Nouveaux cahiers de la recherche en éducation

Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable
Analytical framework for reasoning in algebraic problem-solving that involves unequal sharing
Marco de análisis de razonamientos en la resolución de problemas algebraicos de inecuaciones

Hassane Squalli, Mirène Larguier, Alain Bronner et Adolphe Adihou

Volume 22, numéro 1, 2020

Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (Vol. 2)

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1070024ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1070024ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke

ISSN

1911-8805 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. & Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *22*(1), 36–62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

Résumé de l'article

L'objet de ce texte est de proposer un cadre d'analyse des raisonnements d'élèves dans la résolution de problèmes de partage inéquitable pouvant être utilisés au primaire et au début du secondaire. Ce cadre repose sur la considération des deux dimensions suivantes : 1) le degré d'analycité du raisonnement et 2) la nature du registre de représentation sémiotique (Duval, 1995) des inconnues et des équations. Les fondements épistémologiques de ce cadre d'analyse s'appuient sur une brève analyse de certaines étapes du développement historique de l'algèbre. Ensuite, les différentes catégories de raisonnement sont illustrées au moyen d'exemples prototypiques issus de productions d'élèves.

NCRÉ
Nouveaux cahiers de la recherche en éducation
Vol. 22, nº 1, 2020

Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable

Hassane Squalli
Université de Sherbrooke
Mirène Larguier
Université de Montpellier
Alain Bronner
Université de Montpellier
Adolphe Adihou
Université de Sherbrooke

Résumé

L'objet de ce texte est de proposer un cadre d'analyse des raisonnements d'élèves dans la résolution de problèmes de partage inéquitable pouvant être utilisés au primaire et au début du secondaire. Ce cadre repose sur la considération des deux dimensions suivantes: 1) le degré d'analycité du raisonnement et 2) la nature du registre de représentation sémiotique (Duval, 1995) des inconnues et des équations. Les fondements épistémologiques de ce cadre d'analyse s'appuient sur une brève analyse de certaines étapes du développement historique de l'algèbre. Ensuite, les différentes catégories de raisonnement sont illustrées au moyen d'exemples prototypiques issus de productions d'élèves.

Mots-clés: pensée algébrique, enseignement primaire-secondaire, raisonnement analytique, problèmes de partage inéquitable

Analytical framework for reasoning in algebraic problem-solving that involves unequal sharing

Abstract

This text sets forth a framework for analyzing student reasoning in solving unequal sharing problems that can be used in elementary school and early secondary school. The framework is based on a consideration of two dimensions: 1) the degree of analycity of the reasoning and 2) the nature of the register of semiotic representation (Duval, 1995) used for unknowns and equations. The epistemological foundations of this analytical framework are based on a brief analysis of certain stages in the historical development of algebra. Next, the different categories of reasoning are illustrated using prototypical examples drawn from student productions.

Keywords: algebraic thinking, primary-secondary education, analytical reasoning, unequal sharing problems

Marco de análisis de razonamientos en la resolución de problemas algebraicos de inecuaciones

Resumen

El propósito de este texto es proporcionar un marco para analizar el razonamiento de los estudiantes para resolver problemas de reparto no equitativo o reparto desigual que pueden usarse en primaria y al inicio de secundaria. Este marco se basa en la consideración de las dos siguientes dimensiones: 1) el grado de razonamiento analítico y 2) la naturaleza del registro de representación semiótica (Duval, 1995) de las incógnitas y las ecuaciones. Los fundamentos epistemológicos de este marco de análisis se basan en un breve análisis de ciertas etapas en el desarrollo histórico del álgebra. Luego, las diferentes categorías de razonamiento son ilustradas mediante ejemplos prototípicos provenientes de producciones de los alumnos.

Palabras clave: algebraico, educación primaria-secundaria, razonamiento analítico, problemas de reparto desigual

1. Introduction

Dans la plupart des pays du monde, l'algèbre occupe une place centrale dans les mathématiques du secondaire. Cependant, elle est réputée être, depuis longtemps, un sujet scolaire aride et difficile pour les élèves (voir par exemple Rosnick et Clément, 1980; Küchemann, 1981; Booth, 1984). Jusqu'à la fin des années 1980, la plupart des recherches en didactique de l'algèbre était principalement centrée sur l'étude des difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Depuis la fin des années 1980, un grand nombre de didacticiens et de didacticiennes des mathématiques s'entendent sur la nécessité de réformer en profondeur les curriculums actuels d'algèbre à l'école. Ainsi, on a vu se multiplier les travaux de recherche à ce sujet (Wheeler, 1989; Lins, 1992; Kieran, 1992; Kaput, 1995, 1998; Bednarz, Kieran et Lee, 1996, etc.). En 2001, à l'issue de la rencontre de préparation de la 12e étude ICMI[1]: «The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Chick, Stacey, Vincent et Vincent, 2001), un groupe de travail spécial sur la pensée algébrique est créé sous l'étiquette *Early Algebra*. *Early Algebra* désigne à la fois un domaine de recherche, une perspective curriculaire et un domaine de formation des enseignants (Carraher et Schliemann, 2014). Il est basé sur l'idée de favoriser le développement de la pensée algébrique dans une trajectoire continue depuis les premières années du primaire jusqu'à l'introduction formelle de l'algèbre du secondaire.

La perspective du développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire bien avant l'avènement de l'algèbre au secondaire, oblige à reconceptualiser l'algèbre et la pensée algébrique: qu'entend-on par algèbre? qu'entend-on par pensée algébrique? quelle relation entre l'arithmétique et l'algèbre?

Si l'arithmétique peut être vue comme la science des nombres, des quantités et des grandeurs (Carraher et Schliemann, 2007), l'algèbre peut, selon nous, être vue comme la science des opérations (Bronner, 2007). Plus précisément, l'algèbre peut être vue comme un ensemble d'activités mathématiques où interviennent des opérations (lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli, 2000, 2015). Ces activités sont marquées par une manière de penser, une pensée algébrique. Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen de:

1. Un ensemble de raisonnements particuliers (comme généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles; exprimer, interpréter, raisonner sur des relations entre variables, en particulier des relations fonctionnelles, raisonner en matière de structures, etc.);

1 International Commission of Mathematical Instruction. Repéré à https://www.mathunion.org/icmi.

2. Des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (comme voir l'égalité comme une relation d'équivalence, laisser les opérations en suspens; voir une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul, etc.);

3. Des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations.

Par ailleurs, plusieurs chercheurs soulignent le caractère analytique de la pensée algébrique (Lins, 1992, 1993; Gascon, 1994, Bednarz, Kieran et Lee, 1996; Radford, 2010, 2108; Squalli, 2000). Dans le contexte de la résolution de problèmes, raisonner analytiquement consiste à opérer sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu, procédant ainsi de l'inconnu vers le connu. En revanche, la pensée arithmétique est de nature non analytique. Comme le font remarquer Mason et Binns (1993), dans une démarche arithmétique de résolution, on fait simplement une suite de calculs sur des quantités connues, on n'opère jamais sur des inconnues. La distinction entre un mode de raisonnement arithmétique et un mode de raisonnement algébrique réside précisément dans le caractère analytique de ce dernier, non dans l'absence ou la présence de lettres pour représenter les inconnues**.** Nous étayons cette distinction en nous appuyant sur quelques étapes importantes du développement historique de l'algèbre élémentaire (Squalli, 2000). Le développement du raisonnement analytique est donc au cœur du développement de la pensée algébrique dans le contexte de la résolution de problèmes se ramenant à la recherche de valeurs d'inconnues.

Comme l'explique Kieran (2016), avec les travaux de recherche du courant *Early Algebra*, les objets de recherche ne sont plus focalisés sur le contenu de l'algèbre, mais sur la pensée algébrique, sur les représentations appropriées pour les jeunes enfants ainsi que sur la nature des premières activités d'algèbre susceptibles de promouvoir leur développement. Cependant, la généralisation est la composante de la pensée algébrique qui domine largement les sujets d'étude de ces recherches (Kieran, 2018). À notre connaissance, très peu de travaux du courant *Early Algebra* se sont intéressés à la composante analytique de la pensée algébrique. Les travaux importants dans ce sens sont ceux de Bednarz et Janvier mais conduits dans une vision d'introduction à l'algèbre du secondaire sur la base des connaissances arithmétiques des élèves développés au primaire. Cherchant à introduire l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes, Bednarz et Janvier se sont intéressées à définir les types de problèmes qui faciliteraient le passage de l'élève d'un mode arithmétique à un mode algébrique de résolution. Pour analyser les problèmes que l'on retrouve traditionnellement dans des manuels d'arithmétique et dans ceux d'algèbre, de même que pour étudier les types de problèmes qui posent des difficultés aux élèves, elles ont élaboré un cadre d'analyse qui se base sur la nature du «calcul relationnel» (Vergnaud, 1982) dans la représentation et la résolution de tels problèmes: la nature des relations entre les quantités en jeu dans le problème, connues et inconnues, et le lien entre ces relations.

Elles avancent:

> En arithmétique, les problèmes qui sont généralement proposés aux élèves sont des problèmes dits «connectés»: une relation peut facilement être établie entre deux données connues; donnant la possibilité de raisonner arithmétiquement (à partir des données connues vers l'inconnue à la fin des calculs) […].
>
> À l'opposé, en algèbre les problèmes qui sont généralement proposés aux élèves sont dits «déconnectés»: aucun chemin direct ne peut être établi entre deux données connues comme c'est le cas des problèmes de la figure 1. (Bednarz et Janvier, 1996, p. 123, traduction libre)

La figure suivante illustre la structure de ces deux types de problèmes (Bednarz et Janvier, 1996, p. 123) :

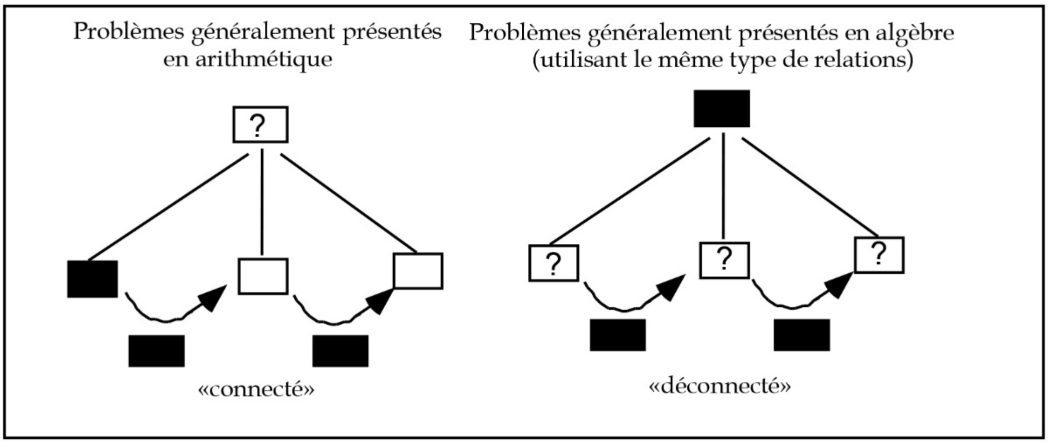


Figure 1. Problème arithmétique *vs* algébrique

L'analyse des procédures de résolution utilisées par des élèves ne connaissant pas encore l'algèbre dans des problèmes dits *déconnectés* leur a révélé que ces derniers tentent de rendre ces problèmes *connectés* en essayant de créer des liens entre les données pour être capables d'opérer sur elles à partir d'une donnée connue. Bednarz et Janvier (1996) ont regroupé les raisonnements utilisés par les élèves en quatre catégories.

Dans la première, on trouve les raisonnements qui prennent comme point de départ de la résolution l'état connu dans le problème. L'élève cherche un état initial connu à partir duquel il peut générer les inconnues du problème et suit une procédure erronée. Un deuxième type de raisonnement consiste à créer un état initial en utilisant un nombre fictif. On trouve ici les procédures du type «essais-erreurs». Un troisième type de raisonnement est celui qui consiste à partager la quantité totale connue en autant de parts égales que le nombre d'inconnues constituant cette totalité, puis de générer à l'aide du nombre obtenu les valeurs des inconnues. Le quatrième et dernier type de raisonnement est d'un niveau plus élevé et consiste à se baser sur la structure du problème. L'élève opère sur les relations entre les quantités et transforme complètement le problème initial en un problème plus global où il est possible de faire les calculs.

Dans la perspective du développement précoce de la pensée algébrique, c'est-à-dire dès le primaire, le développement de la pensée analytique devrait être étudié non pas à la veille de l'introduction de l'algèbre, comme c'est le cas des travaux de Bednarz et Janvier, mais selon une plus longue période. En outre, plusieurs travaux (Adihou, Squalli, Saboya, Tremblay et Lapointe, 2015; Saboya, Besançon, Martin, Adihou, Squalli et Tremblay, 2013; Marchand et Bednarz, 1999, 2000; Bednarz et Janvier, 1994, 1996) montrent que la confrontation des élèves à des problèmes déconnectés avant leur introduction à l'algèbre favorise l'émergence de raisonnements sophistiqués (tels les raisonnements de type fausse position). En revanche, l'introduction de la méthode algébrique de résolution est un obstacle à l'émergence de ce type de raisonnements. Notre postulat est qu'entre la catégorie des raisonnements non analytiques (degré d'analyticité nul) et celle des raisonnements analytiques (degré d'analyticité optimal) existe une autre catégorie de raisonnements riches sur le plan de la pensée mathématique, mais qui ne peuvent être catalogués comme analytiques ou non analytiques (degré d'analyticité non nul mais non optimal). L'objet de ce texte est de proposer un cadre d'analyse qui permet de catégoriser les différents types de raisonnement selon leur degré d'analyticité en prenant en compte la nature du registre de représentation.

Ainsi, notre proposition s'inscrit dans l'axe 1: «Fondements épistémologiques et didactiques» de ce numéro thématique. Plus particulièrement, il apporte des éléments de réponse à la question suivante de cet axe: *comment distinguer le raisonnement algébrique du raisonnement arithmétique dans la résolution de problèmes se ramenant à la recherche de valeurs d'inconnues?*

2. Un éclairage historique

Selon Hintikka et Remes (1964), l'analyse est une méthode que des géomètres grecs utilisaient dans la recherche de preuves de théorèmes et dans des problèmes de construction. Ils ajoutent: «Dans les deux cas, l'analyse consiste à supposer connu ce qui est recherché pour en tirer des conséquences jusqu'à ce qu'on atteigne une chose déjà connue» (traduction libre)[2]. Le raisonnement analytique apparaît ainsi comme un raisonnement de type hypothéticodéductif. Dans la recherche de la valeur de l'inconnue, *on fait comme si* cette valeur existait et on opère sur elle comme on opère sur les nombres

2 «*In both cases, analysis apparently consists in assuming what was being sought for, in inquiring where it comes from, and in proceeding further till one reaches something already known*» (Hintikka et Remes, 1974, p. 1).

connus. Nous allons voir que cette méthode analytique a été caractéristique de l'algèbre élémentaire dans plusieurs étapes importantes de son développement historique[3].

2.1 La méthode analytique, fondement de l'algèbre d'al-Khawarizmi

Mohammed ibn Musa al-Khawarizmi composa à Bagdad, entre 813 et 833, son célèbre ouvrage: *Le livre concis d'al-jabr et d'al-muqàbala*. Dans les pages de ce manuel, on voit surgir l'*algèbre,* pour la première fois, comme discipline mathématique distincte, indépendante et en possession de son nom (Rashed, 1984). L'algèbre selon al-Khawarizmi se présente comme la théorie des équations linéaires et quadratiques à une seule inconnue et du calcul élémentaire sur les binômes et trinômes associés (calcul algébrique), sans que soit encore formulée l'idée de polynôme en général (Rashed, 1984). Le registre du langage naturel y est essentiel: le calcul est exprimé complètement en mots, les inconnues et leurs carrés sont représentés explicitement par des noms (la chose, le carré de la chose ou màl). Ce que nous écrivons $ax^2 = bx$ et $ax^2 = c$ sont écrits respectivement, les *carrés égalent les choses*, *les carrés égalent les nombres*, les transformations algébriques, soit les règles d'opérations sur les expressions et les équations sont nommées explicitement (*al-jabr*, *al-muqabala*, etc.). Le registre géométrique de représentation sémiotique est utilisé pour donner la preuve par figures des algorithmes de solution des équations canoniques. Avec al-Karaji (fin x^e^ siècle et début du xi^e^ siècle) et ses successeurs, l'algèbre d'al-Khawarizmi est vue, selon l'expression même de l'époque, comme une «arithmétique des inconnues» et conçue comme étant essentiellement analytique. Selon les termes d'al Samaw'al (1130-1174), il s'agit d'une part «d'opérer sur les inconnues comme les arithméticiens opèrent sur les connues» (Rashed, 1984). La citation suivante d'al-Karaji éclaire la signification de l'algèbre et de la méthode algébrique, essentiellement analytique, que leur donnait cet auteur:

> Sache que toute (la science du) calcul consiste à déterminer les inconnues à l'aide des données connues. On ne parvient à cette détermination que grâce à trois choses.
>
> Premièrement, et c'est là la plus difficile: la formulation *(tanãwul)* du problème à l'aide d'un traitement l'amenant au stade de l'équation, ce à quoi on parvient avec une longue pratique et une connaissance de règles que nous avons exposées dans notre ouvrage intitulé *Badi'*.
>
> Deuxièmement: les conditions du problème, parce que ce sont des auxiliaires puissants.
>
> Troisièmement: les opérations de l'algèbre, à savoir l'augmentation, la diminution, la multiplication, la division, l'addition, la soustraction, la proportion, la restauration et la réduction (*al-jabr wa'l-muqãbala*), enfin la détermination de l'inconnue. (cité dans Sesiano, 1977, p. 301)

3 Une analyse plus détaillée des étapes importantes de l'évolution historique de l'algèbre élémentaire est proposée dans Squalli (2000).

2.2 Cardan: opérer sur des nombres imaginaires comme on opère sur des nombres connus

La recherche de règles générales pour la résolution algébrique — c'est-à-dire au moyen des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de l'extraction de racines carrées ou cubiques — de l'équation du troisième degré allait conduire les algébristes italiens du XVI[e] siècle à raisonner sur des nombres dits «imaginaires», une nouvelle catégorie de nombres. Les trois pionniers dans ce domaine sont Scipione del Ferro, Tartaglia et Cardan (Itard, 1977). En langage moderne, la solution trouvée pour l'équation $x^3 + px + q = 0$ est la suivante:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Cardan a vite compris les difficultés soulevées par cette équation. Lorsque $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est négatif, la racine carrée de ce nombre ne peut pas être calculée. Cependant, si on écrit le calcul *comme si on pouvait l'exécuter*, on trouve une valeur bien déterminée qui est une solution de l'équation. Or, dans ce cas, on sait que l'équation possède trois racines, comme Archimède l'avait montré géométriquement dans son livre *De la sphère et du cylindre, livre second* où un problème de solides est mathématisé par l'équation en question (Itard, 1977). En acceptant de calculer sur des racines carrées de nombres négatifs, Cardan utilisait un artifice de calcul lui permettant de trouver trois racines pour cette équation. Pour lever la difficulté, il introduisit timidement – Bombelli le fera plus nettement en 1572 – de nouveaux nombres dits «impossibles» ou «imaginaires».

À titre d'exemple, pour l'équation $x^3 - 63x - 162 = 0$ (équation dite irréductible) la formule de Cardan donne: $x = \sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{81 - 30\sqrt{-3}}$ laquelle, après simplification aboutit à: $x = \left(-3 + 2\sqrt{-3}\right) + \left(-3 - 2\sqrt{-3}\right) = -6$.

En acceptant d'appliquer à $\sqrt{-3}$ les opérations de base habituelles et en supposant que les propriétés de ces opérations restent aussi valides pour ces nouveaux «objets», Cardan arrive à trouver une solution réelle de l'équation cubique. Le raisonnement heuristique de Cardan est manifestement de nature «analytique». Cependant, dans ce cas, Cardan n'opère pas sur un objet (un nombre) dont la valeur est non déterminée ni sur une variable dont le domaine de référence est connu, mais plutôt sur des «objets imaginaires».

2.3 Viète: l'algèbre comme art analytique

Il est bien connu que François Viète a introduit, en 1591, l'usage des lettres pour désigner aussi bien les grandeurs inconnues que les grandeurs connues. Pour souligner l'importance de la méthode d'analyse en algèbre, Viète décrivait l'algèbre comme un art analytique. En effet, dans son livre *Introduction à l'art analytique*, Viète définit l'algèbre comme une méthode d'analyse comportant trois étapes: l'analyse zététique, l'analyse poristique et l'analyse rhétique ou exégétique. L'historien Itard nous explique en langage moderne en quoi consistent les trois types d'analyse dont parle Viète:

> La *zététique* consiste à adopter un symbolisme permettant de noter tant les grandeurs inconnues que les grandeurs connues, à exprimer les liens qui les unissent et à dégager l'équation qui, sous forme abstraite, résume le problème posé. L'*analyse poristique* étudie, transforme, discute cette équation. Enfin l'*exégétique*, ou *analyse rhétique*, revenant au problème concret, résout l'équation, soit par des constructions s'il s'agit de géométrie, ou par des calculs s'il s'agit d'arithmétique. (Itard, 1977, p. 245)

Viète disait avoir créé une nouvelle algèbre où le calcul est réalisé sur des «espèces», c'est-à-dire des nombres non spécifiés *(logistica speciosa)* en opposition à un calcul essentiellement numérique *(logistica numerosa)* (Boutroux, 1913). Il décrit explicitement les différents types d'espèces et les propriétés des opérations sur elles (Charbonneau et Lefebvre, 1992). Ces deux auteurs précisent:

> Dans ses manipulations, contrairement à ses prédécesseurs, il [Viète] ne fait aucune distinction entre les espèces représentant des grandeurs connues et celles représentant des grandeurs inconnues, si ce n'est de représenter celles-là par des consonnes et celles-ci par des voyelles. (Charbonneau et Lefebvre, 1992, p. 13)

Avant Viète, le calcul algébrique était un calcul sur des équations et sur les expressions polynomiales correspondantes où, contrairement aux paramètres qui restaient numériques, seule l'inconnue était représentée par un symbole. Ce «symbolisme» n'était pas immédiatement opérationnel; il était toutefois utile parce que sa concision permettait de retenir facilement les étapes de résolution, au moins en ce qui concerne l'inconnue (Charbonneau et Lefebvre, 1992). Avec Viète, le calcul algébrique devenant un calcul littéral *(logistica speciosa)*, c'est-à-dire un calcul avec des lettres, l'algèbre se dote d'une «épaisseur syntaxique».

3. Cadre d'analyse du raisonnement analytique

Après ce détour historique, nous sommes maintenant en mesure de caractériser de manière précise le raisonnement analytique dans le contexte de la résolution de problèmes se ramenant à la recherche de valeurs d'inconnues.

Dans le cadre de la résolution de problèmes à une seule inconnue, en algèbre, nous parlons de *raisonnement analytique* dans le sens suivant:

1. On suppose qu'il existe une valeur (éventuellement plusieurs) pour chacune des inconnues répondant aux conditions du problème. On accepte de représenter ces inconnues par un symbole et d'opérer sur eux comme si leur valeur était connue.

2. À l'aide de ces symboles, on traduit les différentes relations entre les données connues et inconnues du problème ainsi que l'équation mathématisant le problème.
3. On cherche des conséquences logiques de 1. et 2. en opérant sur les représentations des relations et de l'équation jusqu'à ce que l'on soit en mesure de trouver les valeurs des inconnues. Dans le cas où on aboutit à une conséquence impossible, par exemple $0 = 1$, alors on peut conclure que la supposition initiale était fausse, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de valeurs des inconnues répondant aux conditions du problème.

Il va de soi que le symbole utilisé pour représenter une inconnue peut être différent d'une lettre (mot, dessin, une notation non standard comme une simple marque sur le papier), comme chez les algébristes avant Viète. La nature du symbole est secondaire du moment que ce symbole est utilisé comme substitut de l'inconnue que l'on peut manipuler lorsqu'on veut opérer sur l'inconnue.

Par ailleurs, notre cadre d'analyse devrait nous permettre de distinguer le raisonnement algébrique du raisonnement arithmétique dans la résolution de problèmes se ramenant à la recherche de valeurs d'inconnues. À cet effet, nous devons prendre en compte dans notre analyse les deux dimensions suivantes: 1) le caractère analytique ou non du raisonnement et 2) le registre de représentation sémiotique (Duval, 1995) des inconnues et des équations.

3.1 Les catégories de raisonnement selon le degré d'analycité

Nous considérons trois grandes catégories. La première regroupe les raisonnements de nature non analytique (degré d'analycité nul). Une seconde catégorie regroupe les raisonnements analytiques (degré d'analycité optimal). La troisième catégorie regroupe les raisonnements dits *à tendance analytique* qui respectent partiellement les caractéristiques d'un raisonnement analytique que nous venons de présenter (degré d'analycité non nul mais non optimal). Définissons ces catégories de façon plus précise.

3.1.1 Les raisonnements de nature non analytique

Cette catégorie regroupe les raisonnements qui sont caractéristiques d'une démarche arithmétique de résolution. Pour déterminer les valeurs des inconnues, l'élève opère sur des données et des relations connues. À aucun moment il n'opère sur une inconnue ou sur un nombre non déterminé (par exemple, une variable ou un paramètre). Ces raisonnements sont performants dans la résolution des problèmes de type connecté[4].

4 Selon Bednarz et Janvier (1996), un problème est dit «connecté» quand une relation peut facilement être établie entre deux données connues; donnant la possibilité de raisonner arithmétiquement (à partir des données connues vers l'inconnue à la fin des calculs). Le problème est dit «déconnecté» si aucun chemin direct ne peut être établi entre deux données connues.

En revanche, dans le cas des problèmes déconnectés (Bednarz et Janvier, 1996), ils ne le sont pas à moins de recourir à un raisonnement de type essais-erreurs.

3.1.2 Les raisonnements analytiques

Ce sont les raisonnements qui respectent toutes les caractéristiques du raisonnement analytique défini précédemment. Dans ce type de raisonnement, l'élève considère l'inconnue, la représente par un symbole, utilise cette représentation pour exprimer les relations entre les données connues et les autres inconnues du problème et opère sur ces représentations pour former l'équation et trouver les valeurs des inconnues.

3.1.3 Les raisonnements à tendance analytique

Nous incluons dans cette catégorie trois classes de raisonnements. La première regroupe les raisonnements hypothéticodéductifs où l'élève affecte une valeur déterminée à une inconnue sachant qu'elle est fausse, fait comme si cette inconnue possédait cette valeur, opère sur les relations et génère les valeurs des autres inconnues. Il raisonne ensuite sur les relations et les valeurs produites pour trouver la valeur exacte de l'inconnue de départ. Les raisonnements de type fausse position sont un exemple de tels raisonnements. Dans ce type de raisonnement, le sujet fait comme si la valeur de l'inconnue était connue, mais au lieu d'opérer sur une représentation de cette inconnue, il opère sur une valeur fausse mais déterminée. Pour cette raison, nous considérons que ce type de raisonnement est à tendance analytique mais n'est pas analytique.

La seconde classe regroupe les raisonnements où l'élève considère les inconnues momentanément comme des variables. Pour trouver les valeurs de ces variables qui respectent les conditions du problème, il n'opère pas sur elles – comme dans le cas d'un raisonnement analytique – mais sur leurs instanciations numériques. C'est le cas des raisonnements fonctionnels dont on présente un exemple prototypique plus loin.

La troisième classe regroupe les raisonnements où l'élève considère l'inconnue, la représente explicitement, utilise cette représentation pour traduire les relations entre les inconnues et les connues mais n'opère pas sur ces représentations pour trouver les valeurs des inconnues. C'est pour cette dernière raison que le degré d'analyticité du raisonnement n'est pas jugé optimal.

3.2 Les registres de représentations sémiotiques

Nous avons retenu trois types de registres au sens de Duval (1995) et de Hitt et Passaro (2007): le registre numérique, le registre algébrique conventionnel et le registre intermédiaire. Comme Hitt (2004) ainsi que Hitt et Passaro (2007), en plus de considérer les représentations sémiotiques institutionnalisées, nous nous intéresserons aux mots et aux registres spontanés (diagrammes). À cette fin, il devient nécessaire d'étudier les contraintes du problème, mais aussi celles dont l'élève tient compte dans l'élaboration de sa résolution.

Le registre de représentation est dit «numérique» quand les traces de la résolution de l'élève ne comportent que des nombres déterminés et des opérations sur ces nombres.

Le registre de représentation est dit «algébrique conventionnel» si l'élève recourt au langage algébrique littéral.

Le registre de représentation est dit «intermédiaire» si l'élève recourt à un, ou à plusieurs, mode de représentation non purement numérique ou algébrique conventionnel. Par exemple, l'élève peut représenter une inconnue par un mot, par le dessin d'une ligne, ou par un carré vide. Il peut représenter les relations par un dessin, utiliser une table de valeurs numérique, etc.

4. La grille d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes de partage inéquitable

Pour opérationnaliser ce cadre d'analyse, nous avons analysé les réponses de 605 élèves de 48 classes de premier cycle du secondaire (âgés entre 12 et 14 ans) ayant participé à une enquête par questionnaire. Le questionnaire comportait 12 problèmes de partage inéquitable à 2 ou 3 inconnues et de niveaux de difficulté variable. Les résultats de cette enquête sont présentés dans «Nature analytique des raisonnements d'élèves au début du secondaire: qu'en est-il lors de la résolution de problème visant le développement de la pensée algébrique?» (Adihou, dans ce numéro). Cette analyse avait un double objectif. Le premier est d'identifier des exemples prototypiques de raisonnements à tendance analytique ou de raisonnement analytique dans un registre non algébrique conventionnel. La production de ce type de raisonnements par des élèves n'ayant pas encore été initiés à la méthode algébrique conventionnelle de résolution montrerait tout l'intérêt du développement précoce de la pensée algébrique. En effet, ces raisonnements sont sophistiqués sur le plan mathématique, mais leur émergence serait contrecarrée par l'introduction de l'algèbre du secondaire. Notre second objectif est de proposer une grille d'analyse des raisonnements des élèves dans la résolution de problèmes de partage inéquitable.

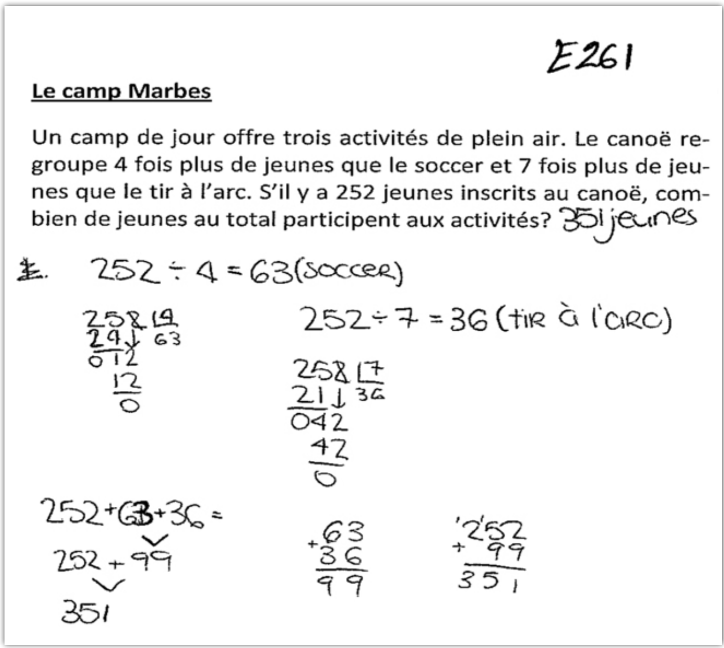
Le tableau 1 présente cette grille qui permet d'analyser les raisonnements de résolutions de problèmes de partage inéquitable selon le degré d'analycité et la nature du registre de représentation.

Tableau 1

Catégories de raisonnements selon le degré d'analycité et la nature du registre de représentation

Raisonnements non analytiques	**Raisonnements à tendance analytique**	**Raisonnements analytiques**
- Calcul direct; registre numérique. - Essais-erreurs, ajustement simple; registre numérique. - Essais-erreurs, ajustement raisonné.	- Raisonnement fonctionnel, registre intermédiaire (table de valeurs). - Type fausse position, - registre numérique; - registre intermédiaire. - Inconnues explicites, registre algébrique conventionnel mais sans opération sur les relations entre les inconnues.	- Inconnues non représentées explicitement, registre numérique. - Inconnue intermédiaire, registre numérique. - Registre algébrique conventionnel, sans perte de lien avec le contexte. - Registre algébrique conventionnel, avec perte de lien avec le contexte.

Les différentes catégories de raisonnement de cette grille seront illustrées par des exemples prototypiques issus de productions d'élèves.


E261

Le camp Marbes

Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le canoë regroupe 4 fois plus de jeunes que le soccer et 7 fois plus de jeunes que le tir à l'arc. S'il y a 252 jeunes inscrits au canoë, combien de jeunes au total participent aux activités? 351 jeunes

$252 \div 4 = 63$ (soccer)

$252 \div 7 = 36$ (tir à l'arc)

$252 + 63 + 36 =$

$252 + 99$

351

- Le problème est un problème connecté de type puits* (Marchand et Bednarz, 1999).
- L'élève calcule les valeurs des deux inconnues *nombre de jeunes inscrits au soccer* et *nombre de jeunes inscrits au tir à l'arc* en utilisant les relations connues entre ces deux inconnues et le nombre connu de jeunes inscrits au canoë (252). Il déduit alors le total des jeunes inscrits aux trois activités. Le registre utilisé est le registre numérique.

* Pour désigner la nature de l'enchaînement des relations dans des problèmes de partage inéquitable, Marchand et Bednarz (1999) distinguent trois types de problèmes: source, composition de relation et puits. Un problème est de type source si les différentes grandeurs inconnues peuvent être générées directement par une même inconnue. Un problème est de type puits si une des inconnues peut être générée à partir des autres inconnues. Finalement, un problème est de type composition de relations si une des inconnues est générée par une composition des relations entre les inconnues.

Figure 2

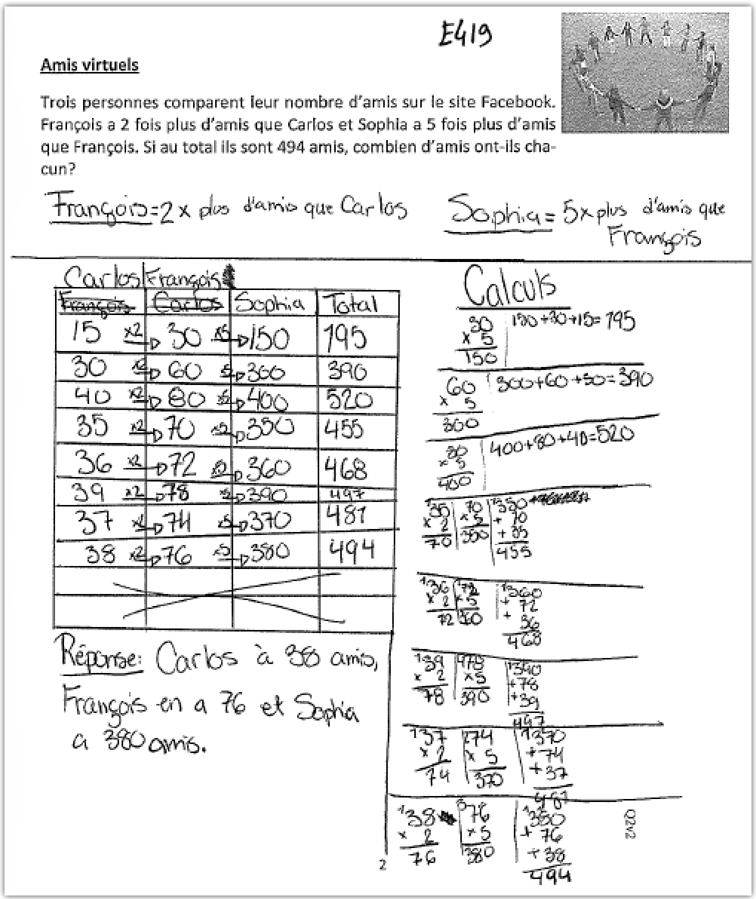
4.1 Raisonnements de type non analytique

4.1.1 Raisonnements basés sur un calcul direct

Cette classe de raisonnements regroupe les raisonnements arithmétiques habituels dans le cas de problèmes connectés. L'élève opère sur les données et les relations connues pour trouver la valeur de l'inconnue.

4.1.2 Raisonnements de type essais-erreurs avec ajustement simple

L'élève donne une valeur spécifique à une des inconnues, génère les valeurs des autres inconnues à l'aide des relations connues. En se basant sur l'écart obtenu entre le nombre total désiré et le nombre total obtenu, il ajuste en conséquence la valeur du nombre de départ sans prise en compte des relations entre les inconnues.

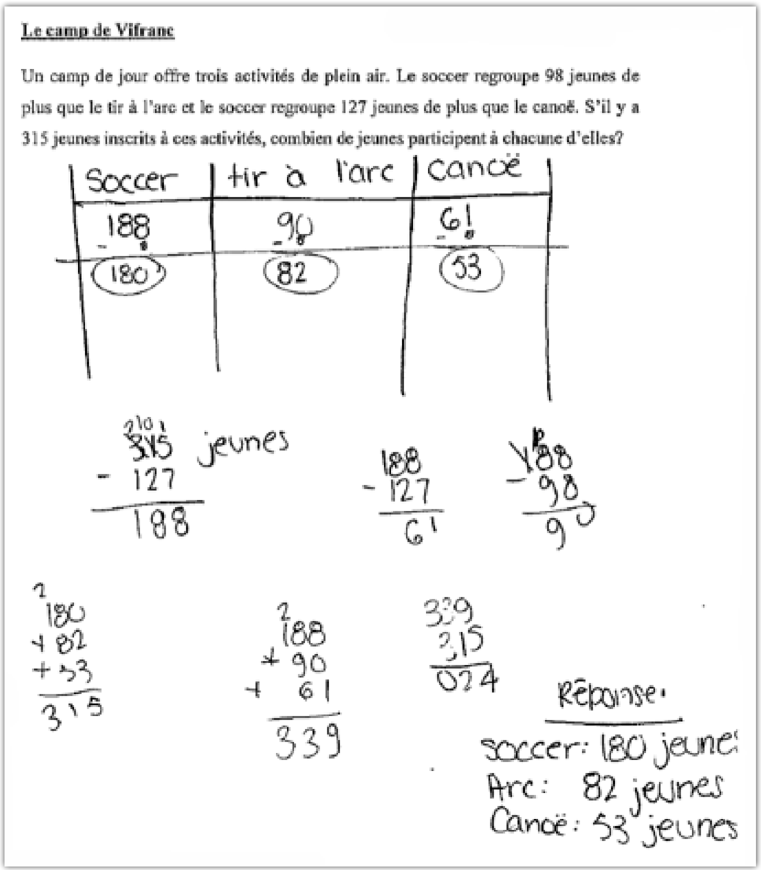


- Le problème est déconnecté, de type composition de deux relations multiplicatives.
- L'élève écrit les relations entre les inconnues, organise ses essais au moyen d'une table de valeurs. Il ordonne ses inconnues de la plus petite à la plus grande (après un premier essai non fructueux). Il donne une valeur à l'inconnue relative à Carlos (15), génère celle relative à François (30) et ensuite celle relative à Sophia (150). Il obtient un total (195) inférieur à celui désiré (494). Il reprend cette procédure, en ajustant la valeur de l'inconnue relative à Carlos jusqu'à ce qu'il réussisse à obtenir le total désiré 494.

Figure 3

Notons ici que ce raisonnement n'est pas de type hypothéticodéductif. Par ses essais, l'élève tente de «deviner» la valeur juste de l'inconnue en utilisant en actes le théorème des valeurs intermédiaires. Les calculs sont réalisés pour vérifier la justesse de la valeur initiale. Le registre est numérique. La table de valeurs sert ici comme moyen d'organisation des essais numériques.

4.1.3 Essais-erreurs avec ajustement raisonné



- Ce problème est déconnecté de type puits. Les relations sont des relations de comparaison additives.

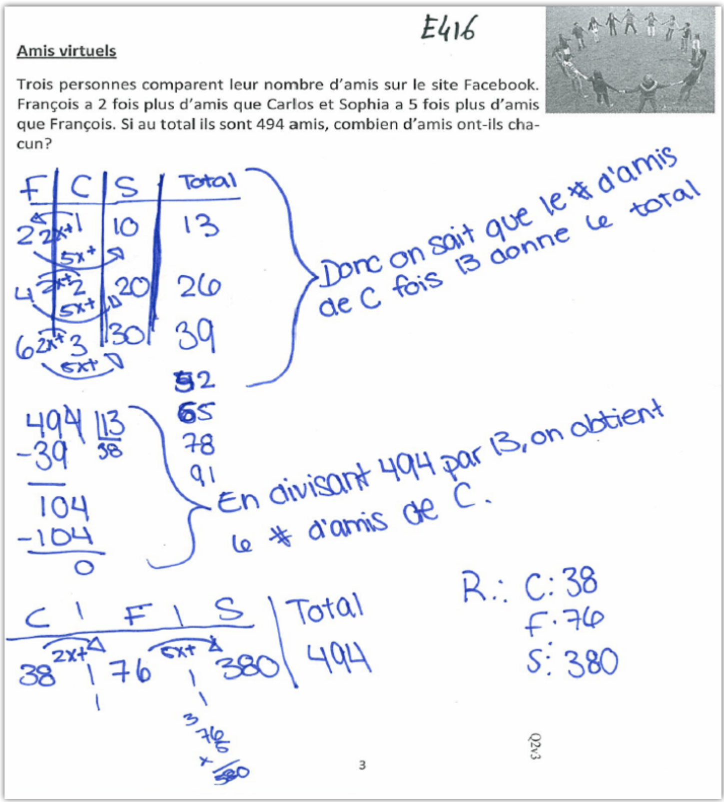
- L'élève commence par opérer sur les nombres donnés en effectuant 315 – 127 et il essaie la valeur trouvée 188 comme valeur de l'inconnue en lien avec le soccer. À l'aide de cette valeur et des relations précisées dans le problème, il calcule ensuite les valeurs des deux autres inconnues (90 pour le tir à l'arc et 61 pour le canoë) ainsi que le total des trois nombres obtenus (339). Il calcule la différence entre le total obtenu et le total désiré: 339 – 315 = 24. Pour ajuster les valeurs des trois inconnues, il réduit chacune des valeurs du tiers de 24 soit 8. Il vérifie alors que le total des trois nombres obtenus (180, 82 et 53) est bien 315.

Figure 4

Dans ce cas comme précédemment le registre est numérique. La table de valeurs sert comme moyen d'organisation des essais numériques. La première opération 315 – 127 = 188 permet à l'élève de créer un état initial (Bednarz et Janvier, 1996) et pouvoir ainsi opérer sur des données connues. L'élève se comporte ainsi comme dans le schéma d'un raisonnement non analytique. Voyant que le total des valeurs initiales des trois inconnus dépasse le total désiré, il va réduire chacune de ces valeurs du tiers de la différence entre le total obtenu et le total désiré. Cette démarche permet de bien ajuster les valeurs initiales compte tenu de la structure additive du problème[5]. Nous disons que cet ajustement est raisonné, l'élève obtient la valeur recherchée de chacune des inconnues en raisonnant sur le résultat d'un premier essai.

4.2 Raisonnements à tendance analytique

4.2.1 Raisonnements fonctionnels, registre table de valeurs numériques



- L'élève dresse une table de valeurs et donne les valeurs 1, 2 et 3 à la variable *nombre d'amis de Carlos*. En faisant fonctionner les relations, il génère dans chaque cas les valeurs correspondantes des deux autres ainsi que le total.

- En comparant les valeurs de la variable *nombre d'amis de Carlos* et la variable dépendante *total des amis* des trois personnes, il déduit la relation fonctionnelle: le nombre d'amis de Carlos fois 13 donne le total. Sachant que le total vaut 494, il divise ce nombre par 13 pour trouver le nombre d'amis de Carlos et déduit alors les nombres d'amis de François et de Sophie et vérifie que le total donne bien 494.

Figure 5

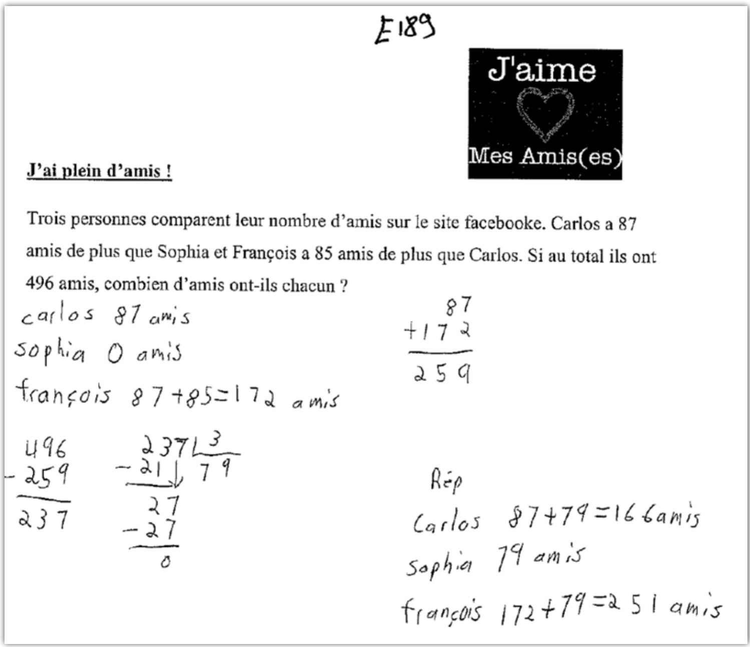
5 En effet, si x, y et z désignent les valeurs initiales des trois inconnues, $t = x + y + z$, le total obtenu, T le total réel, $r = t - T$. Selon les conditions du problème nous avons: $x = y + a$ et $x = z + b$ où a et b sont des nombres déterminés. Alors $x - r/3$, $y - r/3$ et $z - r/3$ sont les solutions du problème. En effet, on peut facilement vérifier que $x - r/3 = y - r/3 + a$; $x - r/3 = z - r/3 + b$ et que $(x - r/3) + (y - r/3) + (z - r/3) = t - r = T$.

Le registre utilisé est numérique. Les lettres F, C et S servent comme désignation des variables. La table des valeurs sert comme table des valeurs des différentes relations, implicitement fonctionnelles, entre les variables. Elle permet tout particulièrement de réfléchir sur la règle de la relation fonctionnelle entre la variable *nombres d'amis de Carlos* et la variable *nombre total des amis*. Le choix de la valeur 1 pour le nombre d'amis de Carlos montre que le schéma de raisonnement de cet élève est différent des cas des raisonnements non analytiques. En effet, l'élève ne tente pas de deviner la valeur juste de l'inconnue et d'ajuster ensuite son essai. Le nombre d'amis de Carlos ainsi que le total sont momentanément considérés comme variables liées par une relation fonctionnelle. Les valeurs numériques sont des instanciations spécifiques de ces variables. L'élève infère la régularité (la règle de cette relation) à partir de quelques cas spécifiques. Nous sommes ici dans le scénario d'une généralisation arithmétique, car la régularité est obtenue non pas en réfléchissant sur la structure des relations qu'entretiennent les nombres dans la situation, mais sur leur qualité «nombrante» dans le cadre numérique et implicitement fonctionnel. Pour cette raison nous disons que ce raisonnement est à tendance analytique, car son degré d'analycité est non nul, mais non optimal.

4.2.2 Raisonnements de type fausse position, registre numérique

L'élève donne une valeur spécifique à une des inconnues qu'il sait fausse, génère les valeurs des autres inconnues à l'aide des relations connues. En se basant sur l'écart obtenu entre le nombre total désiré et le nombre total obtenu, il ajuste en conséquence la valeur du nombre de départ en prenant en compte les relations entre les inconnues.

Le registre est ici uniquement numérique (voir figure 6). Ce raisonnement est de nature hypothéticodéductif. En affectant la valeur 0 à l'inconnue la plus petite, l'élève fait comme si cette inconnue possédait cette valeur, ce qui lui permet de générer les valeurs des deux autres inconnues. L'élève sait manifestement que cette valeur est fausse, la suite de la résolution montre qu'il sait comment corriger cette valeur initiale après avoir obtenu le total de la somme des trois inconnues. Nous sommes donc bien dans le scénario des raisonnements de type fausse position. Par ailleurs, le choix de 0 comme valeur initiale est judicieux dans les problèmes de partage inéquitable à structure additive. En effet, le total des valeurs fausses correspond au total des écarts entre chacune des deux inconnues et l'inconnue de référence Sophia. En soustrayant ce nombre du total des trois inconnues, on obtient le triple de la valeur réelle de l'inconnue Sophia. Nous voyons que l'élève maîtrise bien l'équation mathématisant le problème bien qu'elle reste implicite. Ce raisonnement peut être interprétée également comme une version additive du cas d'un raisonnement proportionnel avec retour à l'unité, dans le cas des problèmes multiplicatifs.



E189

J'aime
Mes Amis(es)

J'ai plein d'amis !

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site facebooke. Carlos a 87 amis de plus que Sophia et François a 85 amis de plus que Carlos. Si au total ils ont 496 amis, combien d'amis ont-ils chacun ?

carlos 87 amis
sophia 0 amis
françois 87+85=172 amis

87 + 172 = 259

496 − 259 = 237

237 ÷ 3 = 79 (−21, 27, −27, 0)

Rép
Carlos 87+79=166 amis
sophia 79 amis
françois 172+79=251 amis

- Le problème est déconnecté, de type composition de deux relations, ces relations étant des relations de comparaisons additives.
- L'élève identifie et nomme les trois inconnues par les noms des personnes. Il comprend que l'inconnue Sophia a la plus petite valeur. Il lui affecte la valeur 0 et génère les valeurs des deux autres inconnues à partir des relations. Il calcule le total des trois valeurs et obtient 259. Il soustrait cette valeur du total des amis des trois personnes: 496 − 259 = 237. Il divise le résultat par trois: 237 ÷ 3 = 79. Il ajuste les trois valeurs initiales des trois inconnues en leur ajoutant 79.

Figure 6

4.2.3 Raisonnements de type fausse position, registre intermédiaire

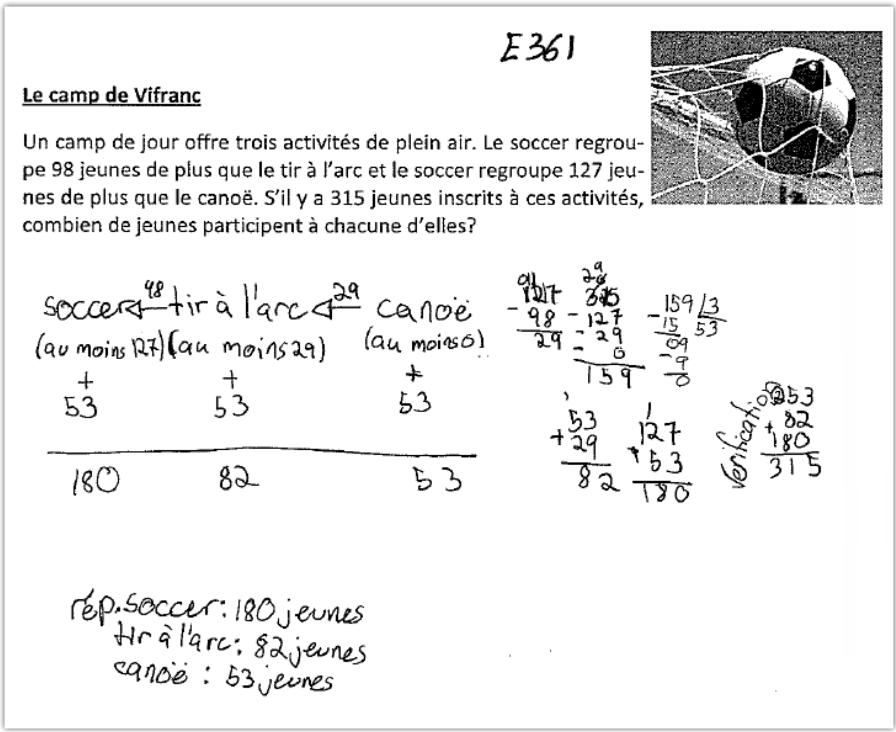
Comme dans le cas du raisonnement qui précède celui-ci (voir figure 7, p. 54) est du type fausse position. Mais le registre de représentation est intermédiaire. L'élève utilise des schémas pour représenter les relations entre les différentes inconnues, pour opérer sur ces relations (trouver que l'écart entre canoë et tir à l'arc est de 29), et pour représenter l'équation mathématisant le problème.

4.2.4 Raisonnements à tendance analytique, inconnues explicites, registre algébrique

L'élève représente les inconnues par des lettres, utilise ces lettres pour représenter les relations et l'équation mais n'opère pas sur ces représentations (voir figure 8, p. 55).

Certains élèves utilisent ces représentations à l'aide de signes alphanumériques comme support mémoriel, tandis que le traitement reste arithmétique. L'usage des signes alphanumériques est fait uniquement dans un but de désignation en se donnant des règles de formation et non pas de traitement (Duval, 1995).

L'élève utilise donc de façon correcte le registre algébrique pour former les équations, mais il ne sait pas utiliser les règles de traitement et pour cela il a recours au registre numérique essentiellement mobilisé sous la forme de calculs posés. Dans cette résolution, l'élève utilise les lettres comme désignations des inconnues, il n'opère pas sur ces lettres; et ses raisonnements restent toujours attachés au contexte. Le fait d'avoir choisi l'inconnue C comme inconnue de référence, dont la valeur est la plus petite des trois, fait en sorte que tous les calculs qu'il a réalisés ont une signification dans le contexte. Ce qui n'aurait pas été le cas s'il avait choisi S ou T comme inconnue de référence. En effet, les différences entre les inconnues ne seraient pas toutes positives et cela aurait entraîné l'augmentation du nombre total des jeunes inscrits dans les activités sportives lorsqu'on ramène les inconnues à une seule.



E361

Le camp de Vifranc

Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles?

soccer $\xrightarrow{98}$ tir à l'arc $\xrightarrow{29}$ canoë

(au moins 127) (au moins 29) (au moins 0)

+ 53 + 53 + 53

180 82 53

127 − 98 = 29

315 − 127 − 29 = 159

159 ÷ 3 = 53

53 + 29 = 82

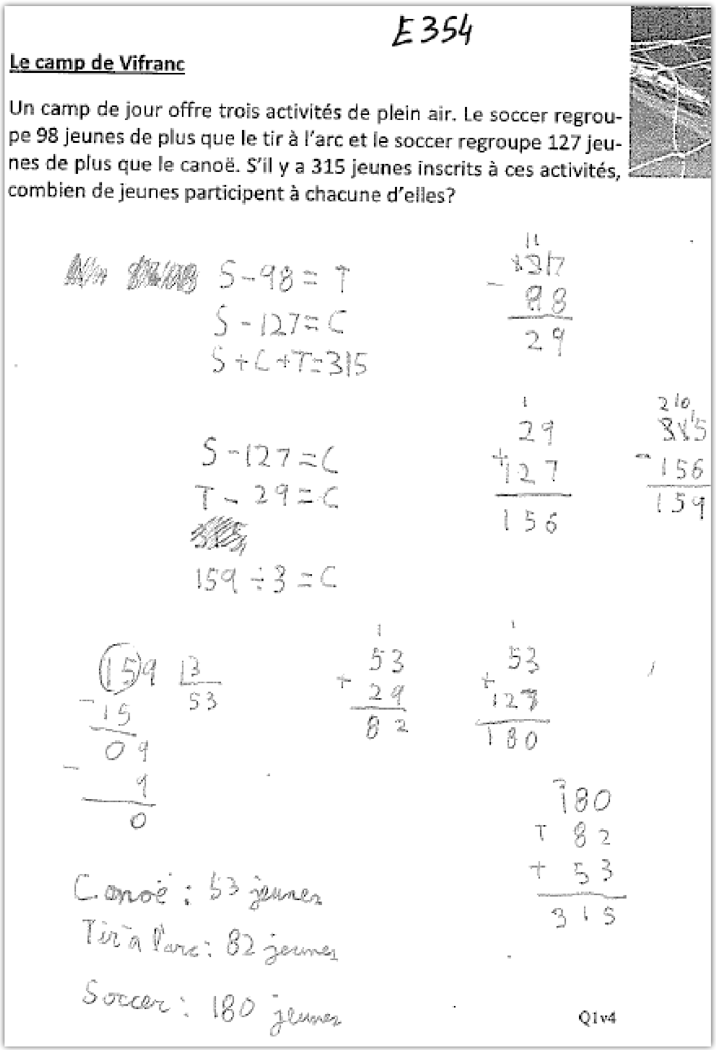
127 + 53 = 180

vérification: 53 + 82 + 180 = 315

rép. soccer: 180 jeunes
tir à l'arc: 82 jeunes
canoë: 53 jeunes

- L'élève ordonne les inconnues de la plus grande à la plus petite, réécrit les relations entre les inconnues successives, en les schématisant par des flèches; en s'appuyant sur cette représentation son raisonnement aurait alors été le suivant: la valeur de l'inconnue *canoë* est au moins 0. Il s'ensuit que la valeur de l'inconnue *tir à l'arc* est au moins 29 et celle du *soccer* au moins 127. Si l'on soustrait ces valeurs du total réel de ces trois inconnues (315) on trouve 159. Il manquerait donc 159 au total des trois valeurs initiales des trois inconnues. Pour maintenir vraies les relations schématisées par les flèches, il faut répartir équitablement ce manque sur les trois valeurs initiales. Ce qui revient à augmenter ces valeurs de $159 \div 3 = 53$.

Figure 7



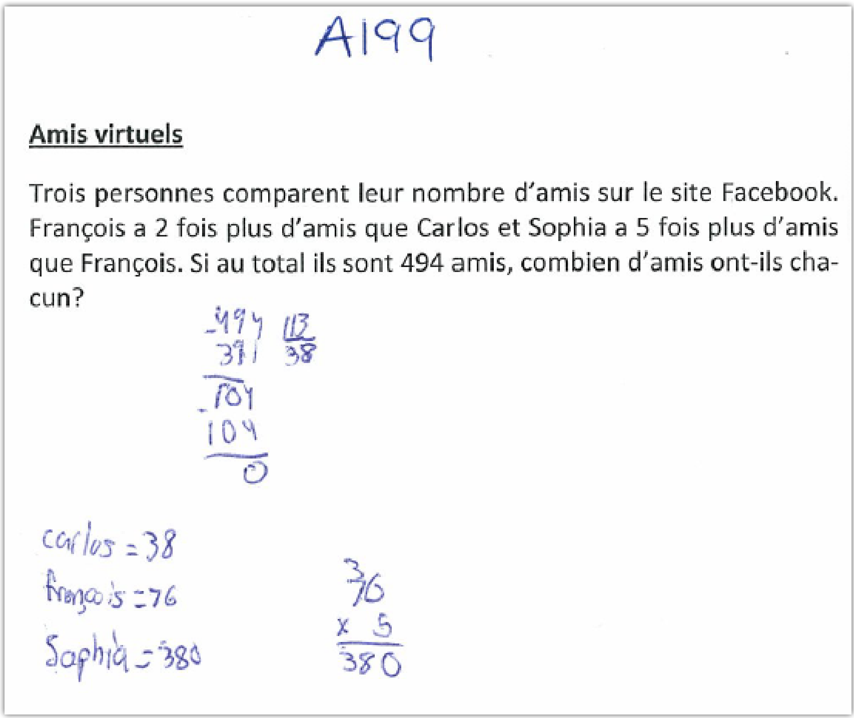
- L'élève traduit les trois relations entre les inconnues en représentant explicitement les inconnues par des lettres (première lettre du nom de l'activité): S − 98 = T, S − 127 = C et S + C + T = 315.
- Son calcul 127 − 98 = 29 montre qu'il veut calculer l'écart entre les inconnues C et T. Cela lui permet de récrire les relations entre les inconnues en fonction de l'inconnue C: S − 127 = C et T − 29 = C. Il a maintenant trois inconnues dont deux présentent des surplus par rapport à C de 29 et 127 et dont la somme vaut 315. En soustrayant le total des surplus de 315, on obtient le triple de la valeur de C. Ce raisonnement explique les calculs: 29 + 127 = 156; 315 − 156 = 159; 159 ÷ 3 = 53.
- Il déduit alors la valeur de l'inconnue C = 53 et ensuite celles des deux autres inconnues.

Figure 8

4.3 Raisonnements analytiques

4.3.1 Raisonnements analytiques, inconnues non représentées explicitement, registre numérique

Le registre est uniquement numérique, mais il ne rend pas compte de tout le raisonnement de l'élève qui s'est appuyé sur des représentations mentales non accessibles au chercheur. Dans ce raisonnement, l'inconnue principale *nombre d'amis de Carlos* n'est pas représentée explicitement ni l'équation mathématisant le problème. Nous dirons alors que l'inconnue et l'équation sont muettes bien qu'elles soient objets de la pensée de l'élève. Nous avons ici un exemple d'un raisonnement analytique alors que le registre de représentation est purement numérique.


A199

Amis virtuels

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site Facebook. François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun?

494 | 13
-391 | 38
104
-104
0

carlos = 38
françois = 76
Sophia = 380

76
x 5
380

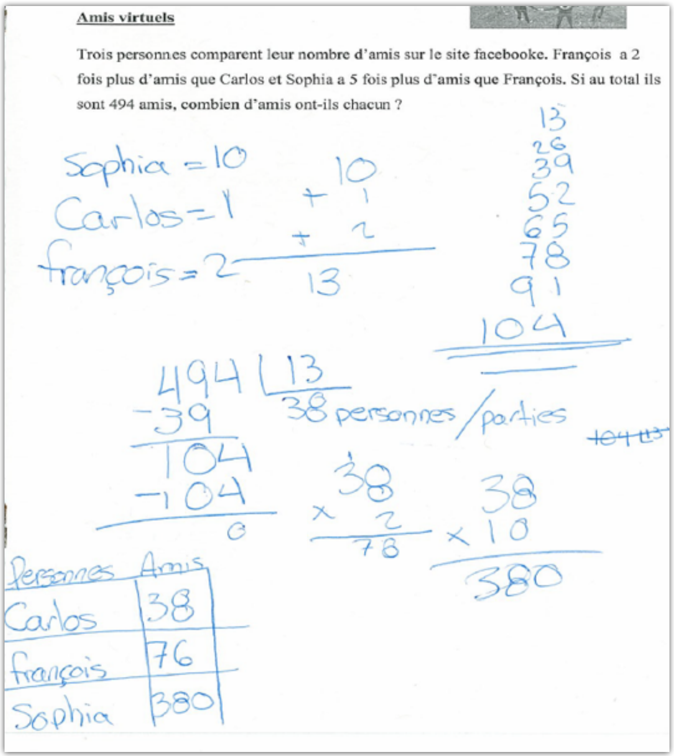
- La division du nombre total d'amis par 13 et l'affectation du résultat de cette division au nombre d'amis de Carlos montrent que l'élève saisit bien l'équation du problème: le nombre total d'amis est 13 fois le nombre d'amis de Carlos. Cette équation découle d'une bonne interprétation des relations entre les trois inconnues: si Sophia a 5 fois plus d'amis que François et que ce dernier a 2 fois plus d'amis que Carlos, alors Sophia a 10 fois plus d'amis que Carlos. Le total des amis des trois personnes est donc 13 fois celui de Carlos.

Figure 9

4.3.2 Raisonnements analytiques, inconnue intermédiaire, registre numérique

L'élève semble saisir la structure multiplicative du problème et que les trois inconnues sont des multiples de l'inconnue *nombre d'amis de Carlos*. Le total des nombres d'amis des trois personnes étant le tout, Carlos en a une partie, François le double donc 2 parties et Sophia en a 5 fois plus que François donc 10 parties. Le terme «partie» est un substitut de l'inconnue, il joue le rôle d'inconnue intermédiaire dont il faut calculer sa valeur en nombre d'amis. Le tout est donc constitué de 13 parties qui totalisent 494 amis (ou personnes selon l'élève). Pour trouver la valeur d'une partie en nombre de personnes, l'élève fait la division de 494 par 13. Il en déduit que le nombre d'amis de Carlos est 38 et en déduit ensuite les nombres d'amis de François et de Sophia

Le raisonnement est analytique, l'élève opère sur une inconnue intermédiaire qu'il tient comme substitut à l'inconnue originale. Le registre est numérique.



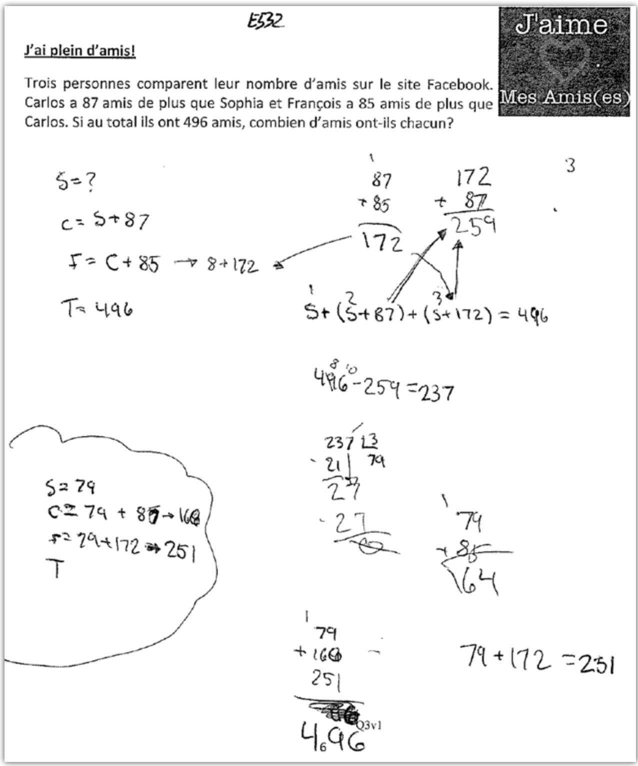
- L'élève désigne les inconnues par les noms des trois personnes. Il détermine que Carlos est l'inconnue ayant la plus petite valeur. Il lui affecte la valeur 1. Dans le cours de la résolution, nous comprenons que le 1 désigne une partie du total des amis. Il génère alors les valeurs des deux autres inconnues et calcule le total des valeurs des trois inconnues. Il trouve 13 (parties). Il entreprend alors la division du nombres total des amis (494) par 13. Il trouve 38 personnes/partie. Il en déduit alors les valeurs des trois inconnues.
- Dans son exécution de l'algorithme de division de 498 par 13, il utilise la technique de l'addition réitérée de 13 pour trouver le multiplicateur 8; l'addition réitérée s'arrête quand l'élève obtient 104 qui est le reste intermédiaire.

Figure 10

4.3.3 Raisonnements analytiques, registre de représentation algébrique conventionnel, sans perte de lien avec le contexte

Dans cette classe de raisonnements, l'élève utilise des lettres pour représenter les inconnues, les relations et l'équation. Il opère sur ces représentations sans se détacher du contexte.

L'élève utilise le registre algébrique pour modéliser le problème posé et il utilise une règle de traitement, à savoir la règle de substitution, mais il n'explicite pas les transformations algébriques dans ce registre. Il a recours au registre numérique pour opérer sur les nombres donnés. En ne simplifiant pas l'écriture de l'équation $S + (S + 87) + (S + 172) = 496$ en $3S + 259 = 496$, l'élève laisse visibles les relations entre les différentes inconnues et ainsi garde le lien entre l'équation et le contexte du problème.



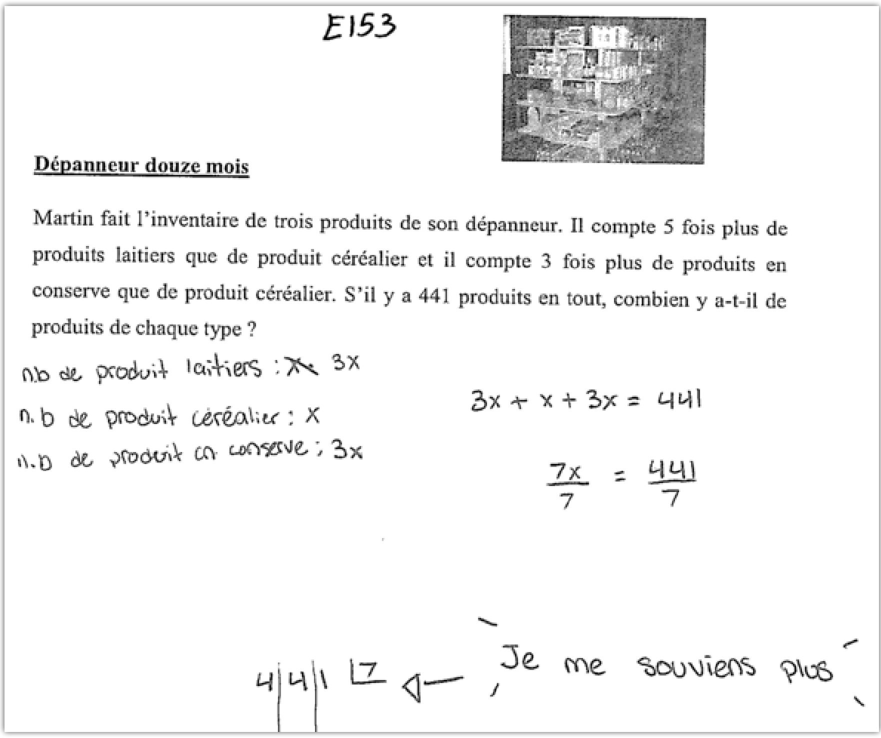
- L'élève entame sa résolution comme dans le cas d'une démarche de résolution algébrique conventionnelle. Il traduit les relations dans le problème en représentant les inconnues par la première lettre du nom des personnes et le total par la lettre T. Il exprime les deux autres inconnues en fonction de S, l'inconnue ayant la plus petite valeur. Il exprime ensuite l'équation mathématisant le problème en fonction de l'inconnue S. Il compte le nombre d'occurrences de l'inconnue S et la valeur totale des deux nombres dans l'équation. Puis il réalise les calculs numériques pour trouver la valeur de l'inconnue comme dans le cas des raisonnements à tendance analytique où l'inconnue est muette (voir par exemple la démarche de l'élève A199, figure 9).

Figure 11

4.3.4 Raisonnement analytique, registre de représentation algébrique conventionnel, avec perte de lien avec le contexte

L'élève choisit des représentations explicites des inconnues, des relations et de l'équation. Il opère sur ces représentations sans se rattacher au contexte.

Le registre du langage naturel lui permet de relier les éléments de l'énoncé aux désignations algébriques. Ensuite, c'est le registre algébrique qui est utilisé et le cadre de travail de l'élève est typiquement celui de l'algèbre. L'élève utilise donc ce registre algébrique pour modéliser le problème, mais aussi pour en faire le traitement en se donnant le droit d'oublier le contexte initial. De façon paradoxale, cet élève est arrêté par un traitement dans le registre numérique, car il ne se souvient plus de l'algorithme de la division!



E153

Dépanneur douze mois

Martin fait l'inventaire de trois produits de son dépanneur. Il compte 5 fois plus de produits laitiers que de produit céréalier et il compte 3 fois plus de produits en conserve que de produit céréalier. S'il y a 441 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type ?

n.b de produit laitiers : ~~x~~ 3x

n.b de produit céréalier : x

n.b de produit en conserve ; 3x

$3x + x + 3x = 441$

$\frac{7x}{7} = \frac{441}{7}$

4|4|1 |7 ◁— « Je me souviens plus »

- La résolution de l'élève E153 illustre une démarche algébrique conventionnelle. L'élève n'hésite pas à opérer sur l'équation pour la simplifier et isoler l'inconnue x utilisant les transformations algébriques sans rattachement au contexte.

Figure 12

5. Conclusion

Nous avons proposé une grille d'analyse des raisonnements des élèves dans des problèmes de type partage inéquitable. La grille propose d'analyser ces raisonnements selon leur «degré» d'analycité, et selon la nature du registre de représentation sémiotique des inconnues et des relations et équations. Aussi la grille prévoit trois grandes catégories de raisonnement. La catégorie des raisonnements non analytique (degré d'analycité nul), la catégorie des raisonnements à tendance analytique (degré d'analycité non nul, mais non optimal) et la catégorie des raisonnements analytiques (degré d'analycité maximal). Pour fonder épistémologiquement cette manière de catégoriser les raisonnements, nous avons réalisé une brève analyse du rôle qu'a joué la méthode analytique à certaines étapes de l'histoire de l'algèbre élémentaire. Ce cadre d'analyse en trois catégories et selon les deux dimensions susmentionnées peut s'appliquer à l'analyse de raisonnements d'autres types de problèmes algébriques autres que ceux de partage inéquitable. En outre, une utilisation de la grille d'analyse dans un contexte différent que celui du Québec, ou avec d'autres types de problèmes, peut amener à un enrichissement de la liste des sous-catégories de raisonnements que nous avons déterminés après analyses de productions réelles d'élèves.

Par ailleurs, l'application de cette grille illustre bien que l'enjeu du passage d'une démarche de résolution arithmétique de résolution de problèmes à une démarche de résolution algébrique ne réside pas dans le recours aux signes alphanumériques mais dans le caractère analytique du raisonnement mobilisé. La grille d'analyse a bien permis de distinguer des raisonnements d'élèves analytiques mais où le registre est purement numérique ou intermédiaire. Aussi, elle a permis découvrir des raisonnements non analytiques bien qu'ils recourent aux signes alphanumériques.

Notre recherche semble offrir un cadre d'analyse prometteur, que nous mettrons à l'épreuve sur d'autres corpus de données et qui pourra évoluer, pour mieux comprendre ses apports potentiels.

Références

Adihou, A., Squalli, H., Saboya, M., Tremblay, M. et Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF2015 – GT3* (p. 206-219).

Anbouba, A. (1978). L'algèbre arabe aux ɪxᵉ et xᵉ siècles. Aperçu général. *Journal for the History of Arabic Sciences*, *2*, 66-100.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis. In J. P. da Porte et J. F. Matos (dir.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (p. 64-71). Lisbonne: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (p. 115-136). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (dir.) (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Boutroux, P. (1913). L'objet et la méthode de l'analyse mathématique. *Revue de métaphysique et de morale, 21*(3), 307-328.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique: le numérique en questions. Habilitation à diriger des recherches*. Montpellier: Université Montpellier 2.

Charbonneau, L. et Lefebvre, J. (1992). Grandes lignes de l'évolution de l'algèbre: de la pluralité à l'unicité. Dans *Actes du colloque portant sur l'émergence de l'algèbre* (p. 7-16). Montréal: CIRADE, Université de Québec à Montréal.

Chevallard, Y. (1989). Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche. *Publication de l'IREM d'Aix-Marseille, 16*. Marseille: IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'*été, *4-11 juillet 1998, La Rochelle* (p. 89-120). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe. Genèse d'un art.* Paris: Vuibert.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang SA.

Gascon, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit x*, *37*, 43-63.

Hintikka, J. et Remes, U. (1964). *The Method of Analysis. Its Geometrical Origin and its General Significance*, Ser. «Boston studies in the philosophy of science, vol. 75». Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 329-354.

Hitt, F. et Passaro, V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes: le rôle des représentations spontanées. Dans *Actes de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM-59)* (p. 117-123). Dobogókő, Hongrie, juillet 2007.

Itard, J., Bouveresse, J. et Sallé, É. (1977). *Histoire des mathématiques*. Paris: Larousse.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In A. D. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde: un problème de la profession*. Thèse de doctorat. Université Montpellier 2, Montpellier, France.

Lins, R. C. (1992). *A Framework for Understanding what Algebraic Thinking Is.* Thèse de doctorat. University of Nottingham, Nottingham, Royaume-Uni.

Lins, R. C. (1993). Understanding what algebraic thinking is: Analysis and synthesis. A contribution at the ESRC seminar group on algebraic processes and the role of symbolism. London: University of London.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ*, *39*(4), 30-42.

Marchand, P. et Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. *Bulletin AMQ*, *40*(4), 15-25.

Mason, J. et Binns, L. (1993). Exploration of Vergnaud's theorem-in-action in the context of algebra. A contribution at the ESRC seminar group on algebraic processes and the role of symbolism. London: University of London.

Pimm, D. (1995). *Symbols and Meaning in School Mathematics*. New York: Routledge.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19.

Radford, L. (2015). Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Dans *Actes EMF2015 – GT*3.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (dir.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (p. 3-25). Cham: Springer International Publishing AG 2018.

Rashed, R. (1984). *Entre arithmétique et algèbre. Recherche sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris: Les Belles Lettres.

Saboya, M., Besançon, V., Martin, F., Adihou, A., Squalli, H. et Tremblay, M. (2013). Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre: analyse de productions d'élèves du premier cycle du secondaire. Dans *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (p. 112-122).

Sesiano, J. (1977). Le traitement des équations indéterminées dans le Badi fi'l-Hisāb d'Abū Bakr Al-Karajī. *Archive for History of Exact Sciences*, *17*(4), 297-379.

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base*. Thèse de doctorat. Université Laval, Québec, Canada.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans *Actes EMF2015 – GT3*.

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre: cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique*, vol. 1 (p. 65-78). Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive task and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser et T. A. Romberg (dir.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (p. 39-59). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Youschkevitch, A. P. (1976). *Les mathématiques arabes. VIII*e*-XV*e* siècles*. Traduction française de M. Cazenave et K. Jaouiche. Paris: Vrin.