Revue des sciences de l'éducation

Des modèles de la compréhension

Nicolas Herscovics et Jacques C. Bergeron

Volume 8, numéro 3, 1982

URI : https://id.erudit.org/iderudit/900392ar
DOI : https://doi.org/10.7202/900392ar

Éditeur(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (imprimé)
1705-0065 (numérique)

Des modèles de la compréhension[1]

Introduction

Si la compréhension était l'un des buts visés par le renouveau des programmes de mathématiques qui suivit le lancement de Sputnik, les réformes des années cinquante et soixante échouèrent dans l'atteinte de cet objectif. Peut être personne n'a-t-il expliqué ceci mieux que Richard Skemp :

> Certains réformateurs tentent de présenter la mathématique comme un développement logique. Cette approche est louable dans le sens qu'elle se propose de montrer que la mathématique a du sens et qu'elle n'est pas arbitraire, mais elle est en erreur de deux façons. Premièrement, elle confond les approches logique et psychologique. Le but principal d'une présentation logique est de convaincre ceux qui doutent ; celui d'une présentation psychologique est d'amener la compréhension. Deuxièmement, la présentation logique ne fournit que le produit final de la découverte mathématique (« Voici ce que c'est : tout ce que tu dois faire c'est de l'apprendre »), et elle échoue dans sa tentative à faire naître chez celui qui

> apprend les processus par lesquels les découvertes mathématiques sont faites. Elle enseigne la pensée mathématique, non pas le processus de pensée mathématique.
>
> (R.R. Skemp, 1971, p. 13)[2]

Alors que l'introduction des mathématiques modernes apportait un changement souhaitable aux programmes traditionnels basés sur l'enseignement d'algorithmes, la présentation formelle qui l'accompagnait fut elle-même la source de certains problèmes pédagogiques par le fait qu'elle mettait l'accent sur le vocabulaire, la notation, et la manipulation de symboles. Cette approche pouvait facilement mener à confondre les idées mathématiques et leur symbolisation et à méprendre « la manipulation de symboles » pour « la compréhension des transformations en jeu ».

Depuis longtemps le besoin de comprendre a été identifié comme le problème majeur dans l'apprentissage de la mathématique. Car en l'absence de compréhension, la mathématique devient rapidement un fardeau écrasant de règles et de symboles qu'il s'agit d'apprendre par cœur, et de manipulations dénuées de sens. Et tout aussi important que puisse être la compréhension, lorsque vient le moment de l'employer et de la définir globalement dans un contexte significatif au plan pédagogique, c'est-à-dire en dépassant la simple acquisition d'habiletés, cela s'avère toujours une tâche impossible : nous sommes emprisonnés par nos mots, et inévitablement, ne pouvons nous entendre sur leur signification précise. La « compréhension » ne peut être dissociée de la « pensée », de la « connaissance » et de l'« apprentissage» puisque la compréhension découle de la pensée qui, elle, n'opère pas à vide, mais sur des connaissances acquises à la suite d'un apprentissage antérieur.

Bien que la recherche d'une définition de la « compréhension de la mathématique » qui soit universellement acceptable demeure un problème épineux, il faut se rappeler que les mathématiciens eux-mêmes ne peuvent s'entendre sur la nature de la mathématique. En effet, trois écoles de pensée, les logiciens, les formalistes, et les intuitionnistes, perçoivent leur discipline de trois façons bien différentes (Dionne, 1982). Donc, si les mathématiciens ont différentes interprétations de ce qu'est leur discipline, il n'y a rien d'étonnant à ce qu'ils ne s'accordent pas sur une définition de sa compréhension. Cependant, tout comme le manque d'accord sur la nature de la mathématique ne l'a pas empêchée de croître, de même le progrès de la didactique ne dépend pas d'une définition de la compréhension qui fasse l'unanimité.

Brève rétrospective

Plusieurs modèles de la compréhension ont été suggérés, modèles qui sans proposer des définitions, ont du moins essayé d'identifier des critères appropriés pour sa description. Bien entendu, un choix judicieux de ces critères devrait fournir les moyens d'effectuer une analyse cognitive des divers concepts enseignés, ainsi qu'une interprétation de ce que l'on entend par « compréhension », et cela dans un sens plus large que simplement « donner la bonne réponse ».

Dans ce sens, nous pouvons considérer Bruner comme celui ayant suggéré l'un des premiers modèles de la compréhension, sans qu'il ne s'y soit jamais référé en tant que modèle et même s'il interchangeait à volonté les mots « pensée » et « compréhension ». Dans son chapitre sur « La pensée intuitive et la pensée analytique », il soulignait « l'importance de la compréhension intuitive de l'élève en contraste avec sa compréhension formelle des sujets qu'il rencontre » (Bruner, 1960, p. 55). Même s'il se préoccupait de l'acquisition de connaissances en général, son intérêt pour l'apprentissage de la mathématique est mis en évidence par un chapitre entier qui y est consacré dans un livre publié deux ans plus tard (Bruner, 1962). Voici comment Bruner décrit la pensée intuitive et la pensée analytique :

> De façon caractéristique, la pensée analytique procède un pas à la fois. Les étapes sont explicites et d'habitude elles peuvent être rapportées adéquatement par le penseur à un autre individu. Cette forme de pensée procède relativement en pleine conscience de l'information et des opérations en jeu. Elle peut recourir à un raisonnement déductif et prudent, souvent en employant des mathématiques ou la logique, ainsi qu'un plan d'attaque bien établi. Ou bien, elle peut avancer pas-à-pas dans un processus d'induction et d'expérimentation, en employant des principes utilisés dans des plans de recherche et des analyses statistiques.
>
> En contraste avec la pensée analytique, la pensée intuitive se caractérise par le fait qu'elle n'avance pas prudemment par étapes bien définies. De fait, elle tend à faire appel à des manœuvres qui semblent basées sur une perception implicite du problème pris globalement. Le penseur arrive à une réponse, bonne ou mauvaise, avec peu, sinon aucune conscience des processus par lesquels il y est arrivé. Il peut rarement fournir un compte rendu adéquat de la façon dont il a obtenu sa réponse et il peut être inconscient des aspects particuliers de la problématique auxquels il réagissait.
>
> (Bruner, 1960, p. 57-58)

Bruner a souligné la nature complémentaire de ces deux modes en indiquant que l'intuition dépend de la familiarité que l'on possède d'un domaine de connaissances et que les raccourcis qu'elle nous fournit doivent ensuite être vérifiés par des moyens plus analytiques. Bien que son modèle se situait sur le plan général, celui proposé par Skemp en 1976 était spécifique à l'apprentissage de la mathématique. Skemp a signalé deux interprétations courantes données au mot « compréhension » :

> Il y a quelques années, Stieg Mellin-Olsen de l'Université de Bergen, a porté à mon attention le fait que deux interprétations de ce mot sont couramment employées. Il distingue celles-ci en les nommant « compréhension relationnelle » et « compréhension instrumentale ». La première signifie ce que j'ai toujours entendu par la compréhension, et probable-

> ment la plupart des lecteurs de cet article : à la fois savoir quoi faire et pourquoi. Quant à la compréhension instrumentale, jusqu'à récemment je ne l'aurais pas du tout considérée comme compréhension. Elle est ce que j'ai décrit dans le passé comme « des règles sans raison », sans réaliser que pour beaucoup d'élèves, *ainsi que leurs maîtres*, la possession d'une telle règle, et la capacité de l'employer, était ce qu'ils entendaient par « compréhension ».
>
> (Skemp, 1976)

En essayant d'expliquer pourquoi tant de maîtres enseignent des « mathématiques instrumentales » Skemp remarque qu'une approche instrumentale est généralement plus facile et la récompense plus immédiate puisqu'elle fournit la bonne réponse plus rapidement. Par contre, il trouve que « les mathématiques relationnelles » s'adaptent mieux à de nouvelles tâches et que l'on s'en rappelle plus facilement, qu'elles procurent leur propre récompense et que les schèmes relationnels ont une qualité organique.

Jugeant que d'une part les deux modèles précédents étaient complémentaires et que, d'autre part, aucun d'eux ne tenait compte de la distinction entre le *contenu* (les idées mathématiques) et la *forme* (leurs représentations), Byers et Herscovics introduisaient leur modèle du tétraèdre qui décrivait les quatre modes de compréhension suivants :

> *La compréhension instrumentale* est la capacité à appliquer à la solution d'un problème une règle appropriée, apprise par cœur, sans savoir pourquoi la règle fonctionne.
>
> *La compréhension relationnelle* est la capacité à déduire des règles ou processus spécifiques à partir de relations mathématiques plus générales.
>
> *La compréhension intuitive* est la capacité à résoudre un problème sans analyse préalable de celui-ci.
>
> *La compréhension formelle* est la capacité à relier les symboles et la notation mathématiques aux idées mathématiques pertinentes et à combiner ces idées dans un enchaînement de raisonnements logiques.
>
> (Byers & Herscovics, 1977)

Le modèle était dénommé « tétraèdre » vu que les auteurs envisageaient la compréhension d'une notion mathématique à un temps donné comme un mélange des quatre composantes. Cette idée pouvait être transmise en représentant la compréhension par un point à l'intérieur d'un tétraèdre dont les sommets correspondraient aux quatre modes.

La publication de cet article a engendré de très bonnes discussions en Grande-Bretagne. Backhouse (1978) pensait que la compréhension de la forme était importante, mais déplorait le manque de préoccupation, dans le modèle du tétraèdre, pour les concepts, et contestait l'emploi de « intuitif » lorsqu'appliqué à la compréhension plutôt qu'à la pensée. Tall (1978) était d'avis que la compréhension intuitive était justifiée, que différents types de non-compréhension devraient être explorés, et insistait sur le fait que l'aspect dynamique de la compréhension devrait recevoir plus d'attention. Buxton (1978) a employé la table de multiplication par neuf pour illustrer quatre niveaux de compréhension : le par cœur (instrumental), l'observation (reconnaissance de patterns), « insightful » (relationnel), et le formel (preuve).

Ces discussions ont amené Skemp (1979) a étendre son modèle à deux dimensions en distinguant trois types de compréhension, soit instrumental, relationnel, et logique (essentiellement l'instrumental, le relationnel et le formel du modèle du tétraèdre), chacun associé à deux modes d'activité mentale (intuitif et réflexif).

	Instrumental	Relationnel	Logique
Intuitif	I_1	R_1	L_1
Réflexif	I_2	R_2	L_2

Ce modèle postule l'existence de deux éléments qui sembleraient contradictoires, celui d'une compréhension instrumentale opérant à un niveau réflexif (I_2) et celui d'une compréhension logique opérant à un niveau intuitif (L_1). L'exemple donné par Skemp pour différencier I_2 et I_1 ne se distingue que par le nombre de règles dont il faut se souvenir, alors qu'aucune illustration mathématique n'a été trouvée pour L_1. Plus récemment, Skemp (1982) a reconnu que sa première analyse de la compréhension formelle était incomplète et a suggéré que « relier la symbolisation mathématique et la notation aux idées mathématiques pertinentes » soit considéré comme un quatrième type de compréhension, la compréhension symbolique, qu'il décrit comme suit :

> La compréhension symbolique est une assimilation réciproque entre un système symbolique et une structure conceptuelle, *dominée par la structure conceptuelle*.

Si ce dernier type est ajouté aux trois premiers, on se retrouve avec une matrice de 2 x 4 donnant huit éléments différents à prendre en considération dans l'analyse de la compréhension.

Un modèle « hybride »

Une toute autre orientation se retrouve dans notre recherche visant à appliquer le modèle du tétraèdre à l'analyse de concepts mathématiques. Tel qu'un examen de la description des quatre modes de compréhension l'indique, les trois premiers traitaient surtout de règles et de résolution de problèmes et donc devaient être quelque peu modifiés. Ainsi, afin de caractériser la compréhension intuitive, nous avons ajouté des critères tels que « la perception globale » de Bruner, la perception visuelle et l'estimation (e.g. comparaison de quantités) et l'action primitive non-quantifiée (e.g. ajouter, réunir).

De même, pour les modes instrumental et relationnel, nous avons dû adapter leurs définitions à la formation de concepts. Dans ce contexte, les règles et les procédures ne constituent pas des buts en soi, mais deviennent plutôt des moyens utilisés dans la construction de nouvelles notions mathématiques. Donc le mode instrumental s'est vu attribuer le double sens de « mémorisation » et celui de « construction initiale » (e.g. dans le cas de l'addition : réunir et compter à partir de 1). Le mode relationnel s'est aussi vu attribuer un double sens, celui de « justification » que lui avait donné Skemp, et celui de « liens et relations menant à des notions d'invariance et de réversibilité » (e.g. pour l'addition : réunir et compter à partir du premier terme peut refléter une certaine invariance du nombre ; percevoir la soustraction comme l'opération inverse de l'addition est un exemple de réversibilité). Enfin, quant à la compréhension formelle, la première partie de la description de Byers et Herscovics a été employée sans aucun changement alors que la deuxième partie a été interprétée dans le sens de « justification logique » plutôt que dans le sens de « preuve formelle ».

Nous avons qualifié notre modèle d'« hybride » puisque nous greffions au modèle du tétraèdre des critères additionnels nécessaires à la description de la formation de concepts. Ce modèle a été utilisé dans une expérience visant à déterminer s'il pouvait être assimilé par des enseignants du primaire. Cette recherche, impliquant un groupe de 28 maîtres, a montré qu'ils pouvaient distinguer divers modes de compréhension pour des notions telles que le nombre, les quatre opérations arithmétiques, la notation positionnelle, ainsi que les algorithmes de l'addition et de la soustraction (Bergeron et al, 1981).

Ces analyses conceptuelles ont produit des effets psycho-pédagogiques significatifs sur les enseignants. Suite à des rencontres hebdomadaires de trois heures s'étalant sur 15 semaines, ils semblaient avoir changé leur perception de la mathématique, ainsi que de leur propre compétence en ce domaine. Et, ce qui est aussi important au point de vue didactique, les maîtres avaient développé une approche constructiviste envers l'enseignement : ils insistaient moins sur la valeur de la réponse écrite et attribuaient une importance égale aux processus de pensée. Ils étaient devenus conscients du fait qu'une forme de questionnement appropriée était la seule façon de découvrir le raisonnement de l'enfant. Cette évolution de l'attitude des enseignants a pu être réalisée malgré la complexité du modèle utilisé (Herscovics et al, 1981).

Cette expérience nous a convaincus que les modèles de la compréhension n'étaient pas seulement des outils d'une valeur théorique, mais que de fait, les maîtres pouvaient y être initiés, qu'ils pouvaient les employer pour répondre à la question « Que veut dire comprendre (une notion donnée) ? », et qu'une telle formation pouvait changer leur perspective de la nature et de l'enseignement des mathématiques. Les résultats se sont avérés tellement encourageants qu'ils justifiaient l'élaboration d'un nouveau modèle plus approprié à l'analyse de concepts mathématiques. Cependant, un examen des problèmes rencontrés par les enseignants dans l'utilisation du modèle hybride, ainsi qu'une analyse de ses contradictions internes, étaient essentiels pour éviter leur réapparition.

Par exemple, dans un test de transfert de l'addition à la soustraction, où il s'agissait d'identifier quatre modes de compréhension pour chaque opération, 13 enseignants sur 28 se sont trompés dans leur identification, la plus grande confusion s'étant produite entre les modes intuitif et instrumental d'une part, et entre les modes relationnel et formel d'autre part. Dans le premier cas, ils ont qualifié « d'intuitive » la procédure initiale utilisée dans l'addition (e.g. réunir et compter à partir de un), et dans le second, ils ont interprété comme « relationnelle », la relation entre l'expression symbolique et ses représentations par l'image et par l'action.

Une analyse théorique du modèle hybride a révélé trois contradictions sérieuses (Bergeron & Herscovics, 1981). La première touche le mode instrumental. Tel que déjà mentionné, nous avons employé cette terminologie pour décrire un processus spécifique (la procédure initiale), et aussi pour qualifier toute chose apprise par cœur. Évidemment, par le « par cœur » nous ne faisons pas référence aux automatismes développés à la suite d'un processus d'assimilation (e.g. comme dans la mémorisation des tables, une fois que les concepts d'addition et de multiplication ont été construits). Spécifiquement, nous désignons ici les processus qui sont appris par cœur sans qu'intervienne aucun raisonnement. Or, comme la compréhension implique nécessairement les processus de pensée, toute mémorisation d'où le raisonnement est absent peut difficilement être qualifiée de compréhension.

La seconde contradiction fait intervenir les modes instrumental et relationnel. En effet, en ajoutant la justification, ainsi que d'autres critères basés sur des procédures, différentes évaluations contradictoires de la compréhension deviennent possibles. Par exemple, la compréhension de l'addition, chez un enfant qui compte à partir de un, peut être qualifiée d'instrumentale puisqu'elle répond au critère de « procédure initiale ». D'autre part, elle peut aussi être qualifiée de relationnelle si l'élève peut la justifier. Comme l'indique cet exemple, un modèle de la compréhension ne peut utiliser à la fois un critère basé sur une procédure, ainsi qu'un critère basé sur sa justification. En fait, tout comme les procédures peuvent être apprises par cœur, elles peuvent aussi être justifiées. Et puisque la justification témoigne de processus de pensée et de raisonnement, elle se rattache à la notion globale de compréhension et donc ne peut pas être considérée comme l'attribut d'aucun mode particulier.

Une troisième contradiction est rattachée aux modes relationnel et formel. Dans le modèle que nous avons utilisé, la justification a servi de critère au mode relationnel. Cependant, comme déjà mentionné, toute justification fait appel à la logique de l'enfant et peut même révéler « une combinaison d'idées mathématiques en un enchaînement de raisonnements logiques ». Il en découle donc qu'un même indice de compréhension peut être qualifié à la fois de relationnel et de formel.

Les contradictions que nous venons de décrire proviennent du fait que nous avons essayé de greffer sur le modèle du tétraèdre des critères nécessaires à l'analyse conceptuelle. C'est ainsi que nous nous sommes retrouvés avec un modèle hybride qui, comme l'a souligné Skemp (1981), tentait de décrire à la fois les divers états de la compréhension, ainsi que sa construction. Bien plus, il devint de plus en plus évident qu'un seul modèle ne pourrait jamais refléter de façon adéquate la compréhension impliquée dans des activités mathématiques aussi diverses que la formation de concepts, la résolution de problèmes, ou l'élaboration de preuves logiques. Voilà pourquoi, dans une nouvelle tentative, nous nous sommes limités à un modèle se rapportant à la construction de concepts.

Un modèle constructiviste de la compréhension

La construction de concepts mathématiques — Un examen des recherches sur l'acquisition des concepts fondamentaux enseignés, même au niveau primaire, montre que leur construction s'étale sur plusieurs années (Piaget & Szeminska, 1947/1967). Voilà pourquoi il est difficile d'étudier ce genre d'apprentissage dans le contexte du paradigme usuel touchant la formation de concepts, lequel se limite à définir un concept par une liste d'attributs caractéristiques (Tennyson & Park, 1980). Une grande partie de la recherche issue d'une telle perspective s'est préoccupée de trouver le nombre optimal d'exemples et de non-exemples requis pour identifier un concept donné. Cette approche peut avoir à l'occasion une certaine valeur, comme pour la notion de nombre pair et impair. Toutefois, l'acquisition d'un tel concept présume que d'autres notions plus fondamentales, telles le nombre et la notion de divisibilité, existent déjà chez l'enfant. Mais cette approche traditionnelle peut difficilement nous renseigner sur l'acquisition du nombre ou sur la divisibilité puisque ce sont là des concepts qui ne se définissent pas, au point de vue cognitif, par une liste d'attributs caractéristiques. En fait, ce sont des concepts très complexes qui en impliquent beaucoup d'autres, et qui tous doivent être reliés en un réseau cognitif. Voilà pourquoi nous utilisons les mots « notion » et « concept » comme synonymes de « schème conceptuel », une expression qui traduit mieux cette idée de réseaux cognitifs, lesquels peuvent être associés à chacun des concepts fondamentaux de la mathématique.

Et c'est plutôt dans les théories du traitement de l'information (Simon, 1979), et du constructivisme piagétien (Piaget, 1972) que l'on peut déceler une certaine influence sur notre travail. Ces théories psychologiques, ainsi que d'autres considérations propres à des besoins spécifiques de la didactique de la mathématique, ont conduit à l'identification de quatre niveaux de compréhension : le premier, celui de l'intuition, le second impliquant des procédures, le troisième traitant de l'abstraction, et le dernier niveau, celui de la formalisation.

La compréhension intuitive — Pour la plupart des notions enseignées, certains préconcepts se retrouvent, qui peuvent être considérés comme les embryons du schème conceptuel à faire construire par l'enfant. Par exemple, la réunion de deux ensembles d'objets, ou encore l'augmentation d'un ensemble de départ, sont des préconcepts de la notion d'addition. Il n'y a encore aucune quantification, peut-être au plus une simple estimation. Ce sont là des situations qui débouchent sur ce que Ginsburg (1977) qualifie de « mathématiques informelles». Même sans aucune scolarisation, l'enfant peut se rendre compte, à travers de telles expériences que, par exemple, « le tout est toujours plus grand que ses parties ». Évidemment, il ne peut pas encore verbaliser de tels principes logico-mathématiques et c'est plutôt par ses actions qu'il exprime sa pensée (Ginsburg & Opper, 1979). Et comme l'a constaté Piaget, à ce niveau sa pensée est essentiellement basée sur la perception visuelle (Piaget & Szeminska, 1947/1967) ; Piaget & Inhelder, 1947/1977). En bref, le niveau de fonctionnement cognitif que nous qualifions d'intuitif se manifeste par les connaissances « informelles » qui se caractérisent par des pré-concepts, ou une pensée basée sur la perception visuelle, ou des actions primitives non quantifiées se limitant à des estimations rudimentaires.

Plusieurs raisons pédagogiques et psychologiques nous incitent à prendre ces mathématiques informelles comme un premier niveau. Sur le plan pédagogique leur inclusion nous amène à rechercher, pour chaque concept visé, des situations appropriées et des expériences courantes dans la vie de l'enfant. En prenant celles-ci comme point de départ pour l'acquisition de nouvelles connaissances, nous garantissons à ces dernières une certaine signification et une certaine pertinence, ce qui entraîne des retombées psychologiques telle une motivation accrue. Sur le plan cognitif nous nous assurons ainsi que les mathématiques de l'enfant ont une base solide dans sa réalité et son vécu, et qu'il peut poursuivre sans aucune rupture cognitive l'élaboration de ses schèmes conceptuels.

La compréhension procédurale — Évidemment, cette mathématique informelle ne suffit pas car elle ne permet tout au plus que de vagues approximations. Et de fait, elle ne sert que d'amorce pour une étape de mathématisation qui agencera et coordonnera les connaissances intuitives et les pré-requis dans une *procédure initiale* rendant ces connaissances plus opérationnelles et plus précises. L'assimilation d'une telle procédure constitue un deuxième niveau cognitif que nous qualifions de « compréhension procédurale ». Par exemple, pour l'addition, la procédure la plus élémentaire consiste à réunir deux ensembles d'objets et à les compter à partir de un. Alors que la connaissance intuitive d'un concept peut résulter d'expériences vécues par l'enfant hors de l'école, il est clair qu'en général la compréhension procédurale est essentiellement le fruit d'interventions pédagogiques. En bref, le niveau de la compréhension procédurale est mis en évidence par l'acquisition d'une procédure initiale qui, en coordonnant les connaissances intuitives et certains pré-requis, rend possible une systématisation (e.g. quantification, organisation). Une telle systématisation devrait éventuellement susciter des processus de pensée libérés de la perception visuelle.

Avec ce deuxième niveau cognitif, celui de la compréhension procédurale, nous rejoignons une philosophie implicite qui sous-tend le traitement de l'information. Conformément à ce point de vue, nous pensons qu'un concept ne saurait se former sans une certaine procédure. Cependant nous nous en distinguons car, plutôt que de nous intéresser à la simulation de telles procédures, nous les envisageons dans un cadre plus large en les considérant seulement comme une étape dans le processus de construction de schèmes conceptuels.

L'abstraction — La compréhension procédurale que nous associons à un deuxième niveau cognitif, se rapporte essentiellement à l'acquisition d'une procédure permettant de construire formellement des notions mathématiques par lesquelles nous entendons des objets mathématiques tels que le nombre, ou des transformations mathématiques telles que les opérations arithmétiques. Il s'agit de procédures initiales et au tout début le concept visé s'estompe et se confond avec la procédure menant à sa construction (par exemple, au début, la notion de nombre se confond avec la procédure de compter). Ce n'est que graduellement que les contours d'un concept se précisent, que celui-ci se détache de la procédure, et qu'il commence à avoir une existence propre dans notre esprit. Ce cheminement décrit un processus d'abstraction que nous identifions à un troisième niveau cognitif.

Piaget (1973, p. 81-82) distingue deux sortes d'abstraction qu'il qualifie « d'abstraction empirique » (portant sur les propriétés physiques des objets) et « d'abstraction réfléchissante » (portant sur les actions et leur coordination). Notre position se rapproche de celle de Vergnaud (1981) pour qui il est parfois difficile en mathématique d'établir une ligne de démarcation précise entre ces deux types d'abstraction. Ainsi, même pour une notion aussi élémentaire que le nombre, on ne pourrait la qualifier de propriété physique. Par exemple, le nombre trois n'est une propriété d'aucun objet, mais plutôt d'ensembles d'objets. Et s'il est vrai que le concept de nombre prend sa source dans le monde physique, l'existence même de cette notion exige nécessairement un détachement de ce monde physique. Dans la construction de ce schème conceptuel par l'enfant, même le premier détachement d'objets concrets ne peut donc être considéré comme une abstraction simplement empirique. Bien entendu, il ne s'agit pas encore d'abstraction réfléchissante car l'enfant, qui à cette étape ne conserve pas encore le nombre, et cela même s'il sait compter, n'a extrait tout au plus qu'une propriété pseudo-physique d'un ensemble d'objets puisqu'il dépend encore de leur configuration. Par contre, celui qui a conscience que le nombre est invariant par rapport à la configuration ou à l'ordre dans lequel il compte fait appel à l'abstraction réfléchissante. Évidemment, la construction de telles invariances nécessite la coordination de plusieurs variables, ainsi que la réversibilité de la pensée. C'est précisément un tel processus, la construction d'invariances, qui caractérise une phase plus évoluée de l'activité mathématique. Mais cette phase ne saurait se réaliser sans que l'objet mathématique ou la transformation mathématique ne se soient détachés au préalable du concret.

Il ressort donc des considérations précédentes que le niveau cognitif que nous qualifions d'abstraction comprend deux phases, soit le détachement initial de la procédure et la construction d'invariants. Dans la première phase l'abstraction se manifeste par la capacité à choisir une procédure appropriée à une tâche donnée. Ceci démontre une certaine anticipation par rapport à l'emploi de la procédure. Par exemple, l'enfant qui compte pour identifier des ensembles équipotents prévoit que sa procédure lui permettra de répondre à la question. Puis, avec l'acquisition d'un répertoire plus varié de procédures intervient l'anticipation de leur efficacité relative. Et de fait, certaines procédures sont suffisamment évoluées pour que leur utilisation soit interprétée comme une preuve d'abstraction. Ainsi, dans le cas de l'addition, réunir deux ensembles d'objets et les compter à partir de un, constitue une procédure initiale, alors que prendre le premier ensemble comme point de départ du dénombrement est une procédure tellement plus efficace qu'elle peut être considérée comme un début d'abstraction de l'addition. La deuxième phase d'abstraction d'un concept peut donc être caractérisée, soit par sa généralisation, soit par sa conservation, laquelle reflète l'invariance de l'objet mathématique, soit par la réversibilité et la composition des transformations mathématiques.

La formalisation — Le quatrième niveau de compréhension, celui de la formalisation, prend en considération la nature particulièrement symbolique de la mathématique. Bien que « formalisation » soit souvent interprétée dans le sens d'axiomatisation ou de preuve formelle, nous lui attachons aussi une troisième signification. Dans ce mot nous retrouvons l'idée de *forme* que nous devons distinguer de *contenu*. Rappelons que par « contenu » nous entendons « les notions mathématiques », et que par « forme » nous nous référons « aux représentations de ces notions ».

Plusieurs recherches récentes ont montré que la représentation symbolique de la mathématique pose des problèmes cognitifs particuliers à tous les niveaux scolaires, du primaire à l'université. Par exemple, Ginsburg (1977) et Carpenter et Moser (1979) ont rapporté que nombre d'enfants pouvaient se débrouiller dans la résolution de problèmes tant qu'ils n'étaient pas obligés de les traiter de façon symbolique. Herscovics (1979) a montré la même chose pour l'algèbre au secondaire, et Clement (1982) pour l'universitaire. Comme la notation pose des difficultés accrues, on serait donc tenté d'identifier la symbolisation comme un quatrième niveau de compréhension. Mais les études de Erlwanger (1973, 1975), sur l'enseignement programmé, ont mis en évidence jusqu'à quel point des élèves pouvaient fort bien réussir certains tests en apprenant à manipuler des symboles dénués de sens pour eux, et en se basant uniquement sur leur disposition graphique pour dériver des règles des plus farfelues. Nous devons en conclure que la symbolisation par elle-même ne peut donc pas constituer un critère déterminant de compréhension. Cela nous a amenés à ne rattacher la symbolisation d'une notion à un quatrième niveau de compréhension *que s'il y a eu abstraction préalable de la notion*. Nous considérons donc que la formalisation se manifeste, selon la notion traitée, soit par l'utilisation du symbolisme, la validation logique d'opérations, ou la découverte d'axiomes. Mais dans tous les cas, ce niveau présuppose qu'une certaine abstraction a été faite.

Le modèle que nous venons de décrire diffère des autres en ce sens qu'il ne considère pas la compréhension en terme de différents modes, mais plutôt dans le contexte d'un processus de construction cognitive, celui de la formation de concepts. Les différents niveaux de compréhension résultent des différentes étapes de cette construction. Et il est raisonnable de se poser la question : « Dans quelle mesure ce modèle est-il un modèle didactique de la compréhension plutôt qu'un modèle psychologique ? ». Sous divers aspects, il est psychologique. Tel que mentionné par Skemp, on ne peut vraiment discuter de compréhension sans tomber dans le domaine de la psychologie. De plus, il est psychologique dans les sens structuraliste et épistémologique puisqu'il vise à décrire la structuration et la croissance des connaissances mathématiques.

Toutefois, si le psychologue peut limiter sa recherche à la structuration spontanée et à la croissance des connaissances de l'enfant, par contre, le didacticien ne peut s'y restreindre. En effet, la mathématique ne s'apprend pas de la même manière que l'on apprend spontanément à marcher à quatre pattes, et de façon moins spontanée, à conduire une bicyclette. Même si au début quelqu'un doit tenir la selle, dès qu'un équilibre est ressenti, le cycliste peut alors se débrouiller par lui-même. Ceci n'est pas le cas pour l'apprentissage de la mathématique. L'étudiant a constamment besoin d'être guidé par l'enseignant. De ce point de vue, notre modèle reflète bien cette réalité puisque les trois derniers niveaux de compréhension résultent d'apprentissage et de construction se situant essentiellement dans le contexte scolaire. Et dans ce sens, notre modèle est aussi didactique.

Mais il ne devrait pas être confondu avec un modèle d'instruction. Ainsi, lorsqu'au niveau de la formalisation nous examinons la nature représentative de la notation mathématique, nous ne traitons pas de son enseignement. Et le fait que dans notre modèle nous n'en traitons qu'au quatrième niveau n'implique aucunement que sa présentation devrait être abordée qu'une fois l'abstraction atteinte. Bien qu'une introduction prématurée de la notation mathématique puisse s'avérer improductive, voire même nuisible, il y a tout lieu de croire qu'elle devrait suivre de près l'enseignement des procédures initiales. Car, tel que souligné par Vergnaud (1982), on ne pourrait ignorer la contribution possible que la symbolisation pourrait apporter au processus d'abstraction. La possibilité d'une telle contribution peut être inférée à partir d'une expérience conduite par Groen & Resnick (1977) dans laquelle ils découvrirent, qu'en présence d'objets concrets et de fiches symbolisant l'arithmétique, des enfants de quatre ans pouvaient éventuellement, dans des situations additives, développer par eux-mêmes la stratégie de compter à partir du plus grand ensemble.

Une deuxième raison nous empêche de prendre notre modèle de la compréhension pour un modèle d'instruction. Bien que nous ayons inclu comme deuxième phase de l'abstraction la construction d'invariants mathématiques (tels que la conservation du nombre, l'équivalence des sommes, etc.) nous devons admettre qu'aucune des théories courantes de l'enseignement et de l'apprentissage nous permet d'identifier explicitement les interventions pédagogiques qui induiraient ces constructions chez l'étudiant. Tout au mieux, nous pouvons soulever des questions appropriées qui pourraient l'amener à y réfléchir, ou élaborer des tâches qui, nous l'espérons, pourraient créer un conflit cognitif dont la résolution provoquerait une certaine conscience de l'invariance en question.

Enfin, étant donné que dans notre modèle nous prenons l'intuition comme point de départ de la formation de concept, on pourrait se méprendre en inférant que son rôle diminue et que, au fur et à mesure que cette construction se poursuit, l'intuition disparaît progressivement. Cependant, comme nous l'a indiqué Fischbein (1982), ce serait ignorer la persistance et la prépondérance de l'intuition. Et c'est précisément cette persistance et cette prépondérance de l'intuition qui provoquent chez l'élève des obstacles épistémologiques, lesquels doivent être pris en considération par l'enseignant. Par exemple, lorsque l'élève apprend l'addition et la multiplication de nombres naturels, il s'aperçoit que dans chaque cas le résultat est plus grand que les termes de l'addition ou les facteurs de la multiplication. Et ceci est bien conforme à son intuition. Par contre, cette même intuition deviendra un obstacle épistémologique dont on devra tenir compte lorsque plus tard il devra additionner un entier négatif à un entier positif, ou multiplier un nombre naturel par une fraction.

Un dernier commentaire a trait à la flexibilité du modèle. Bien que pour communiquer nous ayons dû le décrire linéairement, il ne devrait pas être pris pour un modèle linéaire de l'apprentissage. Par exemple, il ne s'agirait pas d'attendre qu'un enfant ait atteint le niveau de formalisation pour le nombre, avant d'entamer l'addition. Les quatre niveaux de compréhension du nombre s'étalent sur plusieurs années, débutant par l'intuition dès la petite enfance, pour atteindre la formalisation vers cinq ou six ans. Et même alors, ce niveau ne sera pas terminal puisque la notion de nombre que possède l'enfant évoluera au fur et à mesure qu'il apprend l'arithmétique. Donc, un élève peut facilement passer d'une compréhension procédurale du nombre (savoir dénombrer) à une compréhension procédurale de l'addition (ajouter ou réunir et compter à partir de 1). Mais dans le contexte de l'addition, compter devient un pré-requis alors que les actions d'ajouter ou de réunir font partie de ses connaissances intuitives. Par contre, on pourrait difficilement s'attendre à ce qu'un enfant puisse atteindre quelque degré d'abstraction de l'addition sans être parvenu au préalable à un certain degré d'abstraction du nombre.

Ces remarques devraient prévenir certaines confusions au sujet de notre modèle. Bien entendu, aucun modèle ne devrait jamais être considéré comme définitif, et le nôtre aussi évoluera et se précisera grâce aux discussions. Mais ces discussions ne devraient pas se limiter à juger de la « bonne » interprétation d'un mot, puisque des termes tels que « intuition, abstraction et formalisation » s'interprètent différemment par les mathématiciens, les psychologues, et les didacticiens. Car en effet, la valeur d'un modèle se juge le mieux en fonction de son applicabilité. À cette fin, nous illustrons comment le nôtre peut être appliqué au concept de nombre.

Comprendre le concept de nombre

Intuition — Dans « La genèse du nombre chez l'enfant », Piaget et Szeminska (1947/1967) ont identifié les schèmes de sériation et de classification comme des préconcepts dont la coordination est nécessaire pour la construction du nombre. Bien que nécessaire, cette condition n'est pas suffisante puisqu'elle vise surtout une notion intermédiaire à la notion de nombre, celle de quantité. Cette notion de quantité, qui se développe bien avant toute scolarisation, est basée au début uniquement sur la perception et permet à l'enfant de juger et de distinguer entre peu et beaucoup, entre plus ou moins. Bien entendu, ces estimations occasionnent beaucoup d'erreurs de jugement dues aux limitations de la perception visuelle, laquelle est affectée par la configuration d'un ensemble ou par la taille différente des objets à comparer. Plus tard, vers 4-5 ans, l'enfant devient capable de faire ces comparaisons par correspondance bi-univoque (Fuson et al, 1980). Même si nous ne pouvons pas encore parler d'arithmétique, nous retrouvons ici des idées logico-mathématiques constituant en quelque sorte des préconcepts du nombre et qui, par rapport à celui-ci, se situent au niveau intuitif.

La comptine des nombres — Les chercheurs œuvrant en ce domaine sont unanimes sur le fait que la notion de nombre émerge à travers des activités de dénombrement qui relient la notion de quantité à la comptine des nombres (un, deux, trois,...). Évidemment, il ne s'agit pas ici de la reconnaissance subite de certaines configurations (« subitizing ») car celle-ci ne fait intervenir aucun comptage. Le dénombrement exige l'emploi de la comptine dont l'apprentissage n'est certes pas spontané. Sa connaissance ne peut se situer au niveau intuitif et doit donc être considérée comme un pré-requis à l'acquisition des procédures de dénombrement. En général, l'apprentissage de cette comptine est graduel, allant de plus en plus loin dans la récitation (Bessot & Comiti, 1981 ; Fuson & Richards, 1980). Plusieurs habiletés reliées à la mémorisation de la comptine ont été identifiées. Et même plus, Fuson et al (1982) ont montré qu'il existe la hiérarchie suivante dans l'acquisition de ces habiletés : (1) récitation à partir de 1 ; (2) récitation de 1 jusqu'à un nombre donné ; (3) récitation à partir d'un nombre donné ; (4) récitation débutant et se terminant à deux nombres donnés ; (5) récitation à rebours en partant d'un nombre donné ; (6) récitation à rebours en partant et en s'arrêtant à deux nombres donnés ; (7) récitation des n nombres qui suivent un nombre donné ; (8) récitation de a à b, $a < b$, en tenant compte du nombre de mots prononcés ; (9) récitation à rebours des n nombres qui précèdent un nombre donné ; (10) récitation à rebours de b à a en tenant compte du nombre de mots prononcés. Il est à remarquer que dans un contexte de pré-requis, dans le sens de mémorisation nécessaire à une éventuelle procédure de dénombrement, les dix habiletés identifiées par Fuson et al ne sauraient être toutes retenues car en effet, les habiletés (7) à (10) font déjà appel au dénombrement. Ces quatre habiletés sont tellement évoluées qu'elles dépassent même le niveau des procédures initiales. Steffe et al (1982) les considèrent comme des évidences d'abstraction du nombre étant donné qu'elles font appel à un double comptage.

Compréhension procédurale — Il est important de distinguer entre la récitation de la comptine, qui est un pré-requis, et l'acte de dénombrement, qui est une procédure établissant une correspondance bi-univoque entre les mots de la comptine et les objets à dénombrer. De fait, un enfant peut fort bien savoir réciter la comptine sans pour cela réussir correctement le dénombrement. Par exemple, il est bien connu que d'une part, les jeunes enfants peuvent compter deux fois le même objet ou en sauter, et que d'autre part, arriver à des résultats différents pour un même ensemble ne les dérange nullement.

Cette distinction entre la récitation et son emploi dans le dénombrement nous permet d'entrevoir six procédures de comptage correspondant aux diverses habiletés décrites par Fuson et al, et que nous avons retenues. Ainsi, tout en rappelant qu'au début le comptage implique nécessairement la présence d'objets, nous pouvons identifier les six procédures suivantes : (1) dénombrement à partir de 1 ; (2) comptage à partir de 1 jusqu'à un nombre donné dans une rangée d'objets ; (3) comptage d'objets à partir d'un nombre donné ; (4) comptage d'objets d'un nombre *a* jusqu'à un nombre *b*, a < b ; (5) comptage à rebours ; (6) comptage à rebours mais en s'arrêtant à un nombre donné. Il est à remarquer que la hiérarchie de Fuson et al a été vérifiée pour la comptine et non pour les procédures. Au niveau des procédures, cette hiérarchie demeure à l'état d'hypothèse.

Abstraction — Autant le dénombrement se distingue de la récitation de la comptine, autant l'abstraction du nombre se distingue de la procédure de comptage. Par exemple, un jeune enfant peut fort bien savoir dénombrer un ensemble donné d'objets, sans pour cela parvenir à identifier des ensembles équipotents. En effet, pour réussir cette tâche, il doit pressentir que compter est la procédure appropriée dans cette situation. Ainsi, l'enfant qui peut retrouver parmi une douzaine de fiches (différentes configurations non standard de points), celles correspondant à un nombre donné, manifeste un certain détachement de la procédure de dénombrement (dans le sens d'anticipation de son emploi), et fait déjà état d'un début de compréhension de l'aspect cardinal du nombre.

Pour chacune des six procédures de dénombrement décrites plus haut, nous pouvons élaborer des problèmes spécifiques dont la résolution exige l'utilisation de la procédure en question. La hiérarchisation de ces procédures en induit une au niveau des problèmes. Et nous pouvons considérer les réussites aux tâches impliquées dans ces problèmes comme critères de certains degrés d'abstraction, puisque pour nous la première phase de l'abstraction est rattachée à la sélection d'une procédure appropriée à la situation. Ainsi, la première procédure, le dénombrement à partir de 1, suffit pour trouver le rang d'un objet indiqué dans une rangée, tâche qui implique l'aspect ordinal du nombre.

La deuxième procédure, comptage à partir de 1 jusqu'à un nombre donné, est quelque peu plus difficile car l'enfant doit garder en mémoire le point d'arrêt. Cette procédure permet les quatre tâches suivantes : trouver le $n^{\text{ième}}$ élément dans une rangée d'objets (aspect ordinal) ; trouver des ensembles équipotents (aspect cardinal) ; trouver des ensembles dont la cardinalité est supérieure ou inférieure d'une unité à un ensemble donné (aspects cardinal et ordinal) ; construire un ensemble de cardinalité donnée (la génération d'un tel ensemble s'avérant plus difficile que la simple reconnaissance).

La troisième procédure, compter à partir d'un nombre donné, permet de trouver la cardinalité d'une rangée d'objets dont le début est caché et le rang de l'un des objets visibles donné. Cette tâche s'avère très difficile car, comme l'ont constaté Steffe et ses collaborateurs (1982), certains enfants ne peuvent dénombrer un ensemble d'objets qu'à la condition de les voir et de les toucher. Ils considèrent que le détachement graduel de la perception visuelle est essentiel au processus d'abstraction du nombre. L'aspect cardinal visé dans la tâche ci-dessus a sa contre-partie ordinale dans la tâche consistant à trouver le rang d'un objet indiqué, lorsque le rang d'un autre objet de rang inférieur est donné et que le début de la rangée est caché.

La quatrième procédure, le comptage d'objets à partir d'un nombre, jusqu'à un nombre supérieur donné, permet de trouver le $n^{ième}$ élément d'une rangée d'objets lorsque le rang d'un autre objet de rang inférieur est donné et que le début de la rangée est caché.

La cinquième procédure, compter à rebours, permet de réussir des tâches faisant aussi intervenir les aspects ordinal et cardinal du nombre : la première, trouver le rang d'un objet indiqué, lorsque le rang d'un autre objet de rang supérieur est donné, et que le début de la rangée est caché ; la seconde, trouver la cardinalité de l'ensemble caché lorsque le rang d'un objet visible de la rangée est donné.

La sixième procédure, le comptage à rebours jusqu'à un nombre donné, permet de trouver le $n^{ième}$ élément d'une rangée d'objets, lorsque le rang d'un autre objet de rang supérieur est donné, et que le début de la rangée est caché.

Les tâches précédentes reflètent des degrés d'abstraction dans la mesure où elles nécessitent non seulement la maîtrise de procédures, mais aussi une certaine anticipation de leur applicabilité. Ceci constitue une première phase d'abstraction. Tel que mentionné auparavant, la deuxième phase se caractérise par la construction d'invariants. Trois épreuves nous permettent d'identifier de telles constructions. La première consiste à vérifier si l'enfant peut anticiper que le nombre obtenu en comptant un ensemble d'objets ne change pas selon l'ordre dans lequel il les compte. Il nous indique par là qu'il conçoit déjà une certaine invariance du nombre (Piaget & Szeminska, 1947/1967).

Une deuxième épreuve vise explicitement à déterminer si l'enfant perçoit l'invariance du nombre par rapport à des configurations diverses (linéaires et autres) d'un même ensemble. L'enfant dépendant encore de la perception visuelle pourrait croire qu'une nouvelle configuration affecte la cardinalité de l'ensemble, même si aucun objet n'a été ajouté ou enlevé.

La troisième épreuve est une adaptation du test piagétien de la conservation du nombre élaboré par Gréco et Morf (1962). Cette adaptation diffère du test de Piaget en ce qu'elle fait intervenir le dénombrement, suite à une première estimation visuelle des deux rangées d'objets. Ceci permet de juger si la procédure de dénombrement amène l'enfant à surmonter les conflits cognitifs induits par l'aspect perceptif de la configuration.

Enfin, toujours au niveau de l'abstraction, nous pouvons inclure les quatre dernières tâches (habiletés (7) à (10) énumérées plus haut) que Fuson et al (1982) avaient classées au niveau de la récitation. En effet, ces tâches font intervenir un double comptage et d'après Steffe et al (1982), elles témoignent d'un degré d'abstraction très avancé vu qu'elles impliquent la notion d'unité arithmétique.

Formalisation — Remarquons que jusqu'à présent il n'a pas été question de la symbolisation mathématique du nombre. Le fait est que l'enfant peut fort bien faire abstraction des petits nombres sans avoir recours à la notation. En général, les enfants apprennent assez facilement à reconnaître et ensuite à écrire les chiffres de un à neuf. Mais la signification du chiffre 7 doit être différente pour l'enfant qui conserve le nombre que pour celui qui ne le conserve pas. Le chiffre ne devient donc une évidence de formalisation que s'il y a eu abstraction préalable du nombre.

Tant que les activités impliquées dans la description des trois niveaux de compréhension précédents demeurent sur le plan de représentations verbales et concrètes, elles n'ont pas à être restreintes aux neuf premiers nombres. Cependant, si nous désirons traiter de leur symbolisation, sans faire intervenir les difficultés additionnelles dues à la notation positionnelle, nous devons nécessairement nous limiter aux nombres à un chiffre. De nos jours l'enfant vit dans un environnement riche en expériences numériques (les parents, la télévision, les jeux, etc.), et il est souvent mis en présence de représentations symboliques des petits nombres. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que bien des enfants d'âge préscolaire puissent les reconnaître et que plusieurs parviennent même à les écrire.

Il ne faudrait pas oublier que l'apprentissage d'un concept n'est pas linéaire, dans le sens que le niveau de formalisation des concepts pré-requis n'a pas besoin d'être atteint avant d'entreprendre l'étude du concept visé. Car il faut prendre en considération ses interactions avec divers autres concepts. Nous avons présenté d'une façon séquentielle les quatre niveaux de la compréhension du concept de nombre pour illustrer comment le modèle peut être appliqué à l'analyse d'une notion donnée. Une analyse semblable du concept d'addition a été publiée (Herscovics & Bergeron, 1982). En fait, si les critères des différents niveaux de compréhension des deux concepts étaient présentés dans le même tableau, cette non-linéarité de l'apprentissage pourrait être illustrée à l'aide de flèches indiquant au moins deux directions de croissance possibles.

	C. INTUITIVE	C. PROCÉDURALE	ABSTRACTION	FORMALISATION
NOMBRE				
ADDITION				
SOUSTRACTION				

Bien entendu, l'apprentissage est encore plus complexe que ne le montre ce tableau. Par exemple, il n'y a aucun doute que tout progrès dans la compréhension de l'addition amène une plus grande compréhension du nombre. De plus, toute hiérarchie de l'addition et de la soustraction ne peut être présumée que pour fin de discussion puisque, certainement au niveau intuitif, aucune des deux n'a préséance sur l'autre.

Évidemment, tous les modèles sont au mieux une approximation de la réalité, mais leur fonction est de simplifier cette réalité et de nous la rendre accessible. Dans ce sens notre modèle possède des avantages certains. Il peut être appliqué à un concept spécifique et fournir une réponse à la question « Que veut dire comprendre ce concept ? », réponse dépassant le niveau des habiletés. Aussi, comme l'analyse du concept de nombre l'a montré, notre modèle peut procurer un cadre permettant la synthèse de plusieurs résultats de recherche. Il peut en outre servir à générer de nombreuses questions intéressantes et des hypothèses importantes tant au niveau de la recherche que de leurs implications pédagogiques.

En guise de conclusion

Nous avons expliqué assez longuement pourquoi notre modèle ne devrait pas être confondu avec un modèle d'instruction. Cependant, cela ne diminue en rien l'importance de ses implications pédagogiques, car d'un point de vue épistémologique, les quatre niveaux de compréhension peuvent être considérés comme autant d'objectifs cognitifs de l'enseignement. Dans une telle perspective, les problèmes de l'enseignement ne se réduisent pas à une simple « transmission d'information » mais consistent plutôt à identifier les interventions pédagogiques qui permettront au maître de guider ses élèves dans la construction de leurs connaissances. Sans tomber dans une théorie prescriptive de l'instruction, nous pouvons toutefois dégager quelques implications pédagogiques fondamentales.

Une première implication résulte de l'inclusion de l'intuition en tant que niveau initial de la compréhension. Tel que mentionné auparavant, prendre cette intuition comme point de départ implique une recherche, dans l'expérience de l'enfant, de situations appropriées permettant à l'apprentissage de la mathématique de devenir significatif et pertinent. Les connaissances ainsi acquises prennent racine dans la réalité de l'élève et la construction de ses schèmes conceptuels bénéficie d'une certaine continuité qui n'aurait pas été présente si les mathématiques avaient été d'abord enseignées formellement, puis, seulement après coup, reliées à des situations signifiantes pour lui.

Une deuxième implication est reliée à l'acquisition de procédures initiales. Il nous semble assez important que ces dernières soient introduites par des situations dans lesquelles l'élève peut percevoir un problème. Par exemple, en quoi la procédure de comptage pourrait-elle bien lui être utile s'il ne la relie pas à la question « Combien » ? Ce type d'apprentissage ne résulterait qu'en une sorte de compréhension que Skemp a qualifiée d'« instrumentale », c'est-à-dire, « des règles sans raison ». Par contre, lorsque la procédure est introduite dans le contexte d'une certaine classe de problèmes, la compréhension procédurale qui en résulte permet de relier la compréhension intuitive et le début de l'abstraction, puisqu'alors la procédure peut être envisagée en terme de son applicabilité.

Une troisième implication a trait à la transition entre les deux phases de l'abstraction. Étant donné que les enfants semblent parvenir à la conservation du nombre vers 5-6 ans par eux-mêmes, on pourrait croire que la deuxième phase de l'abstraction portant sur la généralisation, la construction d'invariants, et la réversibilité des transformations peut être attribuée uniquement à la maturation. Mais si tel était le cas en général, comment expliquer le fait que des élèves québécois âgés de 15 ans n'avaient pas encore fait abstraction de la notion de point (Herscovics, 1979 ; Bergeron & Herscovics, 1980) alors que des enfants suisses y étaient parvenus vers 11-12 ans (Piaget & Inhelder, 1947) ? Évidemment, quelques interventions encourageant nos élèves à y réfléchir ont suffi à leur faire franchir ce pas. Cet exemple illustre la nécessité pour l'enseignant d'amener ses élèves à réfléchir aux problèmes de généralisation, d'invariance et de réversibilité. Il ne faut surtout pas s'attendre à des résultats immédiats, car d'habitude ceux-ci ne peuvent être le fruit que de longues et multiples réflexions. Ce type d'intervention pédagogique exige de la part de l'enseignant beaucoup de doigté et de patience, car autrement l'élève aura tendance à énoncer le critère d'abstraction envisagé, mais sans nécessairement être convaincu. Il ne s'agit pas non plus de soulever de tels problèmes prématurément avant que la première phase de l'abstraction ait eu le temps d'évoluer. Par exemple, pour amener l'élève à concevoir la réversibilité d'une transformation, il faut lui procurer un nombre suffisant d'expériences impliquant la procédure en question. Celle-ci peut alors lui devenir assez familière pour qu'il puisse s'en décentrer et en anticiper le résultat. Ce n'est qu'en dégageant ainsi sa pensée de la procédure qu'il pourra envisager simultanément la transformation en jeu et son inverse.

Enfin, il faudrait se rappeler que même si le modèle décrit quatre niveaux consécutifs, cela n'implique pas une approche linéaire de l'apprentissage, ou de l'enseignement. On ne devrait certainement pas attendre, pour l'introduction d'un nouveau concept, que le niveau de formalisation soit atteint pour ses pré-requis. La construction d'un schème conceptuel correspondant à un concept mathématique fondamental s'étale sur une longue période de temps, mais l'élève peut en posséder une compréhension intuitive bien avant toute instruction. Par exemple, l'enfant de la maternelle a une perception intuitive du nombre (la notion de quantité), de l'addition (ajouter, réunir), et de la soustraction (enlever, la différence). Et afin d'optimiser ses connaissances, il semblerait raisonnable de poursuivre simultanément la construction de ces concepts. Ainsi, la notion d'addition viendrait enrichir celle de nombre, et la soustraction celle de l'addition. La possibilité d'une interaction entre les divers concepts, liée au fait que leur construction nécessite plusieurs années, militent en faveur d'une approche en spirale pour l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique.

Nicolas Herscovics
Jacques C. Bergeron

NOTES

1. Recherche réalisée dans le cadre d'un projet inter-universitaire subventionné par le ministère de l'Éducation du Québec, F.C.A.C., EQ-1741.
   Cet article a paru sous le titre « Models of Understanding » dans Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, n°o 2, avril 1983, numéro spécial consacré à la psychologie de la didactique de la mathématique. Traduit et reproduit avec la permission de l'éditeur, M. Gerhard König.
2. Toutes les citations apparaissant dans le texte sont des traductions libres des auteurs du présent article.

RÉFÉRENCES

Backhouse, J.K., Understanding School Mathematics — A Comment, dans *Mathematics Teaching*, no 83, 1978, p. 39-41.

Bergeron, J.C. et Herscovics, N., Vers une intégration de la recherche à la formation et au perfectionnement des enseignants, dans *Revue des Sciences de l'Éducation*, vol. VI, no 2, 1980, p. 215-230.

Bergeron, J.C. et Herscovics, N., Problems related to the application of a model of understanding to elementary school mathematics, dans *Proceedings of the Third annual Meeting of the PME-NA*, Minneapolis, USA, 1981, p. 24-29.

Bergeron, J.C., Herscovics, N., Dionne, J.J., Assimilation of models of understanding by elementary school teachers, dans *Actes du Cinquième Colloque du PME*, Grenoble, 1981, p. 362-368.

Bessot, A. et Comiti, C., Étude du fonctionnement de certaines propriétés de la suite des nombres dans le domaine numérique (1,30) chez des élèves de fin de première année de l'école obligatoire en France (Cours préparatoire), dans *Actes du Cinquième Colloque du PME*, Grenoble, 1981.

Bruner, J.S., *The process of education*, Cambridge : Harvard, 1960.

Bruner, J.S., *On knowing : essays for the left hand*, New York : Atheneum, 1962.

Buxton, L., Four levels of understanding, dans *Mathematics for Schools*, octobre 1978.

Byers, V. et Herscovics, N., Understanding school mathematics, dans *Mathematics Teaching, 81,* 1977, p. 24-27.

Carpenter, T. et Moser, J., The development of addition and subtraction concepts in young children, dans *Proceedings of the Third Conference of PME*, Tall, D. (éd.), Warwick, Great Britain, 1979.

Clement, J., Algebra word problem solutions : thought processes underlying a common misconception, dans *J. for Research in Mathematics Education*, vol. 13, no 1, 1982, p. 16-30.

Dionne, J.J., Aperçu historique de la philosophie des mathématiques, dans *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, vol. XXII, no 2, 1982.

Erlwanger, S.H., Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics, dans *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, vol. 1, no 2, 1973, p. 7-26.

Erlwanger, S.H., Case studies of children's conceptions of mathematics, dans *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, vol. 1, no 3, 1975, p. 157-283.

Fischbein, E., Consultation. Montréal, novembre 1982.

Fuson, K.C. et Richards, J., Children's construction of the counting numbers : from a spew to a bidirectional chain, Communication présentée à the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston, avril 1980.

Fuson, K.C., Richards, J., Briards, D.J., Effects of counting and matching on conservation of number, Communication présentée à the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Boston, avril 1980.

Fuson, K.C., Richards, J., Briars, D.J., The acquisition and elaboration of the number word sequence, in Brainerd, C. (éd.). Progress in Cognitive Development, vol. 1, *Children's Logical and Mathematical Cognition*. New York : Springer-Verlag, 1982.

Ginsburg, H., *Children's Arithmetic*, New York : Van Nostrand, 1977.

Ginsburg, H.P. et Opper, S., *Piaget's Theory of Intellectual Development*, 2è éd., New Jersey : Prentice-Hall, 1979.

Greco, P. et Morf, A., *Structures numériques élémentaires*, vol. XIII des Études d'Épistémologie génétique, Paris : P.U.F., 1962.

Groen, G. et Resnick, L.B., Can preschool children invent addition algorithms ? dans *Journal of Educational Psychology*, no 79, 1977, p. 645-652.

Herscovics, N., The understanding of some algebraic concepts at the secondary level, dans *Proceedings of the Third Conference of PME*, Tall, D. (éd.) Warwick, 1979.

Herscovics, N. et Bergeron, J.C., Pourquoi et comment décrire la compréhension de la mathématique, dans *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, vol. XXII, no 1, 1982, p. 9-17.

Herscovics, N., Bergeron, J.C., Nantais-Martin, N., Some psycho-pedagogical effects associated with the study of models of understanding by primary school teachers, dans *Actes du Cinquième Colloque du PME*, Grenoble, 1981, p. 369-374.

Piaget, J., *Épistémologie génétique*, Paris : P.U.F., 1972.

Piaget, J., Comments on mathematical education, dans *Developments in Mathematical Education*, Proceedings of the Second International Congress on Mathematics Education, Howson, A.G. (éd.), Cambridge University Press, 1973.

Piaget, J. et Inhelder, B., *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : P.U.F. 1947/1977.

Piaget, J., Szeminska, A., *La genèse du nombre chez l'enfant*. Suisse : Delachaux et Niestlé, 1947/1967.

Simon, H., Information processing models of cognition, dans *Annual Review of Psychology*, vol. 30, 1979, p. 363-396.

Skemp, R.R., *The psychology of learning mathematics*, London : Penguin, 1971.

Skemp, R.R., Relational understanding and instrumental understanding, dans *Mathematics Teaching*, no 77, 1976.

Skemp, R.R., Goals of learning and qualities of understanding, dans *Mathematics Teaching*, no 88, 1979, p. 44-49.

Skemp, R.R., Consultation, Montréal, mars 1981.

Skemp, R.R., Symbolic understanding, dans *Mathematics Teaching*, no 99, 1982, p. 59-61.

Steffe, L.P., Von Glasersfeld, E., Richards, J., Cobb, P., *Children's counting types : philosophy, theory, and application*, Monographie, Université de Georgie, 1982.

Tall, D., The dynamics of understanding mathematics, dans *Mathematics Teaching*, no 84, 1978.

Tennyson, R.D. et Park, O.C., The teaching of concepts : a review of instructional design research literature, dans *Review of Educational Research*, vol. 50, no 1, 1980, p. 55-70.

Vergnaud, G., Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, dans *Actes du Cinquième Colloque du PME*, Grenoble, 1981, p. 7-18.

Vergnaud, G., Consultation, Montréal, juin 1982.