvoie ici à la somme du prix d'un livre et d'un disque; et la lettre «x», toujours pour cet élève, devient le prix d'un livre (et non le nombre de livres et le nombre de disques). L'étudiant maître sera-t-il en mesure de déceler cette interprétation erronée? Quel sens le futur enseignant accordera-t-il lui-même à cette équation: $2x + 6y = 40$? Sera-t-il en accord avec la substitution suggérée par «comme $x = y$, je peux écrire $2x + 6x = 40$» qui demande de faire abstraction de la nature des éléments concernés?

3. Résultats

3.1 Résultats de l'épreuve écrite

Le tableau 1 met en lumière le faible pourcentage de procédures algébriques utilisées par les futurs enseignants pour chacun des quatre problèmes d'algèbre de l'épreuve écrite: ce pourcentage se tient majoritairement en deçà de 35% (une seule exception, 47% de procédures algébriques au problème «Les raquettes» pour le groupe de Sherbrooke). Les étudiants maîtres de Sherbrooke recourent un peu plus à l'algèbre que le groupe de Montréal. On peut s'interroger alors sur l'efficacité des procédures algébriques utilisées. Le tableau 2 illustre le pourcentage de ces procédures qui ont conduit au succès. Bien que les sujets du groupe de Sherbrooke fassent davantage appel à l'algèbre, le pourcentage des procédures algébriques qui ont permis une réussite est moins élevé que dans l'autre groupe (sauf dans le cas du problème «Le congrès»): les étudiants de l'UQAM emploient moins l'algèbre, mais lorsqu'ils le font, leurs procédures semblent plus efficaces.

Tableau 1 – Pourcentage de procédures arithmétiques et algébriques relevé pour chacun des problèmes algébriques pour les deux groupes de sujets (UQAM, Université de Sherbrooke)

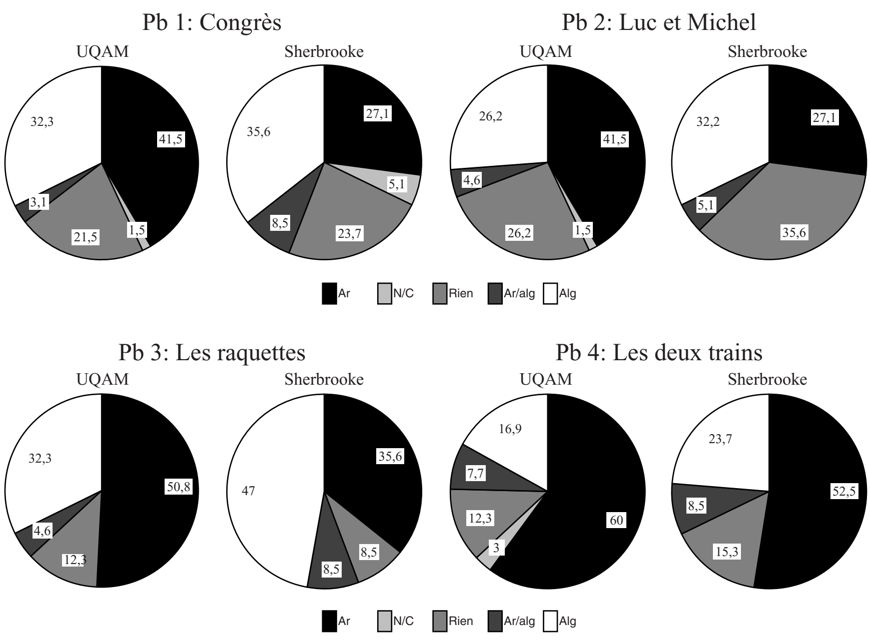
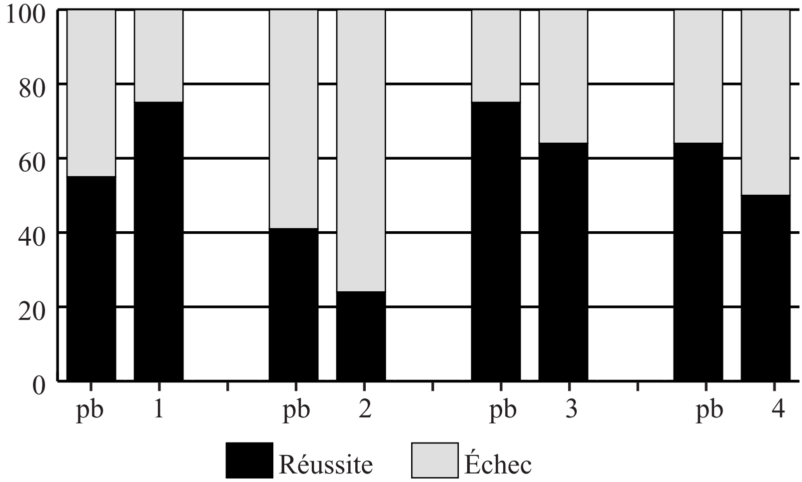


Tableau 2 – Pourcentage de procédures algébriques conduisant à une réussite (UQAM/Université de Sherbrooke)



De tout ceci, il importe de retenir le faible taux d'utilisation de l'algèbre en tant que moyen de résoudre ces problèmes de tradition algébrique par ces deux groupes de futurs enseignants en adaptation scolaire et sociale, et enfin, le peu de procédures algébriques à succès sur l'ensemble des solutions employées, tel que le résume le tableau 3. Les entrevues individuelles permettent maintenant d'éclairer certaines difficultés rencontrées par les futurs enseignants, ce qui explique cette difficile transition à l'algèbre.

Tableau 3 – Pourcentage de réussites par procédures algébriques sur l'ensemble des solutions utilisées

	UQAM	Sherbrooke
Le congrès	18,5	25,4
Luc et Michel	10,8	8,5
Les raquettes	23,1	30,5
Les deux trains	10,8	11,9

3.2 Résultats des entrevues individuelles

Les entrevues individuelles ont été menées auprès de sujets qui démontraient des profils de résolution très typés, représentatifs de l'ensemble des individus participant à la recherche. Ces entrevues ont permis, entre autres, de dégager à travers l'utilisation d'une certaine écriture littérale le statut que les enseignants en formation accordent au symbolisme. En outre, elles permettent de mettre en évidence, dans le contrôle qu'ils exercent sur une solution algébrique d'un élève fictif, le sens qu'ils donnent à la lettre et à l'équation, et la distanciation des grandeurs dont ils sont capables par l'abstraction de la nature concrète des éléments impliqués. La présentation des résultats reprend la catégorisation des difficultés observées au regard de ces deux rubriques.

4. Le statut accordé au symbolisme par les futurs enseignants à tendance arithmétique

L'analyse des notations que certains futurs enseignants posent au début de la résolution du problème laisse entrevoir qu'ils attribuent au symbolisme trois différentes fonctions: le symbolisme est perçu comme un outil de retranscription de l'énoncé du problème; le symbolisme correspond à un outil servant à désigner les grandeurs inconnues en relation deux à deux; le symbolisme est un outil de modélisation du problème.

4.1 Le symbolisme, un outil de retranscription de l'énoncé du problème

La résolution du problème Arsène Ponton par Eugénie[3] montre en quoi le symbolisme qu'elle emploie constitue un obstacle à l'algébrisation. Voici la solution qu'elle produit lorsque l'intervieweur lui demande de résoudre ce problème par l'algèbre:

Solution d'Eugénie au problème «Arsène Ponton», première version (cf p. 114):

Les paroles que prononce Eugénie au fur et à mesure qu'elle tente de résoudre ce problème sont disposées en parallèle avec ses notations.

3 Les noms ont été changés afin de préserver l'anonymat des sujets.

Marie	x
Sophie	y
Chantal	z

$y - 16000 = x$	y - 16000 de moins à Sophie qu'à Marie ; y moins 16000 égale Marie qui est x.
$3x = 1z$	Trois fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal ; 3x égalent 1z.
$y = x + 16000$	y égale x plus 16000. Je vais essayer ça.
$3x = 1z$	Bien, c'est là que je sais plus. Je fais-tu un tiers du montant ?
$x = \frac{1z}{3}$	Essayons voir… 208000 sur… On va dire un tiers du montant. C'est comme si je multipliais un tiers.
$x = 69333{,}30$	C'est ça, 208000 divisé par 3.

À travers ses paroles, on voit que les lettres lui permettent de retranscrire succinctement un énoncé du problème afin de garder trace de la relation présentée. Par exemple, selon la légende posée initialement, pour elle « y » renvoie à Sophie et « x » à Marie ; l'énoncé « il donne 16000 de moins à Sophie qu'à Marie » devient en quelque sorte :

y	- 16000	=	x
(Sophie)	(16000 de moins)	(que)	(Marie)

Les lettres « y » et « x » ne désignent pas pour elle un nombre, mais renvoient au référent de ces grandeurs : Sophie et Marie. Ce sont des étiquettes, sans plus, permettant de se référer aux éléments identifiés. La notation « $y - 16000 = x$ » n'exprime donc pas une relation entre les quantités mises en jeu ; il s'agit plutôt d'un simple raccourci de l'énoncé dont elle garde trace à des fins d'aide-mémoire. Ce processus de retranscription littérale conduit à une erreur classique rapportée par plusieurs dans la documentation scientifique en didactique de l'algèbre (Clement, 1982 ; Fisher, 1988 ; Herscovics, 1989 ; Malle, 1990 ; Radford, 1993 ; Rosnick et Clement, 1980) : une erreur d'inversion de l'équation algébrique correspondante : $x - 16000 = y$. Le même phénomène se répète avec l'écriture de la relation multiplicative : « Trois fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal », ou elle pose « $3x =1z$ » au lieu de « $x = 3z$ ». Le symbolisme algébrique requiert une reconstruction mathématique abstraite de la relation présentée par distanciation des représentations concrètes suggérées par l'énoncé ; par exemple, l'énoncé «trois fois plus à Marie qu'à Chantal» peut conduire à une représentation mentale concrète de la forme:

trois parts à Marie	pour	une part à Chantal
❍ ❍ ❍		❍

L'erreur par procédé de retranscription qualitative «3x = 1z», où le signe «=» prend davantage le sens d'une préposition (Malle, 1990), est en accord avec cette représentation concrète. Le processus de reconstruction de la relation qui doit conduire sous une symbolisation algébrique à la représentation mathématique abstraite d'une relation d'égalité, n'est de toute évidence pas accompli par ce sujet.

Après avoir retranscrit les relations telles qu'elles ont été énoncées, Eugénie tente d'aborder la résolution algébrique. Elle pose «x = 1z/3» . «z», on le sait, renvoie pour elle à un objet et non à un nombre (conception étiquette de la lettre); cette écriture désigne qualitativement la relation exprimée dans le problème et ne fait référence en aucune façon à une relation entre grandeurs inconnues. Les opérations sur le symbolisme sont par conséquent vides de sens pour elle; elle exécute alors un simulacre d'algèbre, qui colle en fait à la procédure arithmétique erronée qu'elle a utilisée précédemment (le montant total connu est divisé par 3).

4.2 Le symbolisme, un outil servant à désigner les grandeurs inconnues en relation deux à deux

Dès qu'ils entreprennent de résoudre un problème, plusieurs étudiants maîtres emploient certaines lettres pour identifier clairement les valeurs inconnues et établir les relations qui unissent ces grandeurs prises deux à deux. Nous avons observé chez Normande une telle utilisation du symbolisme:

Solution de Normande au problème «Arsène Ponton», deuxième version (cf p. 7):

200000$		
Marie : x	3 X Chantal	3y
Chantal : y		
Sophie : z	Marie – 17000	x – 17000

Dans sa façon de symboliser, Normande utilise des lettres (ici « x », « y » et « z ») qui vont lui permettre tout d'abord d'identifier les données inconnues du problème. Cette symbolisation lui sert alors à mettre de l'ordre de façon séquentielle dans les grandeurs impliquées, en les reliant deux à deux selon l'ordre des relations énoncé dans le problème : la relation formulée à l'endroit du montant de Marie comme étant « 3 X (fois) Chantal » relie « x » et « y » et permet de traduire « x » par « 3y », et celle établie à l'endroit du montant de Sophie comme étant « Marie – 17 000 » unit à son tour « x » et « z » et conduit à poser pour ce dernier montant « x – 17 000 ». Cette symbolisation contribue à l'analyse séquentielle des relations en désignant les données inconnues et en précisant comment celles-ci sont générées de l'une à l'autre, comme nous le mentionne Normande : « Cela m'a fait voir, schématiser ce que chacune avait par rapport à l'autre », sans que cette future enseignante ne parvienne toutefois à les exprimer globalement en fonction d'une seule lettre. Ce procédé d'analyse transparaît dans bien d'autres solutions d'étudiants maîtres ; certains d'entre eux vont même utiliser des flèches afin de bien marquer ces relations binaires, comme dans cet exemple-ci :

Marie	**Chantal**	**Sophie**
x	y	z
3y ⟵	———	
———	———	⟶ x-16 000

À la suite de cette phase initiale permettant d'identifier les éléments et l'ordre des liens qui les unissent deux à deux, ces sujets s'orientent vers l'arithmétique, et ce, très souvent en adoptant des procédures de type « essais numériques ». Jamais ils n'ont pu passer à l'équation algébrique qui requiert la prise en compte de l'ensemble des données par la composition des relations (par exemple, le montant de Marie étant « x », on peut aussi exprimer cette somme en fonction de celle de Chantal, soit « 3y » ; cette formulation permettant à son tour de fixer le montant de Sophie à partir de celui de Marie, ce dernier étant lui-même, grâce à la substitution précédente, déterminé par le montant de Chantal). Cette difficulté qui est reliée à la prise en compte globale des relations et à leur composition a déjà été signalée par Bednarz et Janvier (1996) dans une étude conduite auprès d'élèves avant qu'ils reçoivent un enseignement en algèbre. Nos résultats montrent la force de ce type d'analyse séquentielle des données qui se réactive spontanément chez des apprentis enseignants, et ce, malgré tout l'enseignement de l'algèbre reçu au secondaire.

4.3 Le symbolisme, un outil de modélisation du problème

D'autres futurs enseignants vont curieusement mettre en place une légende propice à la résolution algébrique, sans pour autant passer à l'équation. Essayons de comprendre pourquoi en analysant d'abord la démarche de Cloé puis celle d'Alexandrine.

Solution de Cloé au problème «Arsène Ponton», deuxième version (cf p. 115):

Marie : 3x
Chantal : x
Sophie : 3x – 17000$
200000$

Dans cette façon de symboliser, Cloé cherche d'abord à repérer un élément qui lui permettra de générer tous les autres, comme elle en fait part lorsqu'on la questionne sur l'utilité des notations qu'elle pose ainsi au début de la résolution du problème: «Ça m'a servi à savoir comme, mettons Chantal c'est mon point de départ; puis que Marie, elle, en avait trois fois plus que Chantal. C'est comme, je n'avais pas besoin plusieurs fois de revenir au problème. Là c'est sûr que je me souviens qu'il y aurait une formule meilleure… Ça, c'est bon (pointe sa légende), mais il y aurait une formule meilleure pour compter, mais je ne m'en souviens plus. Ça fait que rendu là, il faut que je le fasse par essais». Cette explication fait ressortir en premier lieu le rôle que joue pour elle le symbolisme: un outil qui l'aide à modéliser l'ensemble des relations du problème à partir de l'élément générateur ciblé. Elle permet aussi de mettre en lumière la représentation de l'équation et le rapport à l'algèbre que cette future enseignante a développés au cours de son apprentissage. Pour elle, l'algèbre, c'est des formules qu'on a apprises par cœur et qu'on applique selon les problèmes qu'on cherche à résoudre: un problème conduit à une formule prédéterminée qu'on doit connaître avant de s'engager dans la résolution. Il ne lui vient pas à l'esprit que l'équation est une modélisation du problème qu'elle a le loisir de reconstruire à sa guise selon la représentation qu'elle se fait du problème.

Une autre étudiante, Alexandrine, a, au départ de sa résolution, posé exactement la même légende que Cloé. Elle résout ensuite le problème par l'arithmétique de cette façon: elle enlève la somme de 17000$ du montant total (200000$) et divise ce dernier par 7. Elle trouve ainsi le montant de Chantal: 26142,86$; en multipliant par 3, elle obtient le montant de Sophie, et rajoute 17000$ à ce montant pour avoir celui de Marie (selon sa justification, si Sophie a 17000$ de moins que Marie, Marie a 17000$ de plus qu'elle; il faut donc lui rajouter ce montant à la fin, solution erronée il va sans dire). Après cette résolution arithmétique, l'intervieweur lui demande: «Maintenant tu avais écrit ceci: 3x, x, 3x – 17000$, puis après cela tu as pris une autre direction. Cela t'a servi à quoi?». Elle répond: «Cela m'a permis de visualiser mon problème. Savoir qu'elle (Marie), elle en avait plus… Cela m'a servi que, bon si elle (Chantal), elle en a juste une fois, bien elle (Marie), elle en a trois fois plus… Parce qu'il y en a 7: 3, 3 et ici c'est comme un (écrit un 1 devant le x seul). C'est comme une variable pour me montrer qu'il y a une personne qui en a plus. C'est une façon de visualiser le problème, c'est comme cela que je l'ai appris». Tout comme Cloé précédemment, cette étudiante utilise un symbolisme afin de «bien visualiser son problème». Ce faisant, l'élément générateur identifié lui permet d'illustrer à partir des relations établies les différentes grandeurs; cette symbolisation sert de support à un raisonnement arithmétique (et non algébrique). Dans le cas de Cloé, après la constitution de sa légende, elle s'oriente vers des essais numériques; la modélisation de son problème la guide dans ses différentes tentatives (elle détermine un certain montant à son élément générateur, et selon les relations notées, elle reconstitue les montants de deux autres nièces. Elle réajuste le montant fixé pour le générateur jusqu'à ce qu'elle rencontre toutes les conditions posées dans le problème). Dans le cas d'Alexandrine, on observe que cette modélisation du problème lui permet de voir qu'il y a en fait 7 parts: trois pour Marie, une pour Chantal et trois parts (moins la différence de 17000$) pour Chantal. La représentation qu'elle s'est construite du problème à partir des traces écrites qu'elle a produites l'oriente vers une procédure où elle cherchera à équilibrer la différence de 17000$ par rapport au montant total, pour ensuite partager la somme obtenue en 7 parts égales. L'intervieweur l'invite par la suite à résoudre le problème par l'algèbre. Examinons attentivement le déroulement séquentiel de sa démarche afin de bien cerner la nature des difficultés qu'elle rencontre.

Tableau 4 – Solution d'Alexandrine au problème Arsène Ponton (version 2)

Verbatim	Évolution graduelle de la solution écrite
1. J'aurais mis 3x plus x plus... Admettons, j'aurais mis mes «x», il aurait fallu que je divise par 7.	
2. J'aurais tout mis cela égal à 200000$	200000
3. Moins 17000$	200000 - 17000
4. Puis j'aurais fait 3x plus x plus 3x	3x + 1x + 3x = 200000 - 17000
5. Cela m'aurait donné 7x est égal à 183000$	3x + 1x + 3x = 200000 - 17000 7x = 183000
6. Puis là j'aurais divisé par 7	

Au point 1, on peut voir qu'Alexandrine cherche à engager ses «x» et à diviser par 7, mais faute de ne pas savoir comment s'y prendre, elle n'écrit rien. Elle commence alors en s'appuyant sur le seul montant connu, c'est-à-dire le 200000$ (point 2), et agit sur celui-ci pour réaliser l'autre opération qu'elle croit requise: 200000 – 17000 (point 3). Jusqu'ici, Alexandrine s'est centrée sur les données connues. Ne pouvant plus procéder de cette façon, elle incorpore dans la solution le produit de sa modélisation précédente du problème (3x + x + 3x) et enfin les 7 parts perçues. En fait, cette résolution est calquée sur sa démarche arithmétique précédente où elle s'appuie constamment sur des nombres connus. Ce cas rejoint l'opposition classique entre la synthèse et l'analyse, deux méthodes de démonstration utilisées dans l'antiquité par les mathématiciens grecs, ainsi décrites par Charbonneau et Lefebvre (1992), historiens des mathématiques:

> *Partant d'un énoncé à prouver, l'analyste suppose vraie ou réalisée la propriété recherchée et, de là, étudie l'environnement de cette propriété pour bien identifier les éléments connus et inconnus, et mettre en évidence d'autres propriétés qui, espère-t-on, sont vraies ou peuvent être rendues telles, et à partir desquelles par une démarche inverse, dite synthèse, on puisse démontrer la propriété cherchée. Il en va de même dans le cas d'un problème, si ce n'est qu'il s'agisse alors de construction plutôt que de propriétés* (p. 14).

Autrement dit, dans la synthèse apparentée à l'arithmétique, le sujet s'appuie sur des quantités connues et organise pas à pas une séquence d'opérations qui, en fin de parcours, mène au résultat recherché, l'inconnue. Dans l'analyse ou l'algèbre, le sujet accepte dès le départ de mobiliser la ou les valeurs inconnues par l'intermédiaire d'un substitut symbolique quelconque et reconstruit globalement, en général sous la forme statique d'une équation, les relations stipulées dans le problème. Les opérations algébriques s'exercent alors sur les valeurs inconnues en faisant comme si elles étaient connues. On a pu le constater chez Alexandrine, ce mode d'approche lui cause quelques difficultés (ne sachant pas trop comment s'y prendre avec les «x», elle débute en s'appuyant sur le montant connu). Elle dit: «J'aurais pu le faire comme cela, mais je ne sais pas pourquoi, j'aime mieux intégrer mes chiffres tout de suite». Elle préfère ainsi agir en mobilisant au départ les quantités connues et ses raisonnements procèdent alors du connu vers l'inconnue. Pour passer à l'algèbre, elle doit cesser de faire reposer son raisonnement sur des grandeurs connues pour s'orienter vers un calcul relationnel algébrique appliqué aux grandeurs inconnues. Ce mode de raisonnement repose sur le dépassement de ce paradoxe: comment peut-on agir sur des quantités qu'on ne connaît même pas et obtenir un résultat valide? De toute évidence, pour cette future enseignante, ce paradoxe n'est pas résolu.

En somme, les notations symboliques décrites jusqu'ici ont en commun que, dans l'esprit de celui ou celle qui les utilise, un statut essentiellement «désignatoire» leur est attribué. Les lettres jouent un rôle référentiel compatible avec différentes fonctions du symbolisme: retranscription des énoncés, identification des grandeurs inconnues en relation les une avec les autres, modélisation des relations unissant les données du problème. Le passage à l'algèbre marque un changement conceptuel majeur consistant à reconnaître dans les lettres utilisées un potentiel «opératoire»: les symboles supportent des actions qui, à partir d'éléments déterminés, permettent d'engendrer de nouveaux éléments. Les étudiants dont il est question ici n'ont pas accès, pour des raisons diverses en lien avec le statut qu'ils accordent au symbolisme (retranscription qualitative des relations, analyse séquentielle et non globale des relations, démarche synthétique et non analytique, représentation stéréotypée de l'équation et rapport à l'algèbre), à ce statut opératoire pouvant être attribué aux écritures symboliques.

5. Le contrôle exercé par les futurs enseignants à tendance arithmétique sur une solution algébrique d'un élève fictif

Qu'est-ce qui est incorrect dans la solution du problème «Livres et disques» de Jean, notre élève fictif (voir p. 115)? Plusieurs futurs enseignants à tendance arithmétique ne sont pas en mesure de repérer l'erreur commise par cet élève et disent que ça ne fonctionne pas en raison du coût d'un livre et d'un disque mentionné dans le problème et le coût d'un livre auquel arrive Jean dans sa solution: «Ça lui donne 5$ chaque. Mais ça ne coûte pas ça. Ça coûte 2$ puis 6$». Ainsi, certains étudiants maîtres exercent un contrôle sur la solution algébrique en confrontant le résultats de la solution de l'élève fictif avec les données initiales du problème, sans être en mesure toutefois d'identifier l'erreur comme telle. Dans la suite de leurs explications, on peut voir qu'ils reproduisent eux-mêmes, en fait, l'erreur effectuée par l'élève fictif. Dans la section qui suit, notre étude analyse cette erreur liée à une certaine convention implicite d'écriture de la multiplication. D'autres difficultés, impliquant cette fois une conception particulière rattachée à la lettre et la nécessité de se rattacher aux significations contextuelles, seront ensuite discutées.

5.1 Convention implicite d'écriture de la multiplication

Certains futurs enseignants reproduisent exactement la même erreur que l'élève fictif lorsqu'ils expliquent l'équation «$8x = 40$»: «Ça lui donne comme s'il avait acheté 8 items divisés par 40; ça c'est son total, ça lui donne 5$ chaque». Sous cette interprétation se révèle une certaine idée liée à une convention implicite d'écriture de la multiplication lorsque cette opération est utilisée dans un contexte d'addition répétée. Par convention mathématique, la modélisation d'une relation multiplicative est représentée en algèbre par la concaténation des termes impliqués (un taux et un nombre scalaire désignant une certaine répétition du taux, par exemple). Une convention développée implicitement autour de cette forme d'écriture attribue un rôle strict aux termes utilisés lié à leur ordre d'apparition: le premier renvoie au facteur répétitif et le second identifie le taux dont il s'agit. Ainsi, selon cette convention implicite étroite, «ax» désigne un certain nombre d'items (a) à un certain taux (x). Il en résulte un certain glissement de sens dans l'interprétation donnée à la lettre et à la multiplication dans l'expression «8x = 40» par ces futurs enseignants: le «8» correspond à un facteur répétitif et non à un taux (un montant d'argent par item), et «x» qui devait représenter le facteur de répétition est maintenant associé au taux. En fait, la notation «8x» renvoie en algèbre à deux sens de la multiplication (facteur répétitif fois un certain taux, ou l'inverse, un taux fois un certain facteur) qui, historiquement, et pendant très longtemps, ont été différenciés au niveau des notations (Charbonneau et Lefebvre, 1992). Ici, ces deux sens sont confondus sous une même notation, ce qui fait la puissance de la notation algébrique, mais aussi, à la lumière de ces résultats, sa difficulté pour les futurs enseignants.

D'autres futurs enseignants identifient très clairement l'erreur d'interprétation de la lettre et du coefficient numérique dans la solution fictive, en s'appuyant justement sur cette convention implicite d'écriture de la multiplication: «Ah! Il a mêlé ça. Regarde, il a pris son 2 (pointe le 2x de 2x + 6y = 40), 2 fois la variable x, puis 6 fois la variable y» (pointe le 6y de la même équation). Mais ça aurait été «x fois 2 plus y fois 6», selon Yvonne. Cette explication témoigne de la présence de cette convention implicite d'écriture chez cette étudiante. Bien que celle-ci soit en mesure d'identifier la source de l'erreur, son interprétation de l'écriture symbolique de la multiplication reste néanmoins limitée. Cette écriture doit être produite, selon elle, en respect avec cette convention d'écriture: il faut écrire «x2» et «y6» et refuse «2x» et «6y» pour rendre de compte de cette même réalité. Un autre étudiant, Justin, se prononce dans le même sens qu'Yvonne

> C'est ça le problème, les variables…
>
> Habituellement, lorsqu'on fait une équation comme celle-là, c'est le nombre qu'on met en avant, pas le prix.
>
> D'après moi, le nombre est pareil, c'est le prix qui change. Il part avec «x = y», c'est vrai dans le cas… «x» est le nombre de livres et «y» est le nombre de disques, mais ils sont égaux, il achète la même chose.
>
> Mais je te dis, les «x» et les «y», je ne les aurais pas pris comme nombre de livres, je les aurais pris comme montant d'argent.

Comme le dit ce futur enseignant, «c'est le nombre qu'on met en avant, pas le prix». Ce type de représentation basé sur cette convention implicite d'écriture de la multiplication permet également à cet étudiant d'éviter le piège du glissement de sens. Toutefois, comment pourra-t-il résoudre lui-même le problème puisqu'il dit que, dans sa résolution les variables «x» et «y» serviraient à représenter les montants d'argent (déjà connus dans le problème!)?

Les commentaires de ces deux étudiants montrent la rigidité à laquelle les conduit leur interprétation de l'écriture de la multiplication en algèbre; ils soulèvent la question des actions didactiques pertinentes que ces futurs enseignants pourront ou non poser éventuellement auprès d'élèves éprouvant cette difficulté. Il est fort probable que, dans leur enseignement, au lieu de s'attaquer à l'abstraction des deux formes concrètes de la multiplication sous la forme générale de «2x» par exemple, ils amèneront les élèves à assimiler cette convention implicite d'écriture de la multiplication et à l'élargir au niveau de l'équation algébrique dans la résolution de problèmes. Encore une fois, les représentations que les futurs enseignants ont développées autour de l'écriture symbolique en algèbre constituent, à des niveaux divers, un obstacle à une véritable algébrisation.

5.2 Conceptions rattachées à la lettre

Quelques étudiants maîtres vont refuser cette solution au moment où Jean pose «x = y». «Bien, il me semble, disent-ils, que quand tu prends une variable, c'est parce qu'ils ont des nombres différents chacun», «il ne peut pas changer «y »pour «x »parce que ça n'a pas la même valeur. Ça n'a pas la même valeur, parce que c'est des variables différentes. Ça fait qu'il ne peut pas additionner… il ne peut pas changer comme 2x plus 6y, puis arriver en bas, que ça fait 8x.», «En algèbre, ce n'est pas vrai «x = y», parce que «x = x », «y = y», mais «x » n'égale pas «y». Sinon, ce serait les deux mêmes variables».

Cette difficulté a également déjà été décrite dans la documentation scientifique sur les erreurs des élèves en algèbre (Booth, 1984). Les sujets refusent l'égalité «x = y »parce que, pour eux, ces deux lettres doivent nécessairement faire référence à des nombres différents. Selon Booth (1984), à travers cette interprétation se manifestent des conceptions développées antérieurement par les sujets en arithmétique. Dans ce domaine, la recherche de solution conduit à des valeurs numériques uniques, lesquelles à leur tour mobilisent un seul représentant symbolique. Or, cette disposition particulière à appréhender les écritures symboliques n'est-elle pas renforcée par l'enseignement reçu en mathématique? En effet, les débuts de l'enseignement de l'algèbre s'articulent en grande partie sur un «x» qui renvoie à un nombre inconnu spécifique. L'interprétation «étroite»reliée à la lettre relève ainsi d'une certaine réminiscence arithmétique, mais également des premières leçons d'algèbre qui, telle qu'elles se déroulent actuellement, contribuent à renforcer cette conception. Nos résultats de recherche montrent ici la force de ces conceptions qui persistent toujours chez des étudiants adultes.

Enfin, une analyse plus poussée conduit à repérer une autre raison à ce refus de l'égalité posée: «Comment ça comme "x = y"? Ça ne peut pas être égal, c'est deux choses différentes. Des x, c'est des x, puis des y, c'est des y». Dans cette explication, notre étudiant ne fait aucunement référence à un nombre. Le point qu'il souligne concerne davantage la nature des éléments impliqués: «Ça ne peut pas être égal, c'est deux choses différentes». Nous touchons ici la difficulté de bien des étudiants maîtres de faire abstraction de la nature concrète des données. Cet aspect est étudié au point suivant où est examiné le reste de la solution: «2x + 6x = 40» et «8x = 40»; il s'agit d'endroits où cette difficulté s'est manifestée davantage.

5.3 Détachement des significations contextuelles

D'autres sujets vont se fixer sur le reste de la solution:

$$\begin{aligned} 2x + 6x &= 40 \\ 8x &= 40 \end{aligned}$$

«Pourquoi a-t-il mis un "x" (pointe le 6x de l'équation)? C'est comme s'il disait qu'elle a juste acheté des livres, puis elle a acheté des livres puis des disques. Bien, d'après moi, on ne peut pas déranger les livres puis les disques». «Mais il n'a pas tenu compte des deux. Il n'a pas tenu compte des deux disques… Il n'a pas tenu compte des deux catégories. Tu as des livres puis tu as des disques. Les livres coûtent 2 $ puis les disques coûtent 6 $, mais il a tout mis ça dans un paquet». Pour ces étudiants, on ne peut accepter «6x» parce que, «x» étant pour les livres, cette expression renvoie à ce type d'articles et on ne considère plus alors les éléments disques.

Ainsi, avec «6x», on perd en quelque sorte la donnée relative aux disques. Cette difficulté conduit également cette étudiante à ne pas accepter la dernière équation «8x = 40»: «Mais s'il met "8x", il ne pourra pas faire la différenciation, il a tout mis dans le même paquet». Ici, «8x» lui pose problème parce qu'ainsi elle ne peut plus retrouver ce qui a trait à chacune des deux catégories d'éléments concernés.

De plus, pour ces étudiants en formation des maîtres, la lettre «x », dès qu'elle sert à désigner une certaine donnée, ne peut être départie de la nature des éléments auxquels elle renvoie. «S'il est parti avec des disques, il ne peut pas mettre que c'est des livres… Ça, je suis certaine qu'il ne peut pas dire 2x plus 6x, parce qu'il est parti avec des "y". Alors il faut qu'il reste avec des "y"». On voit bien dans ces différents extraits la difficulté qu'éprouvent ces futurs enseignants à prendre une distance vis-à-vis de la nature concrète des éléments.

À travers l'ensemble des entrevues ressort le fait que ce phénomène est assez courant. Le dernier extrait maintenant présenté montre pertinemment la force de ce mode de pensée chez Ève, une étudiante qui, même si elle se rend compte du jeu relationnel en cause, ne peut toujours pas accepter le passage de «2x + 6y = 40» à «2x + 6x = 40». La richesse de cet extrait en justifie la longueur. Des commentaires formulés au fur et à mesure (écrits en italiques) en facilitent la lecture et l'analyse.

1. Ça ne marche pas, de toute façon, il a changé sa variable en cours de route. Il a mis un «x»à la place du «y»(pointe «6x»dans 2x + 6x = 40). Alors, cela lui fait juste des livres, il a oublié ses disques.

2. Comme «x»égale «y», pourquoi il écrit que «x»est égal à «y»? Un livre, ça coûte 2$ et un disque ça coûte 6$, cela ne peut pas s'égaler

Pour elle, ici, la lettre renvoie aux prix des éléments. On retrouve chez elle l'interprétation courante de la multiplication, un certain facteur de répétition fois un taux.

3. Il me semble que cela ne peut pas s'égaler. «x»ne peut égaler «y»parce que, premièrement, un livre, ce n'est pas la même chose qu'un disque. Tu as deux variables, on a appris ça au primaire. Les pommes avec les pommes, les bananes avec les bananes. J'ai appris ça comme ça. Alors, tu ne peux mélanger les deux ensemble. Alors, il faut que tu aies deux variables distinctes.

La nature même des éléments empêche, selon elle, l'utilisation d'une même lettre pour se référer aux données concernant ces objets.

4. Lui, il a dit que son «x» est égal à son «y»… Si tu fais une preuve de ça, tu fais 5 fois 2, 10. Ça donne 40 quand même, mais… Il aurait acheté 5 livres et 5 disques. Ah! Bien oui, le même nombre. Dans le sens que «x» égale «y» parce que la quantité totale c'est son «x». C'est comme s'il avait fait le nombre de livres, c'est «x», puis le nombre de disques, c'est «y». Alors, cela s'égale parce que c'est le même nombre. Ça marcherait son affaire….

Après vérification de la réponse donnée par Jean, Ève se rend compte que les deux lettres renvoient au nombre d'éléments qui, dans cette situation, est le même pour les deux catégories.

5. (Après quelques minutes de réflexion…) Il me semble que tu ne peux pas changer une variable comme ça dans un problème. Ce n'est pas le même prix.

6. Il y a quelque chose qui ne marche pas, parce que le «x», il le prend comme son nombre total, je pense. Il ne le prend pas comme le prix parce qu'il ne pourrait pas dire 2$ égale 6$; cela ne se peut pas.

Son explication montre ici qu'elle a une bonne maîtrise du sens attribuable à 2x et 6x dans cette situation.

7. Mais il me semble que dans une équation comme ça, tu ne peux pas changer ton «x» puis ton «y». Quand tu commences, ton premier énoncé, après ça, il faut que tu la résolves comme ça.

Malgré son interprétation correcte de l'équation «2x + 6x = 40», elle reste ambivalente et résiste à changer «y»pour «x»au cours de la résolution.

8. Intervieweur – Donc, ici, il peut dire ça, «x = y»?

Ève – S'il parle du nombre, pas s'il parle du prix….

Encore ici, elle voit bien que les deux lettres peuvent être égales si elles renvoient au nombre d'éléments qui, dans ce cas, est le même pour les deux types d'éléments; mais, ne peuvent plus l'être en regard de la nature des éléments.

9. Alors, il fait 2 fois ce nombre-là plus 6 fois ce nombre-là, cela va donner 40 (pointe 2x + 6x = 40). Ça va marcher son affaire, mais je ne sais pas s'il peut changer de variable de même, en plein milieu d'un problème. Bien lui, ça change rien qu'il mette un «x» ou un «y». Dans le fond, il aurait pu prendre… il aurait pu juste dire «x». «x», parce que dans le fond, c'est le même nombre. Il n'avait pas besoin de faire ça. Il aurait pu faire 8x.

Elle hésite encore à accepter la substitution d'une lettre par une autre en cours de procédure.

10. Intervieweur – Comment tu l'aurais fait, toi alors?

Ève – Tu dis le même nombre de livres. Alors, le nombre c'est «x», tu n'as pas besoin d'un «y» parce que c'est «x».

Le fait qu'on parle du même nombre d'éléments pour chacune des deux catégories l'amène à voir que la résolution de ce problème peut se faire avec une seule lettre.

11. Bien, tu as besoin d'un «y». Mais dans le fond, ce n'est pas pour la même chose que tu as besoin d'un «y»; c'est parce qu'il y a des livres et il y des disques.

Elle revient sur sa décision; la nature des éléments concernés nécessite l'utilisation de deux lettres distinctes.

12. Mais si tu parles juste du nombre et que tu t'occupes pas de ce que tu as comme élément, que ce soit n'importe quoi, un morceau de linge…

Elle fait de nouveau une distinction pour une procédure engageant le nombre d'éléments.

13. Je pense qu'il est obligé de mettre deux variables parce que ce n'est pas la même chose qu'il calcule.

14. Sauf que c'est le même nombre de pas la même chose!

Cette phrase résume le dilemme dans lequel la place cette situation.

15. Moi, je serais portée à mettre deux variables parce que ce n'est pas la même chose qu'on calcule. Un «x», cela ne peut pas être deux affaires en même temps dans un problème; si tu le prends pour une affaire, tu ne le prends pas pour l'autre.

La nature concrète des éléments impliqués la conduit enfin à ne pas consentir à utiliser une seule lettre pour l'appliquer à des éléments de nature différente.

16. Moi, je l'aurais parti comme cela sûrement: $2x + 6y = 40$. Mais ils disent que c'est le même nombre… Ce que je ne comprends pas, c'est qu'il ait changé cela ici : $2x + 6x = 40$.

Cette dernière équation, qui n'est justifiée qu'en raison de l'abstraction de la nature des éléments auxquels renvoie la lettre»y», déstabilise le sujet.

17. C'est sûr qu'il ne peut pas résoudre son problème juste comme ça (pointe $2x + 6y = 40$)… non, parce qu'il a deux variables. Changer une variable comme ça, il me semble que mes profs me disaient que, quand tu commences avec une variable, il me semble que tu ne peux pas la changer en chemin comme ça.

18. Quand je regarde cela: $2x + 6y = 40$, je vois le nombre de livres fois 2$ plus le nombre de disques fois 6$; cela égale 40$. Mais après ça, $2x + 6x = 40$, c'est comme s'il faisait un nombre de livres fois 2$, un nombre de livres fois 6$, alors le 40$.

Cette dernière phrase montre comment il est difficile pour Ève de se détacher des grandeurs mises en jeu.

19. Moi, j'associe beaucoup les variables avec ce qu'il y a dans le problème. Si le problème avait été, il y a des livres qui coûtent 2$ et une autre sorte de livres qui coûtent 6$.

Cette phrase montre bien que c'est la nature des objets qui la dérange.

20. Mais là, ce n'est pas le même chose. La solution est bonne. Il me semble que tu ne peux pas changer une solution quand tu es déjà parti avec un problème. Ça fait longtemps que je n'ai pas fait d'algèbre, mais il me semble que lorsqu'on partait un énoncé, le premier énoncé du problème, telle variable, telle variable, cela me donne tel résultat. Après ça, tu joues avec ces équations-là, mais tu ne changes pas les variables. Tu n'as pas le droit.

Cet extrait d'entrevue met bien en évidence le dilemme qu'a vécu cette future enseignante. Dès le départ, selon son analyse, la transition de «$2x + 6y = 40$» à «$2x + 6x = 40$» est incorrecte, parce que, ce faisant, il n'est plus question des disques (point 1); pour elle, comme cela se précise dans la suite de l'entretien, la lettre «x» porte en soi un lien inextricable avec la nature des éléments auxquels elle fait référence et ne peut servir à traiter en même temps deux choses distinctes. Dans son interprétation de «$x = y$» (point 2), la lecture qu'elle fait de l'équation renvoie à la conception primitive de la multiplication déjà discutée (un facteur répétitif fois un certain taux), ce qui l'amène à voir dans les lettres les coûts respectifs des objets. La vérification de la solution de Jean (point 4) la conduit ensuite à rectifier cette dernière interprétation: «C'est comme s'il avait fait le nombre de livres, c'est "x", puis le nombre de disques, c'est "y". Alors cela s'égale parce que c'est le même nombre». Cette démarche ne suffit pas pourtant pour qu'elle reconnaisse et accepte qu'il est possible d'utiliser une lettre liée au départ à une catégorie d'éléments pour l'attribuer à une autre catégorie, ce procédé requérant un détachement des grandeurs difficile à réaliser pour elle. Elle fait alors un bon bout de chemin dans la compréhension de la solution; elle en vient même à découvrir que, puisqu'il est question du même nombre d'éléments dans les deux catégories, elle pourrait employer une seule lettre (points 9 et 10). Cette idée est toutefois vite rejetée: «Bien, tu as besoin d'un "y". Mais dans le fond, ce n'est pas pour la même chose que tu as besoin d'un "y"; c'est parce qu'il y a des livres et qu'il y a des disques». Le nœud du problème réside (comme on peut le voir au point 16) dans ce fameux passage de «$2x +6y = 40$» à «$2x + 6x = 40$», où elle perd la nature d'un des types d'éléments. Comme elle nous le mentionne (point 14) en référence au nombre de disques et de livres: «sauf que c'est le même nombre de pas la même chose». Et c'est ainsi qu'elle interprète le second énoncé et ce qui lui cause problème: «Mais après ça, 2x + 6x = 40, c'est comme s'il faisait un nombre de livres fois 2$, un nombre de livres fois 6$». On voit qu'elle ne peut passer du nombre concret au nombre abstrait dégagé de toute signification contextuelle.

Cette dernière situation a permis de mettre en lumière les bases cognitives et conceptuelles sur lesquelles s'appuieront ces futurs maîtres pour intervenir auprès d'élèves dans leur enseignement des débuts de l'algèbre. Certains d'entre eux éprouvent la même difficulté que l'élève fictif en entretenant une interprétation étroite des conventions d'écritures rattachées à la multiplication: un facteur de répétition fois un certain taux. Enfin, plusieurs ont développé des conceptions erronées autour de l'utilisation de la lettre: deux lettres renvoient nécessairement à deux nombres différents et une même lettre ne peut être utilisée pour représenter deux éléments de nature différente. Cette dernière interprétation montre bien l'ampleur de la difficulté qu'ils éprouvent sur le plan cognitif à déployer des raisonnements qui les forcent à se détacher des significations contextuelles dans la résolution de problèmes.

Conclusion

Lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre, les futurs enseignants en adaptation scolaire et sociale rencontrent plusieurs sources de difficultés. Le statut qu'ils accordent au symbolisme semble notamment en cause. En effet, ces apprentis enseignants attribuent aux notations symboliques trois fonctions distinctes: un outil de retranscription de l'énoncé du problème, un outil servant à désigner les grandeurs inconnues en relation deux à deux et un outil de modélisation du problème dont la caractéristique commune consiste à attribuer un rôle essentiellement désignatoire au symbolisme. Le rôle opératoire, c'est-à-dire la possibilité d'utiliser des symboles pour conduire directement des opérations sur eux comme s'ils étaient des grandeurs connues, n'est pas exploité spontanément par ces futurs enseignants. En lien avec chacune de ces fonctions, des erreurs, des difficultés et des conceptions particulières ont été identifiées: conception étiquette de la lettre, transcription littérale conduisant à une inversion des relations dans l'équation, conception de l'équation et rapport à l'algèbre, difficulté à exprimer globalement l'ensemble des relations, difficulté de procéder selon un mode analytique.

Le contrôle que ces futurs enseignants en adaptation scolaire et sociale ont été amenés à conduire sur une solution algébrique fictive a permis de faire émerger les moyens de vérification parfois limités qu'ils mettent en œuvre en raison des lacunes qu'ils éprouvent au niveau de la maîtrise de l'outil algébrique. Des difficultés ont ainsi été identifiées en lien notamment avec la convention implicite d'écriture de la multiplication véhiculée par plusieurs d'entre eux, les conceptions qu'ils ont développées relativement à la lettre et enfin, à la nécessité qu'ils témoignent de recourir aux significations contextuelles pour s'assurer de la justesse des raisonnements.

Ces résultats, jumelés aux constats initiaux relatifs à leur utilisation du symbolisme, soulèvent la question des habiletés de ces futurs enseignants en adaptation scolaire à conduire les interventions didactiques pertinentes et appropriées à ce moment crucial de l'apprentissage des mathématiques qu'est la transition de l'arithmétique à l'algèbre. Il devient nécessaire d'intégrer à la formation de ces futurs enseignants qui leur permettront de développer les connaissances algébriques nécessaires à leur enseignement et de reconstruire un nouveau rapport à l'arithmétique et à l'algèbre.

Références

BEDNARZ, N. et JANVIER, B. (1996).
Algebra as a problem solving tool: Continuities and discontituities with arithmetic. *In* N. Bednarz, C. Kieran et Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Kluwer: The Nedeerlands.

BÉLANGER, M. et ERLANGER, S. (1983).
Interpretations of the equal sign among elementary school children. *In Proceeding of the fifth Annual Meeting of the International group for the Psychology of Mathematics Education,* North American chapter (PME-NA V) (p. 250-258). Montréal.

BOOTH, L.R. (1984).
Children's difficulties in beginning algebra. *The Ideas of Algebra, K-12,* 20-32.

CHARBONNEAU, L. et LEFEBVRE, J. (1996).
Placement and function of problems in algebraic treatise from Diophantus to Viète. *In* N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (p. 155-165). Kluwer: The Nedeerlands.

CHARBONNEAU, L. et LEFEBVRE, J. (1992).
Grandes lignes de l'évolution de l'algèbre: de la pluralité à l'unicité. *In Actes du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre* (p. 7-17). Montréal: CIRADE, Université du Québec à Montréal.

CHEVALLARD, Y. (1989).
Arithmétique, algèbre, modélisation, étapes d'une recherche. Marseille: Publication de l'IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1984).
Le passage de l'arithmétique à l'algèbrique dans l'enseignement des mathématiques au collège : l'évolution de la transposition didactique. *Petit X, 5,* 51-94.

CLEMENT, J. (1982).
Algebra word problem solutions : Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 16-30.

COLLIS, K.F. (1974).
Cognitive development and mathematics learning. Paper presented at the Psychology of mathematics workshop, Center for Science Education, Chelsea College, London.

FISHER, K. (1988).
The students-and-professors problem revisited. *Journal for Research in Mathematics Education,* 260-262.

HERSCOVICS, N. (1989).
Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. *In* S. Wagner et C. Kieran (dir.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (p. 89-106). Hillsdale [NJ] : Lawrence Erlbaum.

KIERAN, C. (1981).
Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 317-326.

LEE, L. et D. WHEELER (1989).
The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 41-54.

MALLE, G. (1990).
Semantic problems in elementary algebra. Proceeding of BISME-2, Bradislava. P.37-57.

PYCIOR, H.M. (1984).
Internalism, externaism, and beyond : 19th Century British algebra. *Historia mathematica, 11*, 424-441.

RADFORD, L. (1993).
Le raisonnement algébrique dans la résolution de problèmes écrits. *In Actes du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre* (p. 45-64). Montréal : CIRADE, Université du Québec à Montréal.

RADFORD, L. (1996).
The role of geooometry and arithmetic in the development of algebra : historical remarks from a didactic perspective. *In* N. Bernarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching* (p. 39-53), Kluwee : The Nedeerlands.

ROSNICK, P. et CLEMENT, J. (1980).
Learning without understanding : The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 3-27.

SCHMIDT, S. (1996).
La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une fructueuse articulation entre arithmétique et algèbre. *La revue des sciences de l'éducation, XXII*(2), 295-320.

SCHMIDT, S. (1994).
Le passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes. Thèse de doctorat, département des sciences de l'éducation, Université du Québec à Montréal.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. (1989).
Problématisation des notions d'obstacles épistémologiques et de conflits sociocognitifs dans le champ pédagogique. *In* N. Bednarz et C. Garnier (dir.), *La construction des savoirs* (p. 350-363). Montréal : Agence d'Arc.

Abstract – This paper deals with the difficulties experienced by student teachers in school adjustment and social adjustment when they switch from arithmetic to algebra. Using one-on-one interviews, the paper highlights the status assigned to the symbolic by some of the student teachers, and their control of algebraic solutions. Among other things culled from the interviewees' comments are the meanings they assign to letters and equations and the distance they can or cannot place between themselves and situated meanings. The findings suggest avenues of approach for education in mathematical didactics (mathematical instructional science).

Resumen – Este estudio trata acerca de las dificultades que los futuros profesores de adaptación escolar y social experimentan cuando pasan de la aritmética al algebra. Las entrevistas individuales, ponen en evidencia el estatuto acordado a los símbolos por algunos de ellos, y el tipo de control que ejercen sobre una solución algebraica. De los comentarios se pueden extraer, entre otros, el sentido que los futuros profesores acuerdan a la letra, a la ecuación, y la capacidad a distanciarse de las significaciones contextuales de las cuales son capaces o no. Los resultados indican algunas pistas de intervención para la formación en didáctica de las matemáticas.

Resümee – Diese Untersuchung befasst sich mit den Schwierigkeiten, mit denen künftige Lehrer im Bereich schulischer und sozialer Anpassung konfrontiert werden, wenn Sie den Übergang von der Arithmetik zur Algebra vollziehen wollen. Ausgehend von Einzelinterviews wird die Funktion untersucht, die für manche Lerner die mathematischen Symbole einnehmen sowie die Art der Kontrolle, über die die Lerner bei algebraischen Lösungen verfügen. Aus den Schülerkommentaren geht u.a. hervor, welche Bedeutung der Unbekannten und der Gleichung beigemessen werden und in wieweit die Lerner fähig sind, Abstand zu gewinnen von Bedeutungen, die an den Kontext gebunden sind. Aus den Resultaten ergeben sich Interventionsmöglichkeiten für die Lehrerausbildung im Bereich der Mathematik-Didaktik.

Annexe

Problèmes de l'épreuve écrite

Problèmes algébriques

Problème «Les raquettes»– 3 raquettes de tennis et 4 raquettes de badminton coûtent 184$. Quel est le prix d'une raquette de badminton si celle-ci coûte 3$ de moins qu'une raquette de tennis?

Problème «Le congrès»– 208 représentants de plusieurs régions du monde étaient présents au dernier congrès international sur l'usage des drogues anabolisantes chez les sportifs. Il y avait trois fois plus d'Américains que d'Asiatiques et 16 Européens de moins que le nombre d'Américains. Peux-tu trouver combien chaque délégation comportait de représentants?

Problème «Les deux trains»– Il y a 576 passagers à transporter entre deux villes. On dispose de deux trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre, uniquement des wagons à 16 places. En supposant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons à chacune des deux locomotives?

Problème «Luc et Michel»– Luc a 3,50$ de moins que Michel. Luc double son montant d'argent tandis que Michel augmente le sien de 1,10$. Maintenant, Luc a 0,40$ de moins que Michel. Combien avaient-ils chacun au départ?

Problèmes arithmétiques

Problème «Le cours de biologie»– Le cours de biologie regroupe 140 élèves. Certains élèves sont au laboratoire, d'autres à la salle de projection, et les autres font un travail de recherche à la bibliothèque. Il y a deux fois plus d'élèves qui sont à la salle de projection qu'au laboratoire, et il y a 20 élèves de moins à la bibliothèque qu'à la salle de projection. Sachant qu'il y a 44 élèves à la bibliothèque, combien y a-t-il d'élèves au laboratoire et à la salle de projection?

Problème «L'âge»– Dans 10 ans, Rolland sera deux fois plus âgé que Paul. Si Rolland a aujourd'hui 30 ans, quel âge Paul a-t-il présentement?

Problème «Chandails et blousons»– M. Beaulieu paie 2 495$ pour l'achat de chandails et de 11 blousons. Le prix d'un chandail est 85$ de moins que celui d'un blouson. Sachant qu'un blouson coûte 150$, combien a-t-il acheté de chandails?

Problème «Le bassin»– Pour remplir un bassin d'une capacité de 400 litres, on ouvre en même temps un premier robinet qui alimente le bassin et un second qui sert à le vider. Dans ces conditions, il faut 40 minutes pour remplir le bassin. Combien le second robinet déverse-t-il de litres à la minute, le premier robinet déversant 24 litres à la minute?