Éducation et francophonie

Quand additionner ou soustraire implique de comparer
When adding or subtracting involves comparing
Cuando sumar o restar implica comparar

Lucie DeBlois

Volume 25, numéro 1, printemps 1997

L'apprentissage et l'enseignement des sciences et des mathématiques dans une perspective constructiviste

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1080652ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1080652ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Association canadienne d'éducation de langue française

ISSN

0849-1089 (imprimé)
1916-8659 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

DeBlois, L. (1997). Quand additionner ou soustraire implique de comparer. *Éducation et francophonie*, *25*(1), 111–129. https://doi.org/10.7202/1080652ar

Résumé de l'article

Cet article étudie le développement de la compréhension d'un sens particulier des opérations d'addition et de soustraction. Nous nous sommes intéressée plus particulièrement aux problèmes de comparaison. La méthode utilisée privilégie un échange entre une adulte et une enfant. Cette discussion a permis de déterminer comment évoluent les représentations mentales, les procédures et les réflexions de trois enfants de 9 ans. Ces enfants ont été reconnues comme étant en difficulté d'apprentissage en mathématiques par leur enseignante. Cette étude nous permet d'améliorer notre compréhension du phénomène de l'apprentissage chez des élèves qui éprouvent des difficultés. Le cas échéant, elle permet de donner les balises d'un accompagnement qui faciliterait le développement de la compréhension pour ce type de problèmes.

Quand additionner ou soustraire implique de comparer

Lucie DEBLOIS
Université Laval, Québec, Canada

RÉSUMÉ

Cet article étudie le développement de la compréhension d'un sens particulier des opérations d'addition et de soustraction. Nous nous sommes intéressée plus particulièrement aux problèmes de comparaison. La méthode utilisée privilégie un échange entre une adulte et une enfant. Cette discussion a permis de déterminer comment évoluent les représentations mentales, les procédures et les réflexions de trois enfants de 9 ans. Ces enfants ont été reconnues comme étant en difficulté d'apprentissage en mathématiques par leur enseignante. Cette étude nous permet d'améliorer notre compréhension du phénomène de l'apprentissage chez des élèves qui éprouvent des difficultés. Le cas échéant, elle permet de donner les balises d'un accompagnement qui faciliterait le développement de la compréhension pour ce type de problèmes.

ABSTRACT

When adding or subtracting involves comparing

Lucie DEBLOIS
Laval University, Québec, Canada

This article is a study of the development of the understanding of a particular sense in the operations of addition and substraction. We concentrated particularly on compare problems. The method used favours an exchange between an adult and a child. Through this discussion, we were able to determine how mental representations, procedures and reflections developed in three nine-year-old children. These children were singled out by their teacher as experiencing difficulty in learning mathematics. This study allows us to better understand how children with problems go about learning. Where necessary, it allows us to point the way to facilitating the development of understanding for this type of problem.

RESUMEN

Cuando sumar o restar implica comparar

Lucie DEBLOIS
Universidad Laval, Quebec, Canadá

Este artículo estudia el desarrollo de la capacidad de discernir un significado particular de las operaciones de suma y resta. Nos interesamos particularmente a los problemas de comparación. El método empleado privilegia un intercambio entre un adulto y un niño. Esta discusión permite comprender como se transforman las representaciones mentales, los procesos y las ideas de tres niños de 9 años. Esos niños fueron identificados por sus maestros por presentar problemas de aprendizaje de matemáticas. Este estudio nos permite afinar nuestra comprensión del fenómeno del aprendizaje entre los alumnos que presentan dificultades. En última instancia, este estudio permite fijar los márgenes del acompañamiento que apoyará el desarrollo de la capacidad de discernir este tipo de problemas.

Introduction

Nous nous sommes intéressée à l'étude de la démarche d'apprentissage de trois enfants reconnues comme étant en difficulté en mathématiques. Cette préoccupation nécessite que nous nous écartions des modèles médicaux ou portants sur des préalables à l'apprentissage qui ont souvent été utilisés avec ces élèves. Elle nous amène aussi à privilégier le point de vue de l'apprentissage tout en tenant compte de connaissances développées pour les situations à proposer et ses composantes (Rosenthal et Resnick, 1974; Nesher, 1982; Carpenter et Moser, 1982, 1983; Carpenter, Hierbert et Moser, 1981; Riley, Greeno et Heller, 1983; Fayol et Abdi, 1986; Fayol, Abdi et Gombert, 1987; Fayol, 1990). La perspective constructiviste nous permet de nous attarder au développement de la compréhension de concepts, du point de vue de l'apprentissage. Nous choisissons de limiter notre domaine d'exploration au champ conceptuel des structures additives (Vergnaud, 1991), plus particulièrement aux situations de comparaison.

Le champ conceptuel des structures additives intègre des situations qui impliquent une addition ou une soustraction. Le développement de la compréhension des situations d'ajout et de retrait d'éléments, de réunion et de complément d'ensembles et, enfin, de comparaison d'ensembles contribue ainsi à l'élaboration de la compréhension des opérations d'addition et de soustraction. Nous avons choisi de nous attarder, dans cet article, aux problèmes de comparaison d'ensembles. Plusieurs études se sont intéressées à différents aspects relatifs à ces problèmes (Briars et Larkin, 1984; Riley et Greeno, 1988; Stern, 1993; Verschaffel, 1994). Ces études ont décrit les procédures utilisées par les élèves. Le but poursuivi par notre étude est l'identification des représentations mentales qui enclenchent les procédures des élèves, car nous savons que la coordination, entre ces représentations et les procédures, nous permet de comprendre les réflexions construites par les élèves (Piaget, 1977). Ainsi, nous devenons en mesure de reconnaître tant les filiations que les difficultés que les élèves doivent surmonter. Nous pourrons, éventuellement, proposer des balises pour guider l'intervention orthopédagogique. À cet effet, la méthode utilisée nous invite à apprécier l'apport de l'accompagnement à offrir durant cette construction des compréhensions.

Notre conception de l'apprentissage

Nous nous intéressons à l'élaboration de compréhensions chez l'élève. La perspective constructiviste nous amène à définir l'apprentissage comme étant une construction personnelle des connaissances chez un individu. Selon Piaget (1975), le contact de l'enfant avec une information nouvelle amène une interprétation à partir de ses connaissances. Il s'agit ici d'un moment d'assimilation. La nouveauté du concept ou l'écart qui sépare les connaissances antérieures de ce concept pourra créer une déformation plus ou moins importante. La prise de conscience, par l'élève, d'une différence entre ses connaissances et la nouvelle connaissance crée un inconfort. Ce dernier suscite alors une réorganisation des connaissances menant vers un nouvel équilibre. Toutefois, dans le cas où une trop grande différence apparaît entre les connaissances antérieures de l'élève et l'information nouvelle, l'adaptation devient difficile, voire impossible. D'où l'importance du concept de zone de développement proche de Vygotski (1985). Ainsi, comment interpréter l'affirmation d'une enfant de 9 ans qui nous dit que 2 x 5 = 50? Une telle affirmation ne vient pas uniquement du hasard. L'enfant explique, à ma demande, que 2 x 5 = 2 + 5. Elle ajoute : « 2 x 5 = 50, ça ne marche pas, c'est 5 + 5. Elle conclura que 5 + 5 = 50 parce qu'initialement il s'agissait de 2x5 et qu'une multiplication est « plus grande » qu'une addition. Ainsi 5 x 5 = 50 et 2 x 5 = 50. L'écart, entre sa compréhension intuitive (une multiplication est plus grande qu'une addition) et la formalisation présentée 2 x 5, ne lui permet pas de réorganiser ses connaissances. Nous voyons s'emmêler la recherche d'une relation entre addition et multiplication, où interviennent des formalisations mathématiques (2 x 5 = 2 + 5 = 5 + 5), sans qu'un sens apparaisse pour les symboles x, +.

Quel type de construction une élève considérée comme étant en difficulté d'apprentissage par son enseignante réalise-t-elle dans des situations de comparaison? Dans les écoles, les enfants identifiés en difficulté d'apprentissage réussissent certaines tâches et en échouent d'autres, que nous croyons semblables. En effet, dans certains cas, les élèves créent des relations entre leurs connaissances antérieures qui permettent des réussites. Toutefois, ces réussites sont situées dans des contextes particuliers. En modifiant un élément du contexte, l'élève est souvent incapable de résoudre le problème posé. Nous dirons (DeBlois, 1996, 1997) que les élèves manifestent une structuration partielle de leurs connaissances. Il faudra, à l'élève, une bonne dose de confiance pour accepter de modifier ses compréhensions, puisqu'elles permettent la résolution de certains problèmes.

La résolution de problèmes – le cas des situations de comparaison d'ensembles

Les études de Verschaffel (1994) et de Riley et Greeno (1988), entre autres, précisent la difficulté des situations de comparaison. Premièrement, contrairement aux problèmes qui sont habituellement présentés aux enfants, ceux-ci impliquent une situation statique, c'est-à-dire une situation dans laquelle n'intervient aucune transformation du type enlever, ajouter ou acheter. Une deuxième difficulté relève de la recherche en question. Trois formes différentes peuvent se présenter. Dans le premier cas, on demande de chercher **la différence** entre deux ensembles alors qu'on donne le nombre d'éléments pour chacun. Par exemple : *Tu as X autocollants. Ton ami a Y autocollants. Combien d'autocollants as-tu de plus (ou de moins) que ton ami?* Dans le deuxième cas, on cherche **l'ensemble comparé**. Ainsi, on propose : *Tu as X cartes de hockey. Ton ami a Y cartes de hockey de plus que toi. Combien ton ami a-t-il de cartes de hockey?* Ou encore : *Tu as X autos dans ta boîte à jouets. Ta voisine a Y autos de moins que toi. Combien ta voisine a-t-elle d'autos dans sa boîte à jouets?* Dans le dernier cas, on cherche **l'ensemble de référence**. On pourra présenter ce type de situation : *Tu as X billes. Tu as Y billes de plus que ton ami. Combien de billes ton ami a-t-il? Ou encore : Tu as X crayons de couleur. Tu as Y crayons de couleur de moins que ton professeur. Combien de crayons ton professeur a-t-il?*

Enfin, une formulation appelée « consistante ou inconsistante ». Verschaffel (1994) ajoute à la difficulté. La première formulation implique que la relation (de plus), permettant de retrouver l'ensemble inconnu, est consistante avec l'opération à réaliser (l'addition). Par exemple, on parlera de formulation consistante dans le cas suivant : *Tu as X cartes de hockey. Ton ami a Y cartes de hockey de plus que toi. Combien ton ami a-t-il de cartes de hockey? Dans le second type de formulation, on dira plutôt : Tu as X crayons de couleur. Tu as Y crayons de couleur de moins que ton professeur. Combien de crayons ton professeur a-t-il?* On appelle ainsi l'opération d'addition en utilisant la relation « de moins ».

Un modèle de développement de la compréhension

Herscovics et Bergeron (1989) ont réalisé une analyse du concept de l'addition. Cette analyse a été réalisée à partir d'expérimentations réalisées auprès d'élèves qui ne présentent pas de problèmes particuliers en mathématiques. Les compréhensions intuitive, procédurale, abstraite et formelle ont été décrites par l'identification de critères. En nous appuyant sur cette analyse, nous pouvons poser quelques hypothèses relativement aux représentations mentales initiales de l'élève, aux procédures utilisées et aux réflexions à construire dans des situations de comparaison.

À titre d'hypothèses, nous pourrons voir l'élève reconnaître, qualitativement, l'ensemble qui contient le plus ou le moins d'éléments. Ce critère correspond à la composante intuitive du modèle de Herscovics et Bergeron (1989). Des procédures comme la correspondance terme à terme et le dénombrement pourront apparaître. L'étude de Therrien (1993), menée auprès d'une classe d'élèves de 6 ans, permet d'ailleurs de constater que la procédure qui suscite le plus de réussites dans les problèmes de comparaison est la correspondance terme à terme entre les éléments des deux ensembles, ce qui est confirmé par l'étude de Stern (1993). Cette analyse conceptuelle (Herscovics et Bergeron 1989), adaptée aux situations de comparaison, nous permet d'ajouter que le dénombrement, appelé aussi le comptage, jouera un rôle important. Les travaux de Fuson (1988, 1991) nous ont permis d'en apprécier l'importance. Enfin, les réflexions qui pourraient émerger, toujours d'après cette analyse conceptuelle, sont relatives à la reconnaissance de la relation de différence entre les ensembles à comparer et à celle de la réversibilité de la relation « de plus » et « de moins ». De nouvelles représentations initiales, d'autres procédures pourront laisser émerger de nouvelles réflexions. L'identification de ces dernières pourrait contribuer à une meilleure compréhension de l'appropriation des connaissances chez des élèves qui éprouvent des difficultés.

Cette étude cherche donc à répondre à la question suivante : *Quelles sont les représentations mentales et les procédures que trois enfants en difficulté d'apprentissage coordonnent pour construire leurs réflexions dans des situations de comparaison?*

Oui, mais comment…

Chacune des élèves a été reconnue comme étant en difficulté en mathématiques par son enseignante, plus particulièrement en résolution de problèmes. Les trois élèves viennent d'écoles différentes. Cependant, les enseignantes de chacune des trois élèves utilisent la collection *Espace mathématique* (1989) avec leurs élèves. Il est opportun de noter que, pour les besoins de cet article, les prénoms des enfants ont été changés.

Une rencontre entre la chercheuse et les orthopédagogues a permis de discuter du cadre théorique qui a servi de toile de fond à cette recherche. Cette façon d'intervenir est nouvelle pour les orthopédagogues qui participent au projet. Ces dernières considèrent donc qu'elles se donnent ainsi un perfectionnement tout en cherchant à susciter le développement d'une compréhension chez l'élève. Le but de la chercheuse est d'étudier comment s'élabore la compréhension sous l'influence de ce type d'intervention. Un protocole, pour les entrevues d'évaluation et d'intervention, a ensuite été proposé aux trois orthopédagogues. C'est ce que nous présentons maintenant.

Une entrevue d'évaluation, où les questions posées portaient sur les habiletés de comptage, la compréhension de l'écriture des nombres et la résolution de situations d'ajout et de réunion, a permis de confirmer le dépistage réalisé par l'enseignante. Le détail de ces entrevues est déjà publié (DeBlois, 1997). Ainsi, nous ferons un résumé des éléments que nous jugeons indispensables au lecteur et à la lectrice, et ce, pour chacune des élèves.

Durant les entrevues d'intervention, les orthopédagogues ont adapté les nombres selon les connaissances et les habiletés de comptage observées durant l'évaluation. Ainsi, dans le cas où une enfant ne peut compter plus de 38 bâtonnets, on proposera des situations où les sommes ou les différences n'excèdent pas ce nombre. Si l'enfant ne peut lire ou écrire les nombres plus grands que 69, les situations proposées ne pourront en faire mention. De plus, les acteurs de chacune des situations impliquent des personnes connues de l'élève (son enseignante, son frère…).

Les situations de comparaison ont été présentées verbalement. Toutefois, ces dernières étaient aussi écrites sur une carte que l'enfant pouvait consulter au besoin. Après avoir fait la lecture de la situation à l'enfant, nous proposions de lui demander de la raconter dans ses mots. Des jetons, des enveloppes, des bâtonnets et des élastiques étaient à la disposition de l'enfant afin qu'il puisse illustrer la situation et expliquer ses procédures. On pouvait aussi fabriquer du matériel avec l'enfant si cela s'avérait nécessaire.

Nous avons proposé 18 situations différentes aux enfants. Parmi ces situations, six étaient des situations d'ajout ou de retrait d'éléments, six étaient des situations de réunion ou de complément d'ensembles et six étaient des situations de comparaison. Les types de situations alternaient pour chacune des rencontres. On proposait une ou deux situations par rencontre. Ces dernières avaient lieu chaque semaine. Elles étaient d'une durée de 30 à 40 minutes. Rappelons que les nombres ont été choisis par l'orthopédagogue en fonction des habiletés de comptage et de la familiarité de l'élève avec les nombres durant l'entrevue d'évaluation initiale.

Voici les six situations de comparaison que nous étudions dans cet article.

1. Tu as X autocollants. Ton ami a Y autocollants. Combien d'autocollants as-tu de plus que ton ami? (recherche d'une différence)
2. Tu cueilles X fleurs pour faire un bouquet. Ta voisine cueille Y fleurs. Combien ta voisine a-t-il cueilli de fleurs de moins que toi? (recherche d'une différence)
3. Tu as X cartes de hockey. Ton ami a Y cartes de hockey de plus que toi. Combien ton ami a-t-il de cartes de hockey? (recherche de l'ensemble comparé)
4. Tu as X autos dans ta boîte à jouets. Ta voisine a Y autos de moins que toi. Combien ta voisine a-t-elle d'autos dans sa boîte à jouets? (recherche de l'ensemble comparé)
5. Tu as X billes. Tu as Y billes de plus que ton ami. Combien de billes ton ami a-t-il? (recherche de l'ensemble de référence)
6. Tu as X crayons de couleur. Tu as Y crayons de couleur de moins que ton professeur. Combien de crayons ton professeur a-t-il? (recherche de l'ensemble de référence)

Chacune des interventions commençait par *la situation de comparaison suggérée*. Cette dernière était accompagnée des *réponses possibles* des enfants et d'un *questionnement* destiné à guider l'orthopédagogue. Ce questionnement, élaboré à partir des hypothèses mentionnées ci-dessus, était autant de pistes de réflexion ou d'exploration que nous proposions à l'orthopédagogue de soumettre à l'enfant. Voici les questions qui pouvaient être proposées :

- Qui a le plus d'autocollants?
- Montre-moi comment tu fais pour savoir?
- Montre-moi ce que vous avez « de pareil » tous les deux?
- Montre-moi les autocollants que tu as en plus. Combien cela fait-il?
- Comment as-tu fait pour trouver?
- Combien ton ami a-t-il d'autocollants de moins (ou de plus) que toi?
- Qu'as-tu fait pour trouver ce qu'il a en moins (ou en plus)?

Puisque la démarche de l'enfant servait de guide, ce questionnement n'a pas été suivi selon un ordre linéaire. De nouvelles questions ont ainsi pu émerger. Chacune des entrevues a été filmée sur vidéo. Une transcription verbatim a été réalisée. L'analyse qui a suivi s'est appuyée sur ces documents

Les résultats

Étude de cas de Karoline

Karoline a 9 ans. Elle est en troisième année dans une classe « régulière ». Elle a repris une année scolaire. On pense à un classement en classe spécialisée pour elle l'année suivante. Nous sommes au mois de janvier. Le détail de l'évaluation de Karoline est publié (DeBlois, 1997). Rappelons seulement que ses habiletés de comptage sont rudimentaires. Sa compréhension de l'écriture des nombres pose problème. Son enseignante souligne sa difficulté à résoudre des problèmes en classe, difficulté qui est présente depuis qu'elle est en première année. Elle a plutôt l'habitude de « mettre ensemble » les nombres d'un problème. Comme prévu, les premières rencontres ont porté sur des situations d'ajout et de retrait, de réunion et de complément. Nous avons ensuite proposé les situations de comparaison.

SITUATION 1

Tu as 24 autocollants. Ton ami a 8 autocollants. Combien d'autocollants as-tu de plus que ton ami?

Karoline trouve d'abord 32 comme résultat. La représentation mentale initiale porte sur les nombres vus comme les représentants d'une quantité. Toutefois, à ce moment, la procédure privilégiée est la réunion. En effet, elle explique : *« Je vais faire 24 plus 8. »* Elle ajoute : *« Cela fera 32 autocollants. »* Un questionnement au sujet de l'ensemble le plus grand permet à Karoline d'intégrer, à cette représentation mentale, la relation entre les données. Karoline utilise ensuite une nouvelle procédure : la correspondance terme à terme. La réflexion élaborée porte sur la notion de différence. Elle explique : *« Parce que j'ai 24 autocollants, puis pour qu'ils soient presque égaux, j'en ai fait 8 à 8 »... « Puis après j'ai dit combien d'autocollants as-tu de plus que ton ami. J'ai dit 16 ».* La reconnaissance d'une différence amène une procédure de dénombrement, ce qui permet de trouver une solution juste : 16.

Toutefois, ce résultat est assimilé à un retrait. En effet, l'enfant reconnaît les 16 autocollants qui restent, mais elle éprouve soudainement de la difficulté à s'exprimer. Elle raconte que les 16 autocollants sont ceux qu'elle garde, puis qu'elle a fait ça (enlever) pour savoir ce qui est égal. C'est la répétition de la question de départ, qui permet à Karoline de dire qu'elle a trouvé les 16 qu'elle a de plus que son ami. Toutefois, elle émettra à nouveau des doutes quant au retrait (*« elle* [la petite fille] *voulait peut-être pas les donner »*).

Une deuxième réflexion surgit au sujet du type de différence. Karoline joue avec les expressions « de plus » et « de moins », ce qui implique une capacité à changer de perspective. Cette flexibilité de la pensée est issue d'un retour vers une illustration de la situation et du dénombrement des éléments en plus. L'explication qui résume l'ensemble de sa démarche demeure confuse; toutefois, elle réutilise ces connaissances pour résoudre une situation semblable où les nombres 15 et 9 ont été utilisés.

La correspondance terme à terme suscite donc, comme nous nous y attendions, la résolution du problème. Lorsqu'elle doit expliquer pourquoi elle a utilisé cette procédure, on voit apparaître chez Karoline une confusion entre les situations de retrait et de comparaison et entre la relation de plus et de moins. *L'influence des situations plus familières de retrait est donc importante.*

SITUATION 2

Tu cueilles 14 fleurs pour faire un bouquet. Ta voisine cueille 8 fleurs. Combien ta voisine a-t-elle cueilli de fleurs de moins que toi?

Cette deuxième situation de comparaison, où on cherche une différence en utilisant le mot « de moins », amène Karoline à illustrer la situation par deux ensembles. Elle trouve 6 comme résultat. Les représentations mentales initiales portent maintenant à la fois sur les quantités et sur la relation de comparaison, avec lesquelles Karoline coordonne d'abord une procédure de correspondance terme à terme, puis un dénombrement. En effet, elle forme un ensemble de 14 bâtonnets, puis un ensemble de 8 bâtonnets. Elle dénombre alors 8 des 14 bâtonnets de son ensemble et retrouve facilement les 6 fleurs que sa voisine a cueillies en moins. La réflexion qui surgit de cette coordination porte sur le sens du résultat obtenu. *Cette réflexion est d'abord assimilée au reste avant d'être vue comme une différence.* L'écriture de la phrase mathématique ne semble pas poser de problème. L'orthopédagogue propose à l'élève une situation où les nombres sont plus grands : 35 et 26. Karoline explique qu'en comparant les deux ensembles elle trouve ce qu'il y a de plus ou de moins. Cela nous laisse croire à un développement de sa compréhension.

Il est à noter que l'opération de soustraction est peut-être plus facile à coordonner avec l'expression de la relation de moins. Notons, cependant, qu'il peut y avoir ensuite une compréhension erronée lorsque l'expression « de plus » sera employée. La discussion qui a suivi nous a d'ailleurs informée à ce sujet.

SITUATION 3

Tu as 42 cartes de hockey. Ton ami a 12 cartes de hockey de plus que toi. Combien ton ami a-t-il de cartes de hockey?

Devant cette troisième situation de comparaison, Karoline n'utilise pas de matériel. Elle écrit immédiatement la phrase mathématique. La représentation mentale initiale semble porter sur la relation « de plus ». Elle s'y attarde. La procédure utilisée est l'algorithme traditionnel de l'addition. Elle écrit 42 + 12 = 54 en expliquant que, si son ami a 12 de plus, elle doit faire un plus. Cette coordination n'a pas été mise en doute, ce qui ne nous permet pas d'apprécier la réflexion qui a pu naître. Le type de recherche impliquée ne semble pas lui poser de problème. L'expression « de plus » semble induire l'opération à utiliser.

SITUATION 4

Tu as 54 autos dans ta boîte à jouets. Ta voisine a 42 autos de moins que toi. Combien ta voisine a-t-elle d'autos dans sa boîte à jouets?

Cette situation amène immédiatement Karoline à réaliser une soustraction. La représentation mentale initiale porte sur les nombres et sur la relation « de moins ». En effet, elle raconte qu'elle a 54 autos et que son amie a 42 autos, puis 42 de moins qu'elle. Elle y coordonne une procédure de soustraction selon l'algorithme traditionnel. Elle écrit 54 - 42 = 12 autos. La réflexion qui émerge de la coordination, entre ces représentations mentales et l'opération de soustraction, porte sur le sens du résultat obtenu. *Karoline assimile le résultat à une différence, ce qui correspond aux situations* *précédentes*. Elle éprouve beaucoup de difficulté à concevoir que le résultat obtenu correspond à l'ensemble comparé. Ainsi, la solution est correcte, mais la réflexion sur l'interprétation du résultat est à construire. *Karoline est donc en mesure de réussir, mais sa compréhension de la situation et du résultat est encore rudimentaire*.

SITUATION 5

Tu as 14 billes. Tu as 5 billes de plus que ton ami. Combien de billes ton ami a-t-il?

Cette cinquième situation, où l'on cherche l'ensemble de référence avec l'opération de soustraction, implique une formulation inconsistante. Karoline croit que son ami a 5 billes. *La représentation mentale initiale est donc masquée par la formulation de la relation*. En effet, la relation exprimée est d'abord assimilée au cardinal du deuxième ensemble, ce qui correspond aux premières situations de comparaison. Un retour au nombre 14, représenté par un ensemble d'éléments, invite à une procédure de prélèvement. Cette procédure la confond. Elle ne sait pas exprimer son résultat. C'est par un retour à une illustration de deux ensembles de 14 que Karoline observe qu'elle « a mis [les ensembles] égaux ». De cette coordination surgit une comparaison, puis une soustraction. Elle peut montrer les 5 billes qu'elle a de plus. Elle écrit 14 - 5 = 9, puis justifie la relation « de plus » en utilisant la relation « de moins ».

Le jeu de relation entre les expressions de plus et de moins lui permet une réflexion où intervient un changement de perspective. Son ami a 5 billes de moins qu'elle, parce qu'elle en a 5 de plus, explique-t-elle. Sa justification est claire, ce qui est nouveau. Elle exprime une capacité à changer de perspective et ainsi une flexibilité de sa pensée.

SITUATION 6

Tu as 8 crayons de couleur. Tu as 5 crayons de couleur de moins que ton professeur. Combien de crayons a ton professeur?

Karoline croit que son professeur a 5 crayons. Le jeu de relations entre les expressions « de plus et de moins » devient ici une réflexion sur laquelle doit s'élaborer une nouvelle procédure pour résoudre ce type de situation. La représentation mentale initiale assimile la relation « 5 de moins » au cardinal du deuxième ensemble. Elle explique qu'elle a 8 crayons, que son professeur en a 5. La difficulté semble provenir du fait qu'elle doit à la fois s'appuyer sur une interprétation souple de l'expression utilisée et ajouter des éléments à un des ensembles. En effet, cet ajout d'objets ne vient d'aucun des deux ensembles connus. En utilisant la relation « de plus », l'orthopédagogue lui permet de résoudre le problème. Karoline reconnaît d'abord qu'elle a « 3 de plus », puis que son professeur a « plus de crayons », mais elle ne change pas tout de suite son illustration. Elle montre toujours les 5 crayons de son professeur. Elle construit une nouvelle réflexion au moment où elle doit décider ce qu'il faut faire pour que son professeur en ait un, deux... de plus, et ainsi de suite. *L'explication demeurera confuse, mais l'écriture de la phrase mathématique est correcte*. Karoline écrit ensuite 8 - 5 = 3.

Étude de cas de Karine

Karine est en troisième année. Elle démontre des habiletés dans le comptage par 1, par bonds ou à rebours, malgré ses erreurs occasionnelles. En effet, il lui arrive de sauter des nombres. Elle lit et écrit des nombres sans problème. Elle illustre les nombres et reconnaît l'invariance de la quantité par rapport à la disposition. Elle peut représenter les nombres de différentes façons. Elle éprouve toutefois des difficultés à résoudre des problèmes qui impliquent l'addition et la soustraction, plus particulièrement dans les cas où apparaissent des termes manquants. Les entrevues ont lieu entre les mois de janvier et de mai.

SITUATION 1

Tu décides d'aller te chercher 33 autocollants. Toi, tu en as 33 et ton ami en a 17. Montre-moi les autocollants que tu as en plus. Qu'est-ce que tu peux faire pour me montrer les autocollants que toi tu as de plus?

Cette situation a été présentée en deux étapes. Une première qui s'arrête à l'illustration des deux ensembles, une deuxième où l'on pose la question au sujet de la différence. Cela amène Karine à se concentrer sur les nombres 33 et 17. Ce n'est que par la suite qu'on attire son attention sur la relation entre les nombres. Ainsi, inévitablement, sa représentation mentale initiale porte sur les nombres. Ces derniers représentent bien des quantités. Des arrêts fréquents, causés par une difficulté dans ses habiletés de comptage, interviennent. En effet, elle compte 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, sans se rendre compte de la modification apportée à la régularité du comptage par deux.

En comparant ensuite les nombres 17 et 33, Karine est incapable de jouer avec la relation « de plus ». On propose des nombres plus petits. La comparaison entre la « grandeur » des nombres, déjà utilisée, mène vers une comparaison de la « longueur » des rangées, ce qui est curieux compte tenu de sa compréhension de l'invariance du nombre par rapport à la disposition des éléments. Elle échoue, donc, dans un premier temps, à établir une correspondance terme à terme.

On tente de susciter une nouvelle représentation mentale, sur la relation entre les ensembles, en invitant Karine à comparer qualitativement les deux ensembles pour retrouver le plus grand. La fillette retranche alors 7 jetons de l'ensemble de 13 et trouve les 6 jetons. *À partir de cette procédure, elle trouve une solution satisfaisante. Toutefois, aucune réflexion sur la notion de différence n'émerge.*

SITUATION 2

Maintenant, j'vais te demander de prendre 14 fleurs pour toi, et ton frère lui, il va en avoir 8. Combien ton frère a-t-il cueilli de fleurs de moins que toi?

À nouveau, on ne pose pas immédiatement le problème de recherche de la différence. La présentation de cette situation se réalise donc en deux étapes. Karine fait un ensemble de 14 et un autre de 8. Elle sépare 8 jetons parmi les 14 du premier ensemble, pour trouver 6. Ainsi, sa représentation mentale initiale porte sur les nombres. Ceux-ci sont illustrés par des jetons, ce qui est la manifestation d'une compréhension du nombre comme étant le représentant d'une quantité. La correspondance terme à terme est établie. La réflexion de Karine porte ensuite sur l'association entre un ensemble et un des acteurs de la situation, sans pour autant porter sur la notion de « différence » entre la quantité de fleurs de son frère et la sienne. *« Parce que, ben mon frère en a cueilli 8… J'n'ai cueilli 14, pis j'n'ai perdu 8 fleurs… J'les ai données… À ma mère… Pis, y m'restait 6 fleurs ». Elle termine en disant : « J'viens tout mélangée ».*

Sans une réflexion sur la différence, le résultat obtenu demeure assimilé à une situation de retrait, ce qui pourrait expliquer la difficulté à dénombrer ce qu'il y a « en plus ». La relation « de plus » ne peut servir d'appui à la construction de la relation « de moins ». Pour Karine, les 6 fleurs cueillies en plus ne correspondent pas aux 6 fleurs cueillies en moins de son frère. En effet, les 6 fleurs cueillies en moins « sont invisibles », dit-elle. Sans la relation « de plus », cet « invisible », cette négation, comme dirait Piaget (1978), ne s'élabore pas.

Nous pourrions, par ailleurs, poser l'hypothèse de l'influence de l'aspect affectif. En effet, Karine a-t-elle l'habitude de partager également avec son frère? Cela pourrait-il influencer sa compréhension de cette situation? La poursuite des entrevues nous permettra, peut-être, de répondre à ces questions…

SITUATION 3

Tu as 28 cartes de hockey. Ton cousin a 5 cartes de hockey de plus que toi. Combien ton cousin a-t-il de cartes de hockey? Avant de tout commencer, d'après toi, qui a le plus de cartes de hockey?

Karine trouve le nombre 34. La représentation mentale initiale semble s'appuyer sur les nombres et la relation « de plus », et ce, malgré le problème de dénombrement. La procédure de dénombrement (2, 4, 6, … 30, 32, 34) et ses habiletés de calcul mental semblent la source de l'erreur observée (28 + 5 = 34 et 28 + 6 = 44). En effet, Karine ne modifie pas la régularité du comptage par deux et termine avec le nombre 34. D'autre part, il est possible que, sachant que le résultat doit donner 4 à la position des unités, l'écriture de la phrase mathématique l'amène à ajouter 6 plutôt que 5.

À la suite de ces erreurs, Karine fait pour la première fois une réflexion sur la relation entre « de plus » et « de moins ». En effet, elle affirme qu'elle a 6 cartes de moins que son cousin, ce qui correspond à un changement de perspective. Si cette réflexion sur le type de relation avait eu lieu avant, aurait-elle commencé son dénombrement à 2 ou à 28? *L'influence de ses erreurs occasionnelles de dénombrement et de ses connaissances sur le calcul mental semble avoir été plus grande que nous le croyions dans l'élaboration d'une solution et d'une compréhension de la situation de comparaison.*

SITUATION 4

Tu as 25 autos dans ta boîte à jouets. Ta sœur a 8 autos de moins que toi. On veut savoir combien ta sœur a d'autos dans sa boîte à jouets. Alors, qui a le plus d'autos?

Karine reconnaît qu'elle a plus d'autos. Elle forme un ensemble de 25 jetons sur la table, puis un deuxième de 8 jetons. Karine sépare l'ensemble de 25 en deux sous-ensembles, l'un de 8 et l'autre de 17. Elle ne sait pas comment exprimer son résultat. Les représentations mentales initiales portent sur les nombres, vus comme les représentants d'une quantité. Dans un premier temps, la relation en jeu est assimilée au cardinal du deuxième ensemble. C'est le prélèvement de 8 jetons sur l'ensemble de 25 qui permet de trouver une solution au problème. Toutefois, cette procédure ne permet pas d'introduire la correspondance terme à terme pour réfléchir sur la différence entre les deux ensembles et asseoir les expressions « de plus et de moins ». L'expression « de moins » demeure assimilée à une situation de retrait, ce qui limite l'élaboration d'une nouvelle réflexion.

En proposant le nombre 4 et la relation 3 de moins, Karine assimile toujours l'expression « 3 de moins » au cardinal du deuxième ensemble. Une réflexion sur l'écart entre l'état et le type de relation semble susciter une compréhension de la relation « de plus », puis une compréhension de la relation « de moins ». L'orthopédagogue demande : *Enlève-moi des jetons pour que toi tu en aies « 3 de plus » que moi.* La manipulation est laborieuse, mais Karine arrive à reconnaître que l'orthopédagogue a 3 jetons en moins et que, simultanément, elle a 1 jeton.

SITUATION 5

Tu as 14 billes. Tu as 5 de plus que ton ami. Combien de billes a ton ami?

Karine trouve 9, mais ne peut interpréter ce résultat. La représentation mentale initiale s'appuie sur le nombre 14 et la relation qualitative « de plus ». Karine reprend la procédure de prélèvement et compte les 5 jetons qui restent. *« ... J'ai compté là. J'ai commencé ici. Une, deux, trois, quatre, cinq. Ça faisait cinq. C'est ceux-là. Pis, je n'ai enlevé les autres, pis ça faisait neuf. »* Karine pose ensuite une réflexion sur l'expression « de plus ». Un jeu de déplacement des 5 jetons de plus, d'un ensemble vers l'autre, semble lui permettre de changer de perspective. En effet, à la suite de ce transfert d'un ensemble à l'autre de 5 jetons, elle reconnaît que, si elle a 5 de plus, cela implique que son ami a 5 de moins.

SITUATION 6

Tu as 8 crayons de couleur. Tu en as cinq de moins que ton professeur. Peux-tu me trouver combien ton professeur a de crayons?

La préoccupation de Karine, lorsqu'elle vérifie les nombres et les relations en jeu, laisse croire que sa représentation mentale s'appuie tant sur les nombres que sur la relation en jeu. Elle établit une correspondance terme-terme, ce qui lui permet de montrer ensuite ce qu'elle a en moins. Même si la relation « de plus et de moins » est amenée, on se rend compte qu'elle ne s'appuie pas sur une coordination entre représentation mentale et procédure. *Elle semble s'appuyer plutôt sur la notion de contraire.* En utilisant la relation de plus, l'orthopédagogue induit l'opération à utiliser pour représenter ce qui a été manipulé. Karine écrit 8+5=13. Pour montrer ce qu'elle a, elle écrit ensuite 13 - 5 = 8.

Étude de cas de Marijo

L'entrevue d'évaluation a permis de voir apparaître des difficultés dans les habiletés de comptage. En effet, Marijo ne peut réciter les nombres plus grands que 38. Elle éprouve de la difficulté à écrire des nombres. Enfin, le plus souvent, elle met ensemble les nombres d'un problème donné, sans égard aux relations présentes. Nous avons présenté uniquement les quatre premières situations à Marijo.

SITUATION 1

Tu as 13 autocollants. Ton ami Maxime en a 7. Combien d'autocollants as-tu de plus que Maxime?

Marijo s'exclame aussitôt : 13. La représentation mentale initiale de Marijo s'appuie sur les nombres, vus comme les représentants de quantité. *Toutefois, c'est au moment où Marijo illustre les deux ensembles qu'une nouvelle compréhension surgit.* En effet, cette illustration l'amène à comparer la quantité de jetons, qui est la même dans les deux ensembles, puis à dénombrer ce qui reste. Elle semble alors élaborer une réflexion au sujet de la relation « de plus », réflexion issue d'une coordination entre l'illustration des ensembles et sa procédure de comparaison terme à terme. Afin d'écrire ce qu'elle vient de faire, elle écrit le nombre 13, puis le nombre 7. On lui demande d'inscrire un « signe » entre les deux nombres. Elle inscrit - entre les nombres.

SITUATION 2

Tu cueilles 14 fleurs. Ton frère a cueilli 8 fleurs. Combien ton frère a cueilli de fleurs de moins que toi?

Marijo répond immédiatement : 8. La représentation mentale initiale porte sur les nombres. Chacun de ces nombres est vu comme le cardinal d'un ensemble. *C'est l'illustration, qui est sollicitée par le dessin, qui permet à Marijo de se préoccuper de la relation entre les ensembles.* Un rappel des procédures déjà utilisées l'amène à comparer 8 éléments des deux ensembles. Sans que la réflexion au sujet de la « différence » soit explicite, on peut observer son apport, puisque c'est à partir de ce moment que Marijo dénombre le reste. Marijo identifie la quantité de fleurs de chacun sans faire intervenir la relation. Elle écrit ensuite 14 - 6 = 8.

SITUATION 3

Tu as 18 cartes de hockey. Ton cousin a 5 cartes de plus que toi. Combien de cartes de hockey ton cousin a-t-il?

Il est intéressant de constater que Marijo prend conscience de la différence entre les situations déjà proposées et celle-ci. Elle s'exclame : *« Mais là, on ne ne sait pas combien il en avait. »* En effet, c'est la première fois que la relation de comparaison ne s'appuie pas sur le cardinal de chacun des ensembles. En s'appuyant sur une représentation mentale du nombre et de la relation en jeu, elle utilise une procédure de dénombrement et trouve une solution satisfaisante. La réflexion semble porter sur la relation, puisqu'elle nous dit que son cousin a « 23 de plus ». *Un retour sur la coordination réalisée paraît suffisant pour ajuster cette réflexion à la situation (le nombre 23 correspond à la quantité qu'a son cousin).* Marijo écrit ensuite 18 + 5 = 23, qu'elle vérifie en récitant les nombres de 18 à 23.

SITUATION 4

Tu as 15 autos dans ta boîte à jouets. Ton frère a 8 autos de moins que toi. Combien ton frère a-t-il d'autos?

La représentation mentale initiale porte sur les nombres. Ces derniers représentent bien des quantités. La relation n'intervient qu'à la suite d'une relecture. La compréhension intuitive selon laquelle elle a plus d'autos permet de voir apparaître des procédures de dénombrement. *Toutefois, le prélèvement de 8 parmi 15 crée une confusion avec une situation de retrait.* En enlevant 8 jetons de l'ensemble de 15, elle a 7 autos et son frère en a 8. Aucune nouvelle réflexion n'émerge du dénombrement de ce que les deux enfants ont « de pareil ». Il semble qu'il soit nécessaire, pour Marijo, que l'expression « de plus » lui soit familière pour qu'elle puisse travailler avec la relation « de moins », ce qui n'est pas le cas. Elle écrit ensuite 15 - 8 = 7.

Discussion

Comment s'élabore la compréhension des élèves rencontrées

Durant toutes les situations, les représentations mentales initiales des enfants se sont appuyées sur le nombre, vu comme le représentant d'une quantité. En effet, à aucun moment les enfants n'ont traité ces nombres comme des objets physiques à mettre ensemble, ce que les évaluations initiales avaient mis en lumière. Il est vrai qu'elles ont, à ce moment, une certaine expérience de ces situations. En effet, des situations d'ajout et de retrait, de réunion et de complément ont précédé. Nous constatons l'importance de la prise en compte de la relation « de plus ou de moins » à l'intérieur des représentations mentales initiales.

Au moment où on attire l'attention des enfants vers une évaluation qualitative des ensembles, de nouvelles procédures émergent. Ce contact, avec une compréhension qualitative (*qui a le plus?*) appelée intuitive par Herscovics et Bergeron (1989), instaure l'établissement d'une correspondance terme à terme, une coordination que nous qualifierons de structuration des connaissances généralisables à d'autres situations. En identifiant l'ensemble le plus grand, sans pour autant savoir « de combien », les élèves prennent conscience, implicitement ou explicitement, d'une différence entre les ensembles. La prise de conscience de cette différence les amène à dénombrer ce qui reste. Une nouvelle coordination entre la notion de différence et le dénombrement de ce qui reste suscite une nouvelle structuration généralisable. Par exemple, Karoline reconnaît l'implication de la relation amenée par l'expression « de plus ». Ces résultats confirment ceux de Stern (1993) pour qui le changement de perspective amené par cette implication est nécessaire pour résoudre le dernier problème.

Les difficultés rencontrées par ces élèves

Ce type de situation statique semble être fortement influencé par les situations dynamiques qui sont plus familières aux élèves. En effet, des confusions apparaissent, certaines entre les expressions et les procédures impliquées dans les situations dynamiques. Ainsi, interpréter les nombres comme étant tantôt le cardinal d'un ensemble et tantôt la relation en jeu pose problème. De plus, l'identification des éléments, qui sont en plus, et le prélèvement crée un glissement de sens. Ce glissement amène ensuite une difficulté à constater que reconnaître une différence entre des ensembles ne signifie pas enlever, donner ou prêter. L'interprétation à donner au résultat obtenu (reste ou différence, reste ou cardinal d'un des ensembles) est importante à préciser. Sans un questionnement sur la nature du résultat obtenu, le problème peut être résolu, mais il n'est pas pour autant compris.

Une structuration particulière entre des connaissances est apparue. Même si la représentation mentale initiale porte sur les nombres, vus comme les représentants d'une quantité, une comparaison entre « la grandeur » des nombres amène à comparer « la longueur » de deux ensembles. Nous appellerons ce type de coordination entre nombres et procédures structuration partielle des connaissances. En effet, cette comparaison, issue essentiellement des procédures de séparation et de prélèvement, permet de résoudre le problème sans nécessairement réfléchir sur la relation en jeu. Le prélèvement des éléments qui sont « en plus » semble aussi provoquer un glissement de sens. Nous pourrions donc conclure que, dans le cas de problèmes de comparaison, l'absence d'un des ensembles à comparer peut nuire au développement d'une compréhension, sans pour autant empêcher la résolution du problème posé.

Enfin, il est à noter que certaines manipulations semblent permettre de développer une compréhension « langagière » des expressions utilisées. Une telle compréhension ne signifie pas, toutefois, qu'il s'agit d'une compréhension logique.

Les types de situations de comparaison

Nous pouvons observer que, dans le cas où l'on demande de trouver *la différence* entre deux ensembles, les élèves doivent apprendre à interpréter le résultat comme une relation et non comme un état. Dans le cas où l'on cherche **l'ensemble comparé**, il ne semble plus y avoir de difficulté. Le problème est résolu facilement. Toutefois, nous constatons que les enfants associent l'expression utilisée et l'opération arithmétique, sans nécessairement comprendre la relation en jeu. La difficulté particulière de ce type de situation redevient l'interprétation du résultat. En effet, ce résultat correspond maintenant au cardinal d'un des deux ensembles. Enfin, dans le dernier cas, on cherche **l'ensemble de référence**. Ici, il est nécessaire que les élèves aient développé une flexibilité de leur pensée leur permettant de changer de perspective au besoin. Nous pourrions aussi croire que ce type de situation crée la nécessité de réfléchir sur ce changement de perspective.

Apport de ce type d'accompagnement

Cette étude montre que la démarche d'apprentissage de ces élèves se réalise grâce aux mêmes intuitions, aux mêmes procédures et aux mêmes réflexions que celles utilisées par un élève du « régulier ». Toutefois, l'élève en difficulté a besoin d'un accompagnement particulier, puisque, même en présence de cet accompagnement, des glissements surgissent sur l'interprétation des nombres, des procédures et du résultat obtenu. L'accompagnement offert exige donc une vigilance de la part de l'intervenante afin de laisser le temps à l'élève de s'approprier la situation, de le laisser expérimenter ses premières intuitions et de faire un choix judicieux des pistes à donner. À cet effet, nous retenons l'importance de susciter la construction de réflexions sur la notion de différence et sur l'implication d'une relation sur l'autre.

Les limites de ce type d'intervention

À la lecture de ces interventions, on pourrait croire que la charge de la réflexion repose strictement sur l'adulte, alors que l'enfant tente de répondre correctement aux questions posées. Il est possible que ce modèle d'intervention, nouveau pour les orthopédagogues qui l'ont expérimenté, puisse provoquer cette lecture. Toutefois, nos expériences d'intervention auprès de ces élèves nous montrent que, trop souvent, ces enfants cherchent à résoudre un problème sans savoir qu'il est possible de comprendre ce qui se passe. Dans les cas où des réussites apparaissent, elles s'exclament qu'elles ont eu de la chance ou que c'était facile. Il nous apparaît donc normal que, dans un premier temps, la réflexion soit suscitée par l'adulte. Toutefois, il faut apprendre à distinguer les interventions qui suscitent une réflexion de celles qui soutiennent une réflexion. L'accompagnement doit donc chercher à susciter une appropriation du problème, ce que nous voyons apparaître dans les dernières entrevues. En effet, les élèves prennent un temps pour s'approprier les données de la situation proposée.

Conclusion

Cette étude a permis de mieux connaître les représentations mentales à l'origine des procédures utilisées pour résoudre ce type de problèmes. L'analyse réalisée devient une réflexion sur le processus d'apprentissage. De cette réflexion, nous pouvons dégager l'importance des représentations que les élèves évoquent au contact d'un problème. Ces dernières orientent les procédures et l'interprétation du résultat obtenu. Le type d'intervention proposé a permis d'étudier l'élaboration de leur compréhension, donc de leur progression. Nous constatons qu'il semble plus difficile de choisir l'opération que d'utiliser des procédures qui permettent de résoudre les problèmes posés. C'est ce qui expliquerait la difficulté d'écrire la phrase mathématique qui correspond à la résolution du problème. Toutefois, de nouvelles questions émergent. La perspective constructiviste nous invite, entre autres, à interroger l'élève afin de l'amener à reconstruire, pour lui-même, la compréhension des relations en jeu dans un problème donné. À long terme, ce type d'intervention expérimenté ici peut-il susciter une réflexion autonome chez l'élève? Quelle distance doit-on respecter, entre la situation et le soutien à offrir, pour susciter cette autonomie?

Références bibliographiques

BRIARS, D. J. et LARKIN, J. H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, *1*(3), 245-296.

BOUCHARD, J. et HUARD C. (1989). *Espace mathématique 3. Cahier de l'élève A-B.* (2e éd.) (2 v.). Guide de l'enseignement. Montréal : Renouveau pédagogique.

CARPENTER, T. P. et MOSER, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. Dans T. P. Carpenter, J. M. Moser et T. A. Romberg (dir.), Addition and Subtraction : *A Cognitive Perspective* (p. 9-24). Hillsdale, NJ : Erlbaum.

CARPENTER, T. P. et MOSER, J. M. (1983). The acquisition of addition and substration concepts. Dans R. Lesh et M. Landau (dir.), *Acquisition of Mathematics. Concepts and Processes* (p. 7-44). New York : Academic Press.

CARPENTER, T. P., HIEBERT, J. et MOSER, J. M. (1979). *The effect of problem structure on first-graders' initial solution processes for simple addition and substraction problems.* Madison : Wisconsin Research and Development Center for Individualized Schooling.

CARPENTER, T. P., HIEBERT, J. et MOSER, J. M. (1981). Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(1), 27-39.

DEBLOIS, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(1), 71-127.

DEBLOIS, L. (1997). Trois élèves en difficulté devant des situations de réunion et de complément d'ensembles. *Educational Studies in Mathematics.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, *34*(1), 67-96.

FAYOL, M. (1990). *L'enfant et le nombre : du comptage à la résolution de problèmes.* Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

FAYOL, M. et ABDI, H. (1986). Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs. *European Journal of Psychology of Education*, *1*(1), 41-58.

FAYOL, M., ABDI, H. et GOMBERT, J.-E. (1987). Arithmetic problems formulation and working-memory load. *Cognition and Instruction*, *4*(3), 183-202.

FUSON, K. C. (1991). Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. Dans J. Bideaud, C. Meljac et J. P. Fischer (dir.), *Les chemins du nombre* (p. 159-182). Lille : Presses universitaires de Lille.

FUSON, K. C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number.* New York : Springer-Verlag.

HERSCOVICS, N. et BERGERON, J. (1989). Analyse épistémologique des débuts de l'addition. *Actes de la 41e rencontre de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques* (p. 155-165). Bruxelles.

KAMII, C. K. (1990). *Les jeunes réinventent l'arithmétique.* Berne : Peter Lang.

NESHER, P. (1982). Level of description in the analysis and subtraction word problems. Dans T. P. Carpenter, J. M. Mosser et T. A. Romberg (dir.), *Addition and Subtraction : A Cognitive Perspective* (p. 25-38). Hillsdale, NJ : Erlbaum.

PIAGET, J. (1974). *Recherches sur la contradiction. 2. Les relations entre affirmations et négations.* Paris : Presses universitaires de France.

PIAGET, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives.* Paris : Presses universitaires de France.

PIAGET, J. (1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 1. L'abstraction des relations logico-arithmétiques.* Paris : Presses universitaires de France.

RILEY, M. S. et GREENO, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, *5*(1), 49-101.

RILEY, M. S., GREENO, J. G. et HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. Dans H. Ginsburg (dir.), *The Development of Mathematical Thinking* (p. 153-196). New York : Academic Press.

ROSENTHAL, D. J. A. et RESNICK, L. B. (1974). Children's solution processes in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, *66*(6), 817-825.

STERN, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology*, *85*(1), 7-23.

THERRIEN, C. (1993). *Élaboration de schèmes d'addition en première année du primaire* (thèse de doctorat). Québec, Université Laval.

VERGNAUD, G. (1991). *L'enfant, la mathématique et la réalité* (4e éd.). Berne : Peter Lang.

VERSCHAFFEL L. (1994). Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 141-165.

VYGOTSKI, L. (1985). *Pensée et langage* (2e éd.). Traduction de Françoise Sève. Paris : Éditions sociales.